物 理 學 報
第 12 卷 第 3 期 1956 年 5 月

根據介子場論探討低速運動下的核力形式*

嚴 肅
（北京大學物理系）

本文仿傚依萬甯柯和蘇科洛夫在"古典場論"一書中所給予的白萊脫作用推導法[1]來推導低速運動下核子間的勢能形式. 這個方法可以應用到各種介子場和幾種介子的混合場上去. 所得結果很複雜,進一步的討論尚待以後的工作.

一. 核勢能形式的推導

依萬甯柯和蘇科洛夫在"古典場論"一書中曾用古典方法導出兩個電子間的白萊脫作用. 其要略如下: 按照通常的場論方法,運動方程可從以下作用函數的變分式導出:

$$\delta S = \delta \int L\, dt = 0.$$

作用函數 S 通常可分爲場、粒以及場粒相互作用三個部分,今分别用 S_1、S_2 及 S_{12} 表示之:

$$S = S_1 + S_2 + S_{12};$$

則粒子所產生的場的運動方程可從下列變分式導出:

$$\delta(S_1 + S_{12}) = 0.$$

粒子在所給場中的運動方程可從下列變分式導出:

$$\delta(S_2 + S_{12}) = 0.$$

如果認爲粒子間的相互作用應該是每個粒子受到其他粒子所產生的場的作用，則我們可從以上第一個變分式中求出場變量的推遲解、並設法代入第二個變分式中消去場變量,使最後得到的描寫粒子運動的方程中只包含粒子的變量,由此可得描寫粒子相互作用的勢能形式.

任兩個電子的情形下;從第一個變分式中得到電子（1）所產生的場的推遲解爲:

*1955 年 4 月 29 日收到.

$$A_\mu^{(1)} = e_1 \int \dot{\xi}_\mu^{(1)} \frac{\delta(\tau - t + R'/c)}{cR'} dS.$$

把其中的 $\delta(\tau - t + \frac{R'}{c})$ 按 $\frac{R'}{c}$ 展開,經積分後得

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{R} + \frac{e_1}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \underline{A}_1 = \frac{e_1}{cR}\underline{V}_1.$$

當變分 $S_2 + S_{12}$ 時,考慮電子(2)處於電子(1)的推遲場內,此時 S_{12} 可取以下的形式:

$$S_{12} = \frac{e_2}{c}\int ds \int \rho(x - \xi^{(1)})\, \dot{\xi}_\mu^{(2)} A_\mu^{(1)}\, d^4x = -\int V_{12}\, d\tau;$$

其中

$$V_{12} = e_2\varphi_1 - \frac{e_2}{c}(\underline{V}_2 \cdot \underline{A}_1).$$

如果把 $\underline{A}_1$, φ_1 經過以下的規範變換:

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \underline{A}_1' = \underline{A}_1 + \nabla f, \quad f = \frac{e_1}{2c}\frac{\partial R}{\partial t};$$

再用 $\underline{A}_1'$, φ_1' 代替 V_{12} 中的 A_1 和 φ_1,就得到只包含粒子坐標及速度並對稱於兩個粒子的白萊脫作用:

$$V_{12} = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}[(\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2) + (\underline{V}_1 \cdot \underline{R}_0)(\underline{V}_2 \cdot \underline{R}_0)]\right\}.$$

在以上推導法中,如果改用量子論,從狄喇克方程出發,則最後結果只是把上式中的 V_1 和 V_2 換爲狄喇克算符 $c\alpha_1$ 和 $c\alpha_2$. 我們知道,白萊脫作用經過簡化到非相對論近似並把其中的$\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 項當作微擾項來處理時,可以說明氦原子光譜的精細結構. 由此可見,在電子情形下,採用上述方法算到$\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級近似程度時,和實際有成功的聯系.

本文將仿傚上述方法來推導低速運動下核子勢能的形式. 今改用相對論的量子力學方程來描寫粒子運動,則一若干粒子集合的作用函數 S 的 S_2 部分爲

$$S_2 = \sum_i S_i = \int \Psi^* \left\{E + \sum_i [-c(\alpha_i \cdot P_i) - c^2 \rho_{3i} M_i]\right\} \Psi\, dV\, dt,$$

其中

$$M_i = \tau_{3i}\frac{M_N - M_p}{2} + \frac{M_N + M_p}{2}, \qquad dV = \prod_i dV_i,$$

$$E\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi;$$

此處 $\Psi = \prod_j \psi_j(x_j, t)$，但在以後我們把 Ψ 作爲 x_j 等及 t 的普遍函數，作爲描寫粒子體系的波函數.

作用函數的 S_1 部分,當自由介子場爲矢量場或贋矢量場時，

$$S_1 = \int \left[-\frac{F^2}{2} - F(\nabla V + \dot{U}) + \frac{G^2}{2} - G \cdot \nabla \wedge U - \frac{K^2}{2}(U^2 - V^2) \right] d^4x;$$

其中
$$\dot{U} = \frac{\partial U}{c\partial t}.$$

如爲標量場或贋標量場時，

$$S_1 = \int \left[\frac{\Gamma^2}{2} + \Gamma \nabla \Psi - \Phi^2/2 + \Phi\dot{\Psi} - \frac{K^2}{2}\Psi^2 \right] d^4x.$$

以上的 $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{U}$, V 及 $\vec{\Gamma}$, Φ, Ψ 均爲獨立場變量,所用符號同摩勒-羅森費德[2].

考慮一個核子 j 在外界場中所增加的 S_{12}，當爲矢量場或贋矢量場時可表爲下列形式：

$$S_{12}^{(j)} = \int \frac{1}{2} \Big\{ T^{(j)} \cdot F + F \cdot T^{(j)} - S^{(j)} \cdot G - G \cdot S^{(j)} + M^{(j)} \cdot U + + U \cdot M^{(j)} - N^{(j)} \cdot V - V \cdot N^{(j)} \Big\} d^4x;$$

當爲標量場或贋標量場時可表爲下列形式：

$$S_{12}^{(j)} = \int \frac{1}{2} \Big\{ Q^{(j)} \cdot \Phi + \Phi \cdot Q^{(j)} + R^{(j)} \cdot \Psi + \Psi \cdot R^{(j)} - P^{(j)} \cdot \Gamma - \Gamma \cdot P^{(j)} \Big\} d^4x;$$

其中

$$T^{(j)} = \int \psi_j^* T_j \delta^3(x - x_j) \psi_j \, dV_j.$$

符號 $S^{(j)}$, $M^{(j)}$, $N^{(j)}$ 及 $Q^{(j)}$, $R^{(j)}$, $P^{(j)}$ 均和以上的符號 $T^{(j)}$ 具有同一的形式.

T_j, S_j, M_j, N_j 和 Q_j, R_j, P_j 均爲場源密度. 依賴於核子的坐標. 四種不同類型的介子場和核子作用的區別如下：

1) 矢量場： $N_j = g_1 \tau_j$,　$S_j = \frac{g_2}{K_1} \tau_j \rho_{3j} \sigma_j$,　$M_j = g_1 \tau_j \rho_{1j} \sigma_j$,　$T_j = -\frac{g_2}{K_1} \tau_j \rho_{2j} \sigma_j$;

2) 贋矢量場： $N_j = g_1' \tau_j \rho_{1j}$,　$S_j = \frac{g_2'}{K_2} \tau_j \rho_{2j} \sigma_j$,　$M_j = g_1' \tau_j \sigma_j$,　$T_j = \frac{g_2'}{K_2} \tau_j \rho_{3j} \sigma_j$;

3) 贋標量場： $P_j = \frac{f_2}{K_3} \tau_j \sigma_j$,　$Q_j = \frac{f_2}{K_3} \tau_j \rho_{1j}$,　$R_j = f_1 \tau_j \rho_{2j}$;

4) 標量場： $P_j = \frac{f_2'}{K_4} \tau_j \rho_{1j} \sigma_j$,　$Q_j = \frac{f_2'}{K_4} \tau_j$,　$R_j = f_1' \tau_j \rho_{3j}$;

其中 $K_n = \frac{\mu_n c}{\hbar}$，以區別不同介子質量 μ_n. g_1, g_2, g'_1, g'_2, f_1, f_2, f'_1 及 f'_2 均爲場源強度,具有電荷的量綱.

變分 $S_1 + \sum_j S_{12}^{(j)}$ 時,可以得到核子所產生的介子場方程. 結果如下:

矢量或贗矢量場:

$$F + \nabla V + \dot{U} = \sum_j T^{(j)}, \qquad G - \nabla \wedge U = \sum_j S^{(j)},$$

$$\dot{F} - \nabla \wedge G - K^2 U = -\sum_j M^{(j)}, \quad \nabla \cdot F + K^2 V = \sum_j N^{(j)}.$$

標量或贗標量場:

$$\Gamma + \nabla \Psi = \sum_j P^{(j)}, \qquad \dot{\Psi} - \Phi = -\sum_j Q^{(j)},$$

$$\nabla \cdot \Gamma + K^2 \Psi + \dot{\Phi} = \sum_j R^{(j)}.$$

如果是海森伯繪景,假定算符 $T^{(j)}$ 等式中的 ψ_j 不隨時間變化,而算符 T_j 等以及 $\delta^3(x - x_j)$ 中的 x_j 等隨時間變化. 並可根據和哈密頓量的對易關係確定其變化率. 以後我們採用海森伯繪景.

根據線性方程解的疊合原則,核子所產生的場 F, G, U, V 及 Γ, Φ, Ψ 等亦可表爲下列疊合形式,以 F 爲例:

$$F = \sum_j F^{(j)}, \qquad F^{(j)} = \int \psi_j^* F_j \psi_j \, dV_j.$$

則算符 F_j 等等滿足以下和場方程相似的有點源的方程:

矢量場或贗矢量場:

$$F_j + \nabla V_j + \dot{U}_j = T_j \delta^3(x - x_j), \qquad G_j - \nabla \wedge U_j = S_j \delta^3(x - x_j),$$

$$\dot{F}_j - \nabla \wedge G_j - K^2 U_j = -M_j \delta^3(x - x_j), \qquad \nabla \cdot F_j + K^2 V_j = N_j \delta^3(x - x_j);$$

標量場或贗標量場:

$$\Gamma_j + \nabla \Psi_j = P_j \delta^3(x - x_j), \qquad \Phi_j - \dot{\Psi}_j = Q_j \delta^3(x - x_j),$$

$$\nabla \cdot \Gamma_j + K^2 \Psi_j + \dot{\Phi}_j = R_j \delta^3(x - x_j).$$

從以上的聯立方程中可以找出場變量的推遲解, 把它代入 S_{12} 中就可以消去場變量. 例如核子 i 在核子 j 的推遲場中所增加的作用函數 $S_{12}^{(ij)}$ 如下:

矢量場或贗矢量場:

$$S_{12}^{(ij)} = \int \frac{1}{2} \Big\{ -N^{(i)} \cdot V^{(j)} - V^{(j)} \cdot N^{(i)} + M^{(i)} \cdot U^{(j)} + U^{(j)} \cdot M^{(i)} - S^{(i)} \cdot G^{(j)} -$$

$$-G^{(j)}\cdot S^{(i)}+T^{(i)}\cdot F^{(j)}+F^{(j)}\cdot T^{(i)}\Big\}d^4x=\int\Psi^*[-V_{ij}]\Psi\,dV\,dt;$$

其中

$$V_{ij}=\frac{1}{2}\int\Big\{N_i\delta^3(x-x_i)\cdot V_j+V_j\cdot N_i\delta^3(x-x_i)-M_i\delta^3(x-x_i)\cdot U_j-$$
$$-U_j\cdot M_i\delta^3(x-x_i)+S_i\delta^3(x-x_i)\cdot G_j+G_j\cdot S_i\delta^3(x-x_i)-$$
$$-T_i\delta^3(x-x_i)-F_j-F_j\cdot T_i\delta^3(x-x_i)\Big\}d^3x.$$

標量場或贋標量場：

$$S_{12}^{(ij)}=\int\frac{1}{2}\Big\{-P^{(i)}\cdot\Gamma^{(j)}-\Gamma^{(j)}\cdot P^{(i)}+R^{(i)}\cdot\Psi^{(j)}+\Psi^{(j)}\cdot R^{(i)}+Q^{(i)}\cdot\Phi^{(j)}+\Phi^{(j)}\cdot Q^{(i)}\Big\}d^4x$$
$$=\int\Psi^*[-V_{ij}]\Psi\,dV\,dt;$$

其中

$$V_{ij}=\frac{1}{2}\int\Big\{P_i\delta^3(x-x_i)\cdot\Gamma_j+\Gamma_j\cdot P_i\delta^3(x-x_i)-R_i\delta^3(x-x_i)\cdot\Psi_j-\Psi_jR_i\delta^3(x-x_i)-$$
$$-Q_i\delta^3(x-x_i)\cdot\Phi_j-\Phi_j\cdot Q_i\delta^3(x-x_i)\Big\}d^3x.$$

以上的 $\Psi=\prod_j\psi_j(x_j)$，但在以後 Ψ 將採取較爲普遍的 $x_j(j=1,2,\cdots)$ 的函數．把 F_j 等的推遲解代入上式，S_{12} 中只包含粒子的變量．

以上的 V_{ij} 經變分作用函數後即可知道就是核子 i,j 之間的勢能．但是因爲在 $S_{12}^{(ij)}$ 的積分號內可以差一個不變量或差一個任意的對 t 的全微分函數而不影響變分結果，所以上述的 V_{ij} 並不代表勢能的唯一可能形式．我們準備先進行 V_{ij} 的積分計算然後再進行變分．在 V_{ij} 的積分計算中可以在必要時進行對 t 的部分積分法以改變 V_{ij} 的具體形式而不影響變分過程．使得改變形式以後的 V_{ij} 中不出現 $\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$ 並使 V_{ij} 對 i,j 更形對稱．這個新的 V_{ij} 經變分後就作爲核子 i,j 之間的勢能．

以下爲具體的計算步驟．

爲消去場變量起見，我們先把以前的點源方程進行重新組合，併合成爲以下幾個具有同一類型的只包含一個場變量的微分方程：

矢量場和贋矢量場：

$$LV_i=N_j\delta^3(x-x_j)-\nabla\cdot[T_j\delta^3(x-x_j)]+\frac{1}{K^2}\frac{\partial}{c\,\partial t}\Big\{\nabla\cdot[M_j\delta^3(x-x_j)]+$$
$$+\frac{\partial}{c\,\partial t}[N_j\delta^3(x-x_j)]\Big\},$$

$$LU_i=M_j\delta^3(x-x_j)-\nabla\wedge[S_j\delta^3(x-x_j)]+\frac{\partial}{c\,\partial t}[T_j\delta^3(x-x_j)]-$$

$$-\frac{1}{K^2}\nabla\left\{\nabla\cdot[M_j\delta^3(x-x_j)]+\frac{\partial}{c\,\partial t}[N_j\delta^3(x-x_j)]\right\},$$

$$LF_j=(K^2+\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}-\nabla^2)[T_j\delta^3(x-x_j)]-\nabla[N_j\delta^3(x-x_j)]-$$

$$-\frac{\partial}{c\,\partial t}\left\{M_j\delta^3(x-x_j)-\nabla\wedge(S_j\delta^3(x-x_j))\right\},$$

$$LG_j=\left(K^2+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\right)[S_j\delta^3(x-x_j)]+$$

$$+\nabla\wedge\left\{M_j\delta^3(x-x_j)+\frac{\partial}{c\,\partial t}[T_j\delta^3(x-x_j)]\right\}.$$

標量場和贋標量場:

$$L\psi_j=R_j\delta^3(x-x_j)-\nabla\cdot[P_j\delta^3(x-x_j)]-\frac{\partial}{c\,\partial t}[Q_j\delta^3(x-x_j)],$$

$$L\phi_j=(K^2-\nabla^2)[Q_j\delta^3(x-x_j)+\frac{\partial}{c\,\partial t}\left\{R_j\delta^3(x-x_j)-\nabla\cdot[P_j\delta^3(x-x_j)]\right\},$$

$$L\Gamma_j=\left(K^2+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\,\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}-\nabla^2\right)[P_j\delta^3(x-x_j)]-$$

$$-\nabla\left\{[R_j\delta^3(x-x_j)]-\frac{\partial}{c\,\partial t}[Q_j\delta^3(x-x_j)]\right\}.$$

以上方程皆屬於 $L\varphi=\rho$ 型,其中 $L=K^2+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2$.

根據本文附錄中的計算,$L\varphi=\rho$ 的推遲解,在近似到 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級程度時,可表成下列的近似展開式:

$$\varphi(\underline{x},t)=\int\rho(\underline{r},t)\,\varphi_{xr}\,d^3r-\int\frac{\partial^2\rho(\underline{r},t)}{c^2\,\partial t^2}\,\overline{\varphi}_{xr}\,d^3r,$$

其中

$$\varphi_{nxr}=\frac{e^{-K_nR}}{4\pi R},\qquad R=|\underline{x}-\underline{r}|,$$

$$\overline{\varphi}_{nxr}=\frac{e^{-K_nR}}{8\pi K_n};$$

$n=1,2,3,4$,用以區别各種介子場的介子質量. φ_{nxr} 和 $\overline{\varphi}_{nxr}$ 並有以下的關係:

$$(K_n^2-\nabla^2)\,\overline{\varphi}_{nxr}=\varphi_{nxr},$$

$$(K_n^2-\nabla^2)\,\varphi_{nxr}=\delta^3(x-r).$$

以上的近似展開式,只適用於實際上沒有輻射產生時的情形.

把以上推遲解的近似展開式代入 V_{ij} 中求積分計算時．我們可把積出的 V_{ij} 按 $\frac{v}{c}$ 的數量級加以分類處理．凡積分式內含有 ρ_1 或 ρ_2 之項均比含 ρ_3 或不含 ρ_3 之項小一個 $\frac{v}{c}$ 數量級，又凡 $\frac{\partial A}{c\partial t}$ 一般地認為要比 A 小一個 $\frac{v}{c}$ 數量級．因此，$\left(\frac{v}{c}\right)^0$ 數量級的 V_{ij} 將包含所有不含 ρ_1, ρ_2 及 $\frac{\partial A}{c\partial t}$ 之項，而 $\left(\frac{v}{c}\right)^1$ 數量級的 V_{ij} 將由所有包含 ρ_1, ρ_2, 及 $\frac{\partial A}{c\partial t}$ 之項所組成．最後我們可用

$$\frac{\partial A}{c\,\partial t}=\frac{i}{\hbar c}\,[H, A]$$

代入積分結果中，其中

$$H=\sum_k\left[c(\alpha_k\cdot P_k)+c^2\rho_{3k}M\right]+\frac{1}{2}\sum_{k\neq k'}\overset{0}{V}_{kk'},$$

$\overset{0}{V}_{kk'}$ 即 $\left(\frac{v}{c}\right)^0$ 數量級的 $V_{kk'}$．上述 H 只取到 $\left(\frac{v}{c}\right)^0$ 數量級，中子與質子的質量差別也可略去不計．由於受到微擾法的限制，$\left(\frac{v}{c}\right)^1$ 數量級以上的 V_{ij} 可以略去不計．

如果考慮一種場和核子只能有一種耦合，則此時算出的 $\left(\frac{v}{c}\right)^1$ 數量級的 V_{ij} 整個地等於零．只是在這種情況下才有必要計算 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級的 V_{ij}．在這個計算中，我們會碰到 $\frac{\partial\rho_1}{c\partial t}$, $\frac{\partial\rho_2}{c\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2 A}{c^2\partial t^2}$ 的困難．這是因為 ρ_1 和 ρ_2 中包含從負能級到正能級的高頻振動因而不能應用附錄中推遲解的近似展開式．但是我們可以利用對 t 的部分積分法以避免 $\frac{\partial\rho_1}{c\partial t}$, $\frac{\partial\rho_2}{c\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2 A}{c^2\partial t^2}$ 的出現．例如，在 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級的積分計算中有下類的積分項：

$$\int[N_i\delta^3(x-x_i)]\cdot\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}[N_j\varphi_{xj}]\,d^3x.$$

對 t 進行部分積分．把積出的對 t 的全微分函數不歸入 V_{ij} 中．因為這一項的存在並不影響作用函數的變分過程．結果使 V_{ij} 中的上述一項換為新的 V_{ij} 中的下列一項：

$$\begin{aligned}
&-\int\frac{\partial}{c\,\partial t}[N_i\delta^3(x-x_i)]\cdot\frac{\partial}{c\,\partial t}[N_j\varphi_{xj}]\,d^3x\\
&\quad=-\int[\dot{N}_i\delta^3(x-x_i)+N_i(\dot{x}_i\cdot\nabla_i)\,\delta^3(x-x_i)]\cdot[\dot{N}_j\varphi_{xj}+N_j(\dot{x}_j\cdot\nabla_i)\,\varphi_{xj}]\,d^3x\\
&\quad=-[N_i+N_i(\dot{x}_i\cdot\nabla_{\varphi i})]\cdot[\dot{N}_j+N_j(\dot{x}_j\cdot\nabla_{\varphi j})]\,\varphi_{ij}\\
&\quad=-(N_i)_t\cdot(N_j)_t\,\varphi_{ij}.
\end{aligned}$$

以後我們令

$$(N_i)_t \equiv \dot{N}_i + N_i(\alpha_i \cdot \nabla_{\varphi i}),$$

此處 $\nabla_{\varphi i}$ 代表只作用在 φ_{ij} 中的 x_i 上的算符. 由於此時 $\left(\frac{v}{c}\right)^1$ 數量級的 V_{ij} 等於零,所以有

$$\dot{x}_j = \frac{i}{\hbar c}[H, x_j] = \alpha_j,$$

其中 H 仍具以前的形式.

按以上算法,把各種場的 V_{ij} 按 $\left(\frac{v}{c}\right)^0, \left(\frac{v}{c}\right)^1, \left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級分爲 $\overset{0}{V}_{ij}$, $\overset{1}{V}_{ij}$ 和 $\overset{2}{V}_{ij}$ 三部分,結果如下:

矢量場:

$$\overset{0}{V}_{ij} = [N_i \cdot N_j + K^2 S_i \cdot S_j + (S_i \cdot \nabla_i)(S_j \cdot \nabla_j)]\varphi_{1ij},$$

$$\overset{1}{V}_{ij} = [N_i(T_i \cdot \nabla_j) + N_j(T_j \cdot \nabla_i) + (M_i \cdot S_j \wedge \nabla_j) + (M_j \cdot S_i \wedge \nabla_i)]\varphi_{1ij},$$

$$\overset{2}{V}_{ij} = \Big[(T_i \cdot \nabla_i)(T_j \cdot \nabla_j) - M_i \cdot M_j - \frac{1}{2K_1^2}(\dot{N}_i \cdot \dot{N}_j + \dot{N}_j \cdot \dot{N}_i) - \frac{1}{2}(T_i \wedge \nabla_{\varphi i}) \cdot (S_j)_t -$$

$$- \frac{1}{2}(S_j)_t \cdot (T_i \wedge \nabla_{\varphi i}) - \frac{1}{2}(T_j \wedge \nabla_{\varphi j}) \cdot (S_i)_t - \frac{1}{2}(S_i)_t \cdot (T_j \wedge \nabla_{\varphi j})\Big]\varphi_{1ij} -$$

$$- T_i T_j \delta^3(x_i - x_j) + \frac{1}{2}[(N_i)_t \cdot (N_j)_t + (N_j)_t \cdot (N_i)_t + (S_i)_t \cdot (S_j)_t \nabla^2 +$$

$$+ (S_j)_t \cdot (S_i)_t \nabla^2 + (S_i \cdot \nabla_{\varphi i})_t (S_j \cdot \nabla_{\varphi j})_t + (S_j \cdot \nabla_{\varphi j})_t (S_i \cdot \nabla_{\varphi i})_t]\bar{\varphi}_{1ij}.$$

贋矢量場:

$$\overset{0}{V}_{ij} = - T_i T_j \delta^3(x_i - x_j) + \Big[(T_i \cdot \nabla_i)(T_j \cdot \nabla_j) - M_i \cdot M_j - \frac{1}{K_2^2}(M_i \cdot \nabla_i)(M_j \cdot \nabla_j)\Big]\varphi_{2ij},$$

$$\overset{1}{V}_{ij} = \Big[N_i(T_i \cdot \nabla_j) + N_j(T_j \cdot \nabla_i) + (M_i \cdot S_j \wedge \nabla_j) + (M_j \cdot S_i \wedge \nabla_i) + \frac{1}{2}(M_i)_t \cdot T_j +$$

$$+ \frac{1}{2}T_j \cdot (M_i)_t + \frac{1}{2}(M_j)_t \cdot T_i + \frac{1}{2}T_i \cdot (M_j)_t\Big]\varphi_{2ij},$$

$$\overset{2}{V}_{ij} = \Big[N_i N_j + K_2^2 S_i \cdot S_j + (S_i \cdot \nabla_i)(S_j \cdot \nabla_j) - \frac{1}{2K_2^2}N_i(M_j \cdot \nabla_{\varphi j})_t -$$

$$- \frac{1}{2K_2^2}(M_j \cdot \nabla_{\varphi j})_t N_i - \frac{1}{2K_2^2}(M_i \cdot \nabla_{\varphi i})_t N_j - \frac{1}{2K_2^2}N_j(M_i \cdot \nabla_{\varphi i})_t -$$

$$- \frac{1}{2}(T_i)_t \cdot (T_j)_t - \frac{1}{2}(T_j)_t \cdot (T_i)_t + \frac{1}{2}(S_i \wedge \nabla_{\varphi i}) \cdot (T_j)_t + \frac{1}{2}(T_j)_t \cdot (S_i \wedge \nabla_{\varphi i}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(T_i)_t \cdot (S_j \wedge \nabla_{\varphi j}) + \frac{1}{2}(S_j \wedge \nabla_{\varphi j}) \cdot (T_i)_t\Big]\varphi_{2ij} + \frac{1}{2}\Big[(T_i \cdot \nabla_{\varphi i})_t (T_j \cdot \nabla_{\varphi j})_t +$$

$$+(T_j\cdot\nabla_{\varphi i})_t(T_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t-(M_i)_t\cdot(M_j)_t-(M_j)_t\cdot(M_i)_t-$$

$$-\frac{1}{K_2^2}(M_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t(M_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t-\frac{1}{K_2^2}(M_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t(M_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t\Big]\bar{\varphi}_{2ij}.$$

贋標量場:

$$\overset{0}{V}_{ij}=P_iP_j\delta^3(x_i-x_j)-(P_i\cdot\nabla_i)(P_j\cdot\nabla_j)\varphi_{3ij},$$

$$\overset{1}{V}_{ij}=-[(P_i\cdot\nabla_i)R_j+(P_j\cdot\nabla_j)R_i]\varphi_{3ij},$$

$$\overset{2}{V}_{ij}=-Q_iQ_j\delta^3(x-x_j)-\Big[R_iR_j+\frac{1}{2}(P_i\cdot\nabla_{\varphi i})_tQ_j+\frac{1}{2}Q_j(P_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t+$$

$$+\frac{1}{2}Q_i(P_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t+\frac{1}{2}(P_j\cdot\nabla_{\varphi j})_tQ_i]\varphi_{3ij}-\frac{1}{2}[(P_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t(P_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t+$$

$$+(P_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t(P_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t]\bar{\varphi}_{3ij}.$$

標量場:

$$\overset{0}{V}_{ij}=-Q_iQ_j\delta^3(x_i-x_j)-R_iR_j\varphi_{4ij},$$

$$\overset{1}{V}_{ij}=\frac{1}{2}[R_i\cdot\dot{Q}_j+\dot{Q}_j\cdot R_i+\dot{Q}_i\cdot R_j+R_j\cdot\dot{Q}_i]\varphi_{4ij},$$

$$\overset{2}{V}_{ij}=P_iP_j\delta^3(x_i-x_j)-\frac{1}{2}[\dot{Q}_i\dot{Q}_j+\dot{Q}_j\dot{Q}_i]\varphi_{4ij}-\frac{1}{2}[(R_i)_t(R_j)_t+(R_j)_t(R_i)_t]\bar{\varphi}_{4ij}.$$

在 $S_{12}^{(ij)}$ 中可加入不變量,使得在標量場和贋標量場的 V_{ij} 中添加 $(Q_iQ_j-P_iP_j)\delta^3(x_i-x_j)$ 項以消去上述 V_{ij} 式中的 $\delta^3(x_i-x_j)$ 項，同樣可在贋矢量場 V_{ij} 中加入 $(T_iT_j-S_iS_j)\ \delta^3(x_i-x_j)$ 項，則上述 $\overset{0}{V}_{ij}$ 中之 $\delta^3(x_i-x_j)$ 項被消去,而在 $\overset{2}{V}_{ij}$ 中多出一項 $-S_iS_j\delta^3(x_i-x_j)$.

根據變分式

$$\frac{\delta\left(S_2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}S_{12}^{(ij)}\right)}{\delta\Psi^*}=0,$$

就可以得出包含相互作用的核子集合的波動方程．因此一若干核子集合的勢能形式 V 爲

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V_{ij}.$$

爲使結果普遍化起見，我們允許四種場並存；在以下經變分算出的 V_{ij} 中將包含着四種場的混合．V_{ij} 按 $\left(\frac{v}{c}\right)$ 的數量級展開，並按 τ,ρ,σ 等的算符組合類型分類後，結果所得的核子 $i,\ j$ 之間的勢能形式 $\overset{0}{V}_{ij}$, $\overset{1}{V}_{ij}$ 和 $\overset{2}{V}_{ij}$ 如下；

$$\overset{0}{V}_{ij} = V_{0ij} + \rho_{3i}\rho_{3j}V_{3ij}$$

$$V_{0ij} = (\tau_i\cdot\tau_j)\,[a_{ij} + (\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,b_{ij} + (\sigma_i\cdot\sigma_j)\,c_{ij}]$$

$$V_{3ij} = (\tau_i\cdot\tau_j)\,[l_{ij} + (\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,m_{ij} + (\sigma_i\cdot\sigma_j)\,n_{ij}],$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{V}_{ij} = {} & \rho_{2i}(\tau_i\cdot\tau_j)\left[(\sigma_i\cdot\nabla_i)\left(-\frac{g_1g_2}{K_1}\varphi_{1ij}\right) + (\sigma_j\cdot\nabla_j)\left(-\frac{f_1f_2}{K_3}\varphi_{3ij}\right) + \right.\\ & \left. + (\sigma_i\cdot\sigma_j\wedge\nabla_j)\left(\frac{g_1'g_2'}{K_2}\varphi_{2ij}\right)\right] + \rho_{2j}(\tau_i\cdot\tau_j)\left[(\sigma_j\cdot\nabla_j)\left(-\frac{g_1g_2}{K_1}\varphi_{1ij}\right) + \right.\\ & \left. + (\sigma_i\cdot\nabla_i)\left(-\frac{f_1f_2}{K_3}\varphi_{3ij}\right) + (\sigma_i\cdot\sigma_j\wedge\nabla_j)\left(\frac{g_1'g_2'}{K_2}\varphi_{2ij}\right)\right] + \\ & + \rho_{1i}\rho_{3j}(\tau_i\cdot\tau_j)\left[(\sigma_j\cdot\nabla_j)\left(\frac{g_1'g_2'}{K_2}\varphi_{2ij}\right) + (\sigma_i\cdot\sigma_j\wedge\nabla_j)\left(\frac{g_1g_2}{K_1}\varphi_{1ij}\right)\right] + \\ & \rho_{1j}\rho_{3i}(\tau_i\cdot\tau_j)\left[(\sigma_i\cdot\nabla_i)\left(\frac{g_1'g_2'}{K_2}\varphi_{2ij}\right) + (\sigma_i\cdot\sigma_j\wedge\nabla_j)\left(\frac{g_1g_2}{K_1}\varphi_{1ij}\right)\right] + \\ & + \frac{f_1'f_2'}{2K_4}\,[(\tau_i\rho_{3i})\cdot\dot{\tau}_j + \dot{\tau}_j\cdot(\tau_i\rho_{3i}) + \dot{\tau}_i\cdot(\tau_j\rho_{3j}) + (\tau_j\rho_{3j})\cdot\dot{\tau}_i]\,\varphi_{4ij} + \\ & + \frac{g_1'g_2'}{2K_2}\,[(\tau_i\sigma_i)_t\cdot(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j) + (\tau_j\rho_{3j}\sigma_j)\cdot(\tau_i\sigma_i)_t + (\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)\cdot(\tau_j\sigma_j)_t + \\ & + (\tau_j\sigma_j)_t\cdot(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)]\,\varphi_{2ij}.\end{aligned}$$

$\overset{2}{V}_{ij}$ 可分爲下列十二項:

(1) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i)_t\cdot(\tau_j)_t + (\tau_j)_t\cdot(\tau_i)_t]\,\bar{a}_{ij}$,

(2) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\sigma_i)_t\cdot(\tau_j\sigma_j)_t + (\tau_j\sigma_j)_t\cdot(\tau_i\sigma_i)_t]\,\bar{c}_{ij}$,

(3) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t\,(\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t + (\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t\,(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t]\,\bar{b}_{ij}$,

(4) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\rho_{3i})_t\cdot(\tau_j\rho_{3j})_t + (\tau_j\rho_{3j})_t\cdot(\tau_i\rho_{3i})_t]\,\bar{l}_{ij}$,

(5) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)_t\cdot(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j)_t + (\tau_j\rho_{3j}\sigma_j)_t\cdot(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)_t]\,\bar{n}_{ij}$,

(6) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t\,(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t + (\tau_j\rho_{3j}\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t\,(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t]\,\bar{m}_{ij}$,

(7) $\frac{1}{2}\,[(\tau_i\rho_{1i})\cdot(\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t + (\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t\,(\tau_i\rho_{1i}) + (\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t\,(\tau_j\rho_{1j}) + {}$

$+ (\tau_j\rho_{1j})\,(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t]\,b_{ij}$,

(8) $\frac{1}{2}[(i\tau_i\rho_{2i})\cdot(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t+(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_t(i\tau_i\rho_{2i})+$

$+(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t(i\tau_j\rho_{2j})+(i\tau_j\rho_{2j})(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})_t]\,m_{ij},$

(9) $\frac{1}{2}[\dot{\tau}_i\cdot\dot{\tau}_j+\dot{\tau}_j\cdot\dot{\tau}_i]\,d_{ij},$

(10) $-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{d}{dt}(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)\right]\cdot\left[\frac{d}{dt}(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j)\right]+\right.$

$\left.+\left[\frac{d}{dt}(\tau_j\rho_{3j}\sigma_j)\right]\cdot\left[\frac{d}{dt}(\tau_i\rho_{3i}\sigma_i)\right]\right\}m_{ij},$

(11) $\rho_{1i}\rho_{1j}(\tau_i\cdot\tau_j)\,[g_1'^2\varphi_{2ij}-g_1^2(\sigma_i\cdot\sigma_j)\,\varphi_{1ij}],$

(12) $\rho_{2i}\rho_{2j}(\tau_i\cdot\tau_j)\left[-\left(\frac{g_2^2}{K_1^2}+\frac{g_2'^2}{K_2^2}\right)\delta^3(x_i-x_j)-(\sigma_i\cdot\sigma_j)\,g_2^2\varphi_{1ij}+g_2'^2\varphi_{2ij}+\right.$

$\left.+g_2^2\varphi_{1ij}-f_1^2\varphi_{3ij}\right];$

其中

$$a_{ij}=g_1^2\varphi_{1ij},\qquad b_{ij}=-\frac{g_1'^2}{K_2^2}\varphi_{2ij}-\frac{f_2^2}{K_3^2}\varphi_{3ij},\qquad c_{ij}=-g_1'^2\varphi_{2ij},$$

$$l_{ij}=-f_1'^2\varphi_{4ij},\qquad m_{ij}=\frac{g_2^2}{K_1^2}\varphi_{1ij}+\frac{g_2'^2}{K_2^2}\varphi_{2ij},\qquad n_{ij}=g_2^2\varphi_{1ij},$$

$$d_{ij}=-\frac{g_1^2}{K_1^2}\varphi_{1ij}-\frac{f_2'^2}{K_4^2}\varphi_{4ij}.$$

倘有 $\bar{a}_{ij}=g_1^2\bar{\varphi}_{1ij}$, $\bar{l}_{ij}=-f_1'^2\bar{\varphi}_{4ij}$ 等等.

二. 簡化到非相對論近似式後的勢能形式

包含相互作用 V 的核子集合的相對論方程,呈以下形式:

$$E\Psi=H\Psi=\left\{\sum_{K=1}^{N}[c(\alpha_k\cdot P_k)+c^2\rho_{3k}M_k]+V\right\}\Psi.$$

在簡化計算中 α, ρ 代以下列算符:

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&\sigma\\\sigma&0\end{pmatrix},\quad \rho_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \rho_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \rho_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

我們用“大”“小”符號來區分矩陣分量,規定如下:

例如: $(\rho_2)_{大小}=-i$, $(\rho_2)_{小小}=(\rho_2)_{大大}=0$.

又：
$$(V\Psi)_{\mu\nu}=\sum_{\mu'\nu'}V_{\mu\nu,\mu'\nu'}\Psi_{\mu'\nu'}.$$

用 μ, μ' 標誌 ρ_i 之"大"或"小"，用 ν, ν' 標誌 ρ_j 之"大"或"小"。例如：
$$V=\rho_{3i}\rho_{2j} \text{ 時}, \quad V_{\text{大小},\text{大大}}=(\rho_{3i})_{\text{大大}}(\rho_{2j})_{\text{小大}}.$$

命
$$\Psi=\psi e^{-NiMc^2t/\hbar}, \quad M=\frac{M_N+M_P}{2},$$

則
$$E\Psi=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi=e^{-NiMc^2t/\hbar}[NMC^2+E]\psi.$$

把它代入相對論方程中，取矩陣分量，如忽略 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 數量級以上各項，則得

$$[1]\quad E\psi_{\text{大}}=\sum_k C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_k+V_{\text{大},\text{大}}\psi_{\text{大}}+\sum_k\left[V_{\text{大},k}\psi_k+\sum_{k'(<k)}V_{\text{大},kk'}\psi_{kk'}\right]+$$
$$+\sum_k\tau_{3k}\frac{M_N+M_P}{2}C^2\psi_{\text{大}},$$

$$[2]\quad (2MC^2+E)\psi_k=C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_{\text{大}}+\sum_{k'(\neq k)}C(\sigma_{k'}\cdot P_{k'})\psi_{kk'}+V_{k,\text{大}}\psi_{\text{大}}+$$
$$+\sum_{k'}V_{k,k'}\psi_{k'}+\sum_{k'>k''}V_{k,k'k''}\psi_{k'k''}\qquad(k=1\cdots N),$$

$$[3]\quad (4MC^2+E)\psi_{kk'}=C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_{k'}+C(\sigma_{k'}\cdot P_{k'})\psi_k+V_{kk',\text{大}}\psi_{\text{大}}\quad(k\neq k').$$

其中 $\psi_{\text{大}}$ 等於所有粒子都取大分量，ψ_k 等於第 k 個粒子取小分量其他粒子都取大分量。$\psi_{kk'}$ 等於第 k 及 k' 粒子取小分量其他粒子都取大分量。$V_{\text{大},k}$ 等於第 k 粒子取大小分量其他粒子都取大大分量。$V_{kk',\text{大}}$ 等於第 k 及 k' 粒子取小大分量其他粒子都取大大分量。

在按 $\left(\frac{v}{c}\right)$ 數量級展開求近似解時，我們注意到；

$P\sim\left(\frac{v}{c}\right)^1 MC$ 數量級，E 和 $V\sim\left(\frac{v}{c}\right)^2 MC^2$ 數量級

而質量改正項 $\frac{M_N-M_P}{2}c^2$ 在 $\left(\frac{v}{c}\right)^2 MC^2$ 數量級以下。

甲）零級近似：

$$[1]^0\qquad E\psi_{\text{大}}=\sum_k C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_k+V_{\text{大},\text{大}}\psi_{\text{大}},$$

$$[2]^0\qquad 2MC^2\psi_k=C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_{\text{大}},$$

$$[3]^0\qquad 4MC^2\psi_{kk'}=0,$$

$$\therefore \quad E\psi_{大}=\left[\frac{1}{2M}\sum_{k}P_{k}^{2}+V_{大,大}\right]\psi_{大}.$$

乙）一級近似：

$$[1]^1 \qquad E\psi_{大}=\sum_{k}C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_k+V_{大,大}\psi_{大}+\sum_{k}V_{大,k}\psi_k,$$

$$[2]^1 \qquad 2MC^2\psi_k=C(\sigma_k\cdot P_k)\psi_{大}+V_{k,大}\psi_{大},$$

$$[3]^1 \qquad 4MC^2\psi_{kk'}=0.$$

$$\therefore\ E\psi_{大}=\left[\frac{1}{2M}\sum_{k}P_k^2+V_{大,大}\right]\psi_{大}+\frac{1}{2MC}\sum_{k}\left[(\sigma_k\cdot P_k)V_{k,大}+V_{大,k}(\sigma_k\cdot P_k)\right]\psi_{大}.$$

丙）二級近似：把 [2] 式左邊的 $E\psi_k$ 及 [2]，[3] 式右邊的 ψ_k 用零級近似代入,算出左邊的 ψ_k 和 $\psi_{kk'}$ 再代入 [1] 中，結果如下：

$$\begin{aligned}E\psi_{大}=&\left[\frac{1}{2M}\sum_{k}P_k^2+V_{大,大}\right]\psi_{大}+\frac{1}{2MC}\sum_{k}\left[V_{大,k}(\sigma_k\cdot P_k)+(\sigma_k\cdot P_k)V_{k,大}\right]\psi_{大}+\\&+\frac{1}{4M^2C^2}\left\{\sum_{k\neq k'}(\sigma_k\cdot P_k)V_{k,k'}(\sigma_{k'}\cdot P_{k'})+\sum_{k}(\sigma_k\cdot P_k)(V_{k,k}-V_{大,大})(\sigma_k\cdot P_k)+\right.\\&\left.+\sum_{k>k'}\left[V_{大,kk'}(\sigma_k\cdot P_k)(\sigma_{k'}\cdot P_{k'})+(\sigma_{k'}\cdot P_{k'})(\sigma_k\cdot P_k)V_{kk',大}\right\}\psi_{大}+\\&+\frac{1}{2MC^2}\left[\sum_{k}V_{大,k}V_{k,大}+\frac{1}{2}\sum_{k>k'}V_{大,kk'}V_{kk',大}\right]\psi_{大}+\\&+\sum_{k}\tau_{3k}\frac{M_N-M_P}{2}C^2\psi_{大}-\frac{1}{8M^3C^2}\sum_{P}P_k^4\psi_{大}.\end{aligned}$$

不難看出，算到兩級近似時上式恰爲兩個粒子簡化到 $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ 程度時的簡單推廣.

把上節中的 $\overset{0}{V}$ 代入簡化後的零級近似式中,得到簡化後的勢能爲 $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V_{ij}$:

$$\begin{aligned}V_{ij}=(\tau_i\cdot\tau_j)&\left\{(g_1^2\varphi_{1ij}-f_1'^2\varphi_{4ij})+\frac{1}{3}(\sigma_i\cdot\sigma_j)[2g_2^2\varphi_{1ij}+f_2^2\varphi_{3ij}-(g_2'^2+2g_1'^2)\varphi_{2ij}]+\right.\\&+S_{ij}\left[(g_1'^2-g_2'^2)\left(\frac{1}{K_2^2r_{ij}^2}+\frac{1}{K_2r_{ij}}+\frac{1}{3}\right)\varphi_{2ij}+f_2^2\left(\frac{1}{K_3^2r_{ij}^2}+\frac{1}{K_3r_{ij}}+\frac{1}{3}\right)\varphi_{3ij}-\right.\\&\left.\left.-g_2^2\left(\frac{1}{K_1^2r_{ij}^2}+\frac{1}{K_1r_{ij}}+3\right)\varphi_{1ij}\right]\right\},\end{aligned}$$

其中: $$S_{ij}=3\frac{(\sigma_i\cdot r_{ij})(\sigma_j\cdot r_{ij})}{r_{ij}^2}-(\sigma_i\cdot\sigma_j).$$

這個結果和摩勒-羅森費德用正則變換法所導出的核子間的靜力作用[2]完全一致.

把上節中的 $\overset{0}{V}$ 及 $\overset{1}{V}$ 代入簡化後的一級近似式中，所得的薛定諤方程如下：

$$E\psi=\frac{1}{2M}\sum_{2}P_i^2\psi+\sum_{i>j}V_{ij}\psi+\frac{i}{3\hbar C}\sum_{i>j>k}\left\{\left[V_{ik},(\tau_i\cdot\tau_j)\frac{f_1'f_2'}{K_4}\varphi_{4ij}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\tau_i\cdot\tau_j)(\sigma_i\cdot\sigma_j)\frac{g_1'g_2'}{K_2}\varphi_{2ij}\right]_-+\text{上式中 } i,j,k \text{ 替換之其他五項}\right\}\psi+$$

$$+\frac{1}{MC}\sum_{i>j}(\tau_i\cdot\tau_j)\left\{-\hbar\frac{f_1f_2}{K_3}(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\varphi_{3ij}-\hbar\frac{g_1g_2}{K_1}[\nabla^2+\right.$$

$$+(\sigma_i\cdot\sigma_j)\nabla^2+(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)]\varphi_{1ij}+\frac{2\hbar}{i}\frac{g_1'g_2'}{K_2}[(\sigma_i\cdot\sigma_j)\nabla^2+$$

$$+(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)]\varphi_{2ij}+\frac{g_1g_2}{K_1}[(\sigma_i+\sigma_j)\wedge\nabla_i]\varphi_{1ij}\cdot(P_j-P_i)+$$

$$\left.+\frac{g_1'g_2'}{K_2}[2(\sigma_i\sigma_j)\nabla_i-(\sigma_i\cdot\nabla_i)\sigma_j+(\sigma_j\cdot\nabla_j)\sigma_i]\varphi_{2ij}\cdot(P_i-P_j)\right\}\psi.$$

在以上的結果中，如果只取贋標量場或只取矢量場時則和摩勒-羅森費德所算出的核子間非靜力作用的結果完全一致．但只取標量場時上式中的一級勢能 $\overset{1}{V}=0$，而只取贋矢量場時，根據上式結果：

$$\overset{1}{V}=\frac{-2}{3\hbar C}\frac{g_1'g_2'(g_2'^2-g_1'^2)}{K_2^3}\sum_{i>j>k}\left\{[(\tau_k\cdot\tau_i)(\sigma_i\cdot\sigma_j\wedge\nabla_j)(\sigma_k\cdot\nabla_k)\varphi_{2kj}+\right.$$

$$\left.+(\tau_i\cdot\tau_j\wedge\tau_k)(\sigma_i\cdot\nabla_j)(\sigma_k\cdot\nabla_k)\varphi_{2jk}]\varphi_{2ij}+\text{上式中 } i,j,k \text{ 替換之其他五項}\right\}+$$

$$+\frac{1}{MC}\sum_{i>j}(\tau_i\cdot\tau_j)\left\{\frac{2\hbar}{i}\frac{g_1'g_2'}{K_2}[(\sigma_i\cdot\sigma_j)\nabla^2+(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)]\varphi_{2ij}+\right.$$

$$\left.+\frac{g_1'g_2'}{K_2}[2(\sigma_i\cdot\sigma_j)\nabla_i-(\sigma_i\cdot\nabla_i)\sigma_j+(\sigma_j\cdot\nabla_j)\sigma_i]\varphi_{2ij}\cdot(P_i-P_j)\right\},$$

其中有三體力的出現．在標量及贋矢量情形下的結果和摩勒-羅森費德有所不同，這是由於摩勒-羅森費德[2]在計算非靜力作用時略去 $\dot{\tau}$ 及 $\dot{\sigma}$ 所引起．

如果認為每種場和核子只有一種耦合，則微擾項 $\overset{1}{V}$ 等於零，因此我們需要把上節中共包含十二項的 $\overset{2}{V}$ 代入簡化到兩次近似的非相對論方程中．我們用以下例子來說明簡化計算的方法．

$\frac{1}{2}[(A_i)_t\cdot(A_j)_t+(A_j)_t\cdot(A_i)_t]\varphi_{ij}$ 的簡化，其中 A_i 為 τ_i 和 σ_i 的函數，A_j 為 τ_j 和 σ_j 的函數．由於

$$(A_j)_t=\frac{i}{\hbar}\rho_{1j}[(\sigma_j\cdot P_j),A_j]_-+\rho_{1j}A_j(\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})+\frac{i}{\hbar C}[\overset{0}{V}_{ij},A_j]_-+$$

$$+\frac{i}{\hbar C}\sum_{k(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{jk},\ A_j]_-,$$

我們可以分成以下四部分進行簡化計算:

(1) $$\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\left\{[\overset{0}{V}_{ij},\ A_i]_-+\sum_{k(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{ik},\ A_i]_-\right\}\cdot\left\{[\overset{0}{V}_{ij},\ A_j]_-+\sum_{k(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{jk},\ A_j]_-\right\}\varphi_{ij}+$$

$$+\text{上項 } i\,j \text{ 對調}.$$

這一部分只包含 ρ_3, 在簡化時只有 $V_{大,大}$ 不等於零, 並且只出現在簡化方程的零級近似項中. 簡化後的結果如下:

$$V_{大,大}=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\sum_{i>j}\left\{\left[\sum_{k(\neq i)}[V_{ik},\ A_i]_-\right]\cdot\left[\sum_{k(\neq j)}[V_{jk},\ A_j]_-\right]+\text{上項 } i\,j \text{ 對調}\right\}\varphi_{ij}$$

$$\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\sum_{i>j}(A_i, A_j)_{+t}\,\varphi_{ij},$$

其中包含兩體力、三體力及四體力.

(2) $$\frac{1}{2}\rho_{1i}\rho_{1j}\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_i\cdot P_i), A_i]_-+A_i(\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})\right\}\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_j\cdot P_j), A_j]_-+A_j(\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})\right\}\varphi_{ij}+$$

$$+\text{上項 } i\,j \text{ 對調}=\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\rho_{1i}\rho_{1j}[(\sigma_i\cdot P_i),\ \ [(\sigma_j\cdot P_j),\ \ A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_-$$

這一部分只出現在簡化式的兩級近似項中.

(3) $$\frac{1}{2}\rho_{1i}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_i\cdot P_i), A_i]_-+A_i(\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})\right\}[\overset{0}{V}_{ij}, A_j]_-\,\varphi_{ij}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)[\overset{0}{V}_{ij}, A_i]_-\cdot\rho_{1j}\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_j\cdot P_j), A_j]_-+A_j(\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})]\right\}\varphi_{ij}+$$

$$+\text{上兩項 } i\,j \text{ 對調}=\frac{1}{2C}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\left\{[(\sigma_i\cdot P_i), A_i\varphi_{ij}]_-\cdot[\rho_{1i}\overset{0}{V}_{ij}, A_j]_-+\right.$$

$$\left.+[\overset{0}{V}_{ij}\rho_{1j}, A_i]_-\cdot[(\sigma_j\cdot P_j), A_j\varphi_{ij}]_-+i\,j\text{ 對調項}\right\}.$$

這一部分只需代入簡化式的一級近似項內, 即代入

$$\frac{1}{2MC}\sum_k[V_{大,k}(\sigma_k\cdot P_k)+(\sigma_k\cdot P_k)V_{k,大}].$$

結果得:

$$\frac{1}{4MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_{i>j}\left\{[(\sigma_i\cdot P_i), (A_i\varphi_{ij}, A_j)_{-0}]_++[(\sigma_i\cdot P_i), (A_i\varphi_{ij}, A_j)_{-3}]_-+i\,j\text{ 對調項}\right\};$$

其中

$$(A_i\varphi_{ij}, A_j)_{\pm 0} \equiv [(\sigma_i\cdot P_i), A_i\varphi_{ij}]_\pm\cdot[V_{0ij}, A_j]_- + [V_{0ij}, A_j]_-\cdot[(\sigma_i\cdot P_i), A_i\varphi_{ij}]_\pm,$$

$$(A_i\varphi_{ij}, A_j)_{\pm 3} \equiv [(\sigma_i\cdot P_i), A_i\varphi_{ij}]_\pm\cdot[V_{3ij}, A_j]_- - [V_{3ij}, A_j]_-\cdot[(\sigma_i\cdot P_i), A_i\varphi_{ij}]_\pm.$$

(4) $$\frac{1}{2}\rho_{1i}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_i\cdot P_i), A_i]_- + A_i(\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i})\right\}\cdot\sum_{K(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{jk}, A_j]_-\varphi_{ij} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)\sum_{K(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{ik}, A_i]_-\cdot\rho_{1j}\left\{\frac{i}{\hbar}[(\sigma_j\cdot P_j), A_j]_- + A_j(\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})\right\}\varphi_{ij} + ij\text{ 對調項}$$

$$= \frac{1}{2C}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\left\{\rho_{1i}\sum_{k(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{jk}, [(\sigma_i\cdot P_i), A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_- +\right.$$

$$\left. +\rho_{1j}\sum_{K(\neq i,j)}[\overset{0}{V}_{ik}, [(\sigma_j\cdot P_j), A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_- + ij\text{ 對調}\right\}.$$

這一部分同樣代入簡化式的一次近似項中，因爲

$$[(\sigma_i\cdot P_i), [V_{jk}, [(\sigma_i\cdot P_i), A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_-]_+ = [V_{jk}, [P_i^2, A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_-,$$

所以簡化後的結果爲：

$$\frac{1}{6MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_{i>j>k}\left\{[V_{jk}, [P_i^2, A_iA_j\varphi_{ij}]_-]_- + ijk\text{ 對調之其他五項}\right\}.$$

把 $\overset{2}{V}$ 中的十二項按類似方法簡化以後，最後結果的方程如下：

$$E\psi = \left[\frac{1}{2M}\sum_i P_i^2 - \frac{1}{8M^3C^2}\sum_i P_i^4 + \frac{M_N - M_P}{2}C^2\sum_i\tau_{3i}\right]\psi + \sum_{i>j}V_{ij}\psi + \overset{(2)}{V}\psi.$$

$\overset{2}{V}$ 可分爲以下四個部分：

$$\overset{(2)}{V} = [1] + [2] + [3] + [4].$$

$$[1] = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\sum_{i>j}\left\{(\tau_i,\tau_j)_{+t}(\bar{a}_{ij} + \bar{l}_{ij} + d_{ij}) + (\tau_i\sigma_i, \tau_j\sigma_j)_{+t}(\bar{c}_{ij} + \bar{n}_{ij} - m_{ij})\right.$$

$$\left. + (\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i}, \tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi j})_{+t}(\bar{b}_{ij} + \bar{m}_{ij})\right\},$$

其中

$$(A_i; A_j)_{+t} = \left\{\sum_{k(\neq i)}[V_{ik}, A_i]_-\right\}\left\{\sum_{k(\neq j)}[V_{jk}, A_j]_-\right\} + ij\text{ 對調}.$$

$$[2] = \frac{1}{4M^2C^2}\left\{\sum_{i\neq j}[(\sigma_i\cdot P_i)(V_{1ij} + V_{2ij})(\sigma_i\cdot P_i) - 2(\sigma_i\cdot P_i)V_{3ij}(\sigma_i\cdot P_i)] +\right.$$

$$\left. + \sum_{i>j}[(\sigma_i\cdot P_i)(\sigma_j\cdot P_j), (V_{1ij} - V_{2ij})]_+\right\} + \frac{1}{4MC^2}\sum_{i>j}(V_{1ij} - V_{2ij})^2,$$

其中

$$V_{1ij}=\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2[(\sigma_i\cdot P_i),[(\sigma_j\cdot P_j),\bar{V}_{0ij}]_-]_-+\frac{i}{\hbar}(\tau_i\cdot\tau_j)\Big\{[(\sigma_i\cdot P_i),(\sigma_i\cdot\nabla_i)\,b_{ij}]_-+$$

$$+[(\sigma_j\cdot P_j),(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,b_{ij}]_-\Big\}+(\tau_i\cdot\tau_j)\,[g_1'^2\varphi_{2ij}-g_1^2(\sigma_i\cdot\sigma_j)\,\varphi_{1ij}],$$

$$V_{2ij}=-\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2[(\sigma_i\cdot P_i),[(\sigma_j\cdot P_j),\bar{V}_{3ij}]_+]_++$$

$$+\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2(\tau_i\cdot\tau_j)\,[(\sigma_i\cdot P_i),[(\sigma_j\cdot P_j),(\sigma_i\cdot\sigma_j)]_+]_+\,m_{ij}+$$

$$+\frac{i}{\hbar}(\tau_i\cdot\tau_j)\Big\{[(\sigma_i\cdot P_i),(\sigma_i\cdot\nabla_i)\,m_{ij}]_++[(\sigma_j\cdot P_j),(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,m_{ij}]_+\Big\}+$$

$$+(\tau_i\cdot\tau_j)\,[\nabla^2 m_{ij}-f_1^2\varphi_{3ij}-(\sigma_i\cdot\sigma_j)\,g_2^2\varphi_{1ij}],$$

$\bar{V}_{0ij}$ 及 $\bar{V}_{3ij}$ 爲 V_{0ij}, V_{3ij} 中之 φ_{ij} 換以 $\bar{\varphi}_{ij}$.

$$[3]=\frac{1}{4MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_{i>j}\{[(\sigma_i\cdot P_i),(\tau_i\bar{a}_{ij},\tau_j)_{-0}+(\tau_i\sigma_i\bar{c}_{ij},\tau_j\sigma_j)_{-0}+$$

$$+(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i}\bar{b}_{ij},\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi i})_{-0}]_++[(\sigma_i\cdot P_i),(\tau_i\bar{a}_{ij},\tau_j)_{-3}+(\tau_i\sigma_i\bar{c}_{ij},\tau_i\sigma_j)_{-3}+$$

$$+(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i}\bar{b}_{ij},\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi i})_{-3}]_-+[(\sigma_i\cdot P_i),(\tau_i\bar{l}_{ij},\tau_j)_{+0}+(\tau_i\sigma_i\bar{n}_{ij},\tau_j\sigma_j)_{+0}+$$

$$+(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i}\bar{m}_{ij},\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi i})_{+0}-(\tau_i\sigma_i,\tau_j\sigma_j)_{+0}\,m_{ij}]_-+[(\sigma_i\cdot P_i),(\tau_i\bar{l}_{ij},\tau_j)_{+3}+$$

$$+(\tau_i\sigma_i\bar{n}_{ij},\tau_j\sigma_j)_{+3}+(\tau_i\sigma_i\cdot\nabla_{\varphi i}\bar{m}_{ij},\tau_j\sigma_j\cdot\nabla_{\varphi i})_{+3}-(\tau_i\sigma_i,\tau_j\sigma_j)_{+3}\,m_{ij}]_++$$

$$+\text{以上 } ij \text{ 對調}\}+\frac{1}{4MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{i>j}\{[(\sigma_i\cdot P_i),[\tau_i,[V_{0ij},\tau_j(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,b_{ij}]_-]_+]_++$$

$$+[(\sigma_i\cdot P_i),[\tau_i,[V_{3ij},\tau_j(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,b_{ij}]_-]_-]_--[(\sigma_i\cdot P_i),[\tau_i,[V_{0ij},\tau_j(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,m_{ij}]_-]_+]_--$$

$$-[(\sigma_i\cdot P_i),[\tau_i,[V_{3ij},\tau_j(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,m_{ij}]_-]_-]_++ij\text{ 對調}\},$$

其中

$$(A_i\varphi_{ij},A_j)_{\pm 0}=[(\sigma_i\cdot P_i),A_i\varphi_{ij}]_\pm\cdot[V_{0ij},A_j]_-+[V_{0ij},A_j]_-\cdot[(\sigma_i\cdot P_i),A_i\varphi_{ij}]_\pm$$

$$(A_i\varphi_{ij},A_j)_{\pm 3}=[(\sigma_i\cdot P_i),A_i\varphi_{ij}]_\pm\cdot[V_{3ij},A_j]_--[V_{3ij},A_j]_-\cdot[(\sigma_i\cdot P_i),A_i\varphi_{ij}]_\pm.$$

$$[4]=\frac{1}{6MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_{i>j>k}\{[V_{ik},[P_i^2,\bar{V}_{ij}]_-]_--[(\sigma_i\cdot P_i),[(\sigma_i\cdot P_i),[V_{jk},(\tau_i\cdot\tau_j)\times$$

$$\times(\sigma_i\cdot\sigma_j)]_-]_+\,m_{ij}]_++\text{上式 } ijk \text{ 替換之其他五項}\}+$$

$$+\frac{1}{6MC^2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{i>j>k}\{[(\sigma_i\cdot P_i),[V_{jk},(\tau_i\cdot\tau_j)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,b_{ij}]_-]_+-$$

$$-[(\sigma_i\cdot P_i),[V_{jk},(\tau_i\cdot\tau_j)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,m_{ij}]_-]_-+\text{上式 } ijk \text{ 替換之其他五項}\}.$$

在以上的普遍式中,如果只取贋標量場的贋標量耦合情形,則結果爲:

$$\overset{(2)}{V} = -\frac{\hbar^2 f_1^2}{4M^2C^2}\sum_{i>j}(\tau_i\cdot\tau_j)(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,\varphi_{3ij}+\frac{f_1^4}{4MC^2}\sum_{i>j}(\tau_i\cdot\tau_j)^2\varphi_{3ij}^2,$$

其中第一項和克萊因[3] 等人用微擾法算出的 $\overset{(2)}{V}$ 相同,第二項和 f_1^4 成正比的排斥中心力項則係從相對論項簡化而來.

如果我們只取矢量場的矢量耦合情形,則結果 $\overset{(2)}{V}$ 除有兩體力部分:

$$\frac{1}{4M^2C^2}\sum_{i>j}[(\sigma_i\cdot P_i),[(\sigma_j\cdot P_j),V_{1ij}]_+]_+ +\frac{1}{4MC^2}\sum_{i>j}V_{1ij}^2+$$
$$+8\left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2\sum_{i>j}[3+2(\tau_i\cdot\tau_j)]\,a_{ij}^2\,(d_{ij}+\bar a_{ij}),$$

其中

$$V_{1ij}=(\tau_i\cdot\tau_j)\,[(\sigma_i\cdot\nabla_i)(\sigma_j\cdot\nabla_j)\,\bar a_{ij}-(\sigma_i\cdot\sigma_j)\,a_{ij}],\quad a_{ij}=g_1^2\varphi_{1ij},\quad d_{ij}=-\frac{1}{K_1^2}a_{ij},$$

還有三體力部分:

$$4i\left(\frac{i}{\hbar C}\right)^2\sum_{i>j}\sum_{k(\neq i,j)}(\tau_i\cdot\tau_j\wedge\tau_k)(a_{jk}-a_{ik})\,a_{ij}\,(d_{ij}+\bar a_{ij})-$$
$$-8\left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2\sum_{i>j}(\tau_i\cdot\tau_j)\sum_{k(\neq i,j)}a_{ik}\,a_{jk}\,(d_{ij}+\bar a_{ij})+$$
$$+\frac{1}{6MC^2}\left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2\sum_{i>j>k}\{[(\tau_j\cdot\tau_K),(\tau_i\cdot\tau_j)]_-\,a_{jk}\,[P_i^2,\bar a_{ij}]_-+ i\,j\,k\ \text{對調的其他五項}\}$$

和四體力部分:

$$\frac{2}{\hbar^2C^2}\sum_{i>j}\sum_{k\neq k'}[(\tau_i\wedge\tau_{k'})\cdot(\tau_j\wedge\tau_k)\,a_{ik'}\,a_{jk}+(\tau_j\wedge\tau_{k'})(\tau_i\wedge\tau_k)\,a_{jk'}\,a_{ik}]\,(d_{ij}+\bar a_{ij}),$$

由於結果比較複雜,進一步的討論尚待以後的工作.

本工作爲彭桓武教授指導,特此誌謝.

附 錄

$(K^2+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2)\,\varphi=\rho$ 的推遲解爲:1)

$$\varphi(\vec x,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{\rho(\vec r,t-R/c)}{R}-K\int_0^\infty\rho\left(\vec r,t-\frac{\sqrt{\eta^2+R^2}}{C}\right)\frac{J_1(K\eta)}{\sqrt{\eta^2+K^2}}d\eta\right]d^3r,\ R=|\vec x-\vec r|.$$

1) 參閱 [1], 第 105 頁第 (20, 18) 式.

令 $z=K\eta$，先將 J_1 改變爲 $-\frac{dJ_0}{dz}$，進行部分積分，再利用 $\frac{d}{dz}[z^n J_n(z)]=$ $=z^n J_{n-1}(z)$ $(n\geqslant 1)$，將上式連續對 z 部分積分後得：

$$\varphi(\vec{x},t)=\int d^3 r\left\{\frac{K(-1)^n}{4\pi}\int_0^\infty z^n J_{n-1}(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left[\frac{\rho\left(r,t-\frac{\sqrt{z^2+K^2R^2}}{KC}\right)}{\sqrt{z^2+K^2R^2}}\right]dz\right.$$

上式當 $n=2$ 時，我們用泰勒級數按 $\frac{\sqrt{z^2+K^2R^2}}{KC}$ 之冪次展開 ρ 到 $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$：

$$\rho\left(r,t-\frac{\sqrt{z^2+K^2R^2}}{KC}\right)=\rho(r,t)-\frac{\sqrt{z^2+K^2R^2}}{KC}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{2!}\frac{z^2+K^2R^2}{K^2C^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\cdots.$$

代入上式後得：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int\left\{F_0(R)\,\rho(\vec{r},t)+F_1(R)\frac{\partial\rho}{c\partial t}+F_2(R)\frac{\partial^2\rho}{c^2\partial t^2}\right\}d^3 r,$$

其中

$$F_0(R)=K\int_0^\infty z\,J_1(z)\frac{d}{dz}\frac{d}{zdz}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+K^2R^2}}\right]dz.$$

連續對 z 部分積分後[4]：

$$F_0(R)=-K\frac{J_0(z)}{\sqrt{z^2+K^2R^2}}\Bigg|_0^\infty-K\int_0^\infty\frac{J_1(z)}{\sqrt{z^2+K^2R^2}}dz=$$

$$=\frac{1}{R}-K\,I_{1/2}\left(\frac{KR}{2}\right)K_{1/2}\left(\frac{KR}{2}\right)=\frac{e^{-KR}}{R},$$

$$F_1(R)=\int_0^\infty z^2 J_1(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^2\left[-\frac{1}{c}\right]dz=0,$$

$$F_2(R)=\frac{1}{2!K}\int_0^\infty z^2 J_1(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^2\left[\sqrt{z^2+K^2R^2}\right]dz=$$

$$=-\frac{1}{2K}\int_0^\infty z^2 J_1(z)\,(z^2+K^2R^2)^{-3/2}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2K}\frac{(KR)^{1/2}}{2^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}K_{1/2}(KR)=-\frac{e^{-KR}}{2K}.$$

一般地，如果泰勒級數展到 $\frac{\partial^m\rho}{c^m\partial t^m}$ 數量級，則把此展開式代入 $n=m$ 的 $\varphi(\vec{x},t)$ 積分式內．結果 $\frac{\partial^{(2r-1)}\rho}{c^{(2r-1)}\partial t^{(2r-1)}}$ 前的係數 $F_{(2r-1)}$ 等於零，而

$$F_{2r'}(R)=K\int_0^\infty z^{2r}J_{2r-1}(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^{2r}\frac{(z^2+K^2R^2)^{\frac{2r-1}{2}}}{K^{2r}(2r)!}dz=$$

$$= \frac{(-1)^r (2r-1)^2 (2r-3)^2 \cdots 1^2}{(2r)!\, K^{2r}} \int_0^\infty \frac{z^{2r} J_{2r-1}(z)\, dz}{(z^2+K^2R^2)^{(r+\frac{1}{2})}} =$$

$$= \frac{(-1)^r K (2r-1)^2 (2r-3)^2 \cdots 1^2}{(2r)!\, K^{2r}} \frac{(KR)^{r-\frac{1}{2}} K_{r-\frac{1}{2}}(KR)}{2^{r-\frac{1}{2}} \Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)},$$

利用
$$z^{n+\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-z} \sum_{s=0}^{n} \frac{(n+s)!}{s!\,(n-s)!} \frac{z^{n-s}}{2^s},$$

結果
$$F_{2r}(R) = \frac{(-1)^r}{2K^{2r-1}} \frac{e^{-KR}}{r!} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r+s-1)!}{s!(r-s-1)!} \left(\frac{KR}{2}\right)^{(r-s-1)}.$$

近似到兩級程度時，推遲解的展開式爲：

$$\varphi(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \rho(\bar{r}, t) \frac{e^{-KR}}{R} d^3 r - \frac{1}{8\pi K} \int \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}, t)}{c^2 \partial t^2} e^{-KR} d^3 r, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|.$$

參 考 文 獻

[1] Иваненко и Соколов, Классическая теория поля, изд. 2—е Гл. IV. Гостехиздат, 1951.

[2] Mφller and Rosenfeld, *Det. Kgl. Danske Vid. Selskab. Math-fays. Meddel.* XVII, **8** (1940).

[3] Klein, *Phy. Rev.* **90** (1953), 1101.

[4] Watson, Theory of Bessel Function, 1945 年劍橋大學版第二版 434 頁 (2) 式, 435 頁 (3) 式及 80 頁 (12),(13) 式.

SOME HINT TO THE FORM OF NUCLEAR POTENTIAL OBTAINED FROM MESON FIELD THEORY

YEN SU

(Department of Physics, Peking University)

A nuclear potential based on meson field theory is obtained in analogy with the derivation of Breit interaction between two electrons, as given by Ivanenko and Sokolov. In this treatment the meson field is not quantized. All the four types of the current meson field and their mixture can be treated in the same way. The result has been further reduced by expansion in the v/c of the nucleon, the zeroth-order potental being identical with the static potential previously obtained by Mφller and Rosenfeld. The first-order potential will vanish if there is only one coupling constant for each type of meson field, in which case the expansion has been carried to the second order of v/c, retardation effects being also included. Many–body forces naturally appear.