

# 彈性薄壁桿件的動力穩定\*

解 伯 民

(清 華 大 學)

## 一. 前 言

由於技術的發展,結構的動力穩定問題得到了愈來愈廣泛的注意。最早研究這類問題的是別遼也夫<sup>[1]</sup>,他處理了鉸支桿件受週期性變化的縱向力的動力穩定問題,他把這個問題化為馬休(Mathieu)型的方程,因而比較容易地確定了穩定的條件。至於薄壁桿件的動力穩定問題,則是由果耳金布拉特<sup>[2]</sup>在 1947 年提出,這個問題在一般的場合是相當困難的,他研究了截面具有一個或二個對稱軸的鉸支桿件受作用於彎曲中心的縱向週期力的情形。如果截面具有二對稱軸,則基本方程化為三個獨立的馬休-希爾(Hill)型方程,因而比較容易建立穩定的條件。如果截面具有一個對稱軸,則基本問題化為解兩個聯立的具有週期性係數的二階微分方程。他利用了李雅普諾夫<sup>[3]</sup>關於運動穩定的理論和阿爾捷梅耶夫<sup>[4]</sup>的方法近似地建立了穩定的條件;不過他的方法計算甚繁,而所得的結果用來確定不穩定的區域時,也殊多不便。其後沙良<sup>[5]</sup>、索波列夫<sup>[6]</sup>等人又研究了這類問題的一個簡單情形,即鉸支窄條受作用在兩端的週期的力偶或偏心壓力的情形。最近鮑羅廷<sup>[7,8]</sup>用矩陣的方法研究了具有週期性係數的二階微分方程系,並應用於薄壁桿件的動力穩定問題,他的工作已經把這個問題推進了一大步,不過他的結果無法用來決定以“混合的”型式喪失穩定的不穩定區域。本文提出了一個建立薄壁桿件動力穩定條件的較簡單的近似方法,所得的結果用來決定實際意義最大的基本的不穩定區域(包括以混合型式喪失穩定的不穩定區域)時也特別方便。而且我們的方法還容易推廣到更一般的包括不只三個方程的微分方程系。另外在文中還指出了用伽遼金方法解決非兩端鉸支的薄壁桿件的動力穩定問題。

## 二. 基 本 方 程

考慮一彈性薄壁桿件受縱向週期力  $P(t)$  作用的情形。我們認為  $P(t)$  是由按平

\* 1956 年 2 月 3 日收到。

面規律分佈的應力所合成。截面的形狀如圖 1 所示,  $x, y$  是中心主軸, 彎曲中心  $O$  的坐標是  $(a_x, a_y)$ ,  $P$  作用點的坐標是  $(e_x, e_y)$ 。在  $P$  力作用下, 桿件已有位移, 對於任何一定的時刻  $t_0$ , 這些位移可按普通材料力學的方法求得。我們假設這些位移很小, 毋須考慮它們對  $P$  力作用的影響。再設  $\xi, \eta$  是桿件運動時彎曲中心沿  $x, y$  方向位移的增量,  $\theta$  是截面轉角, 則動力穩定問題的基本方程是<sup>[2,9]</sup>:

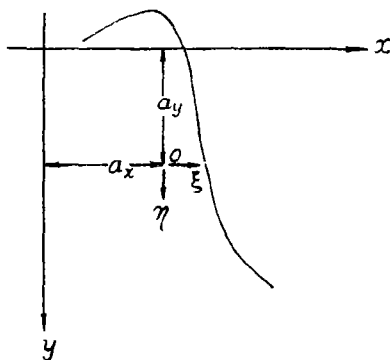


圖 1

$$\left. \begin{aligned} E J_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - P(e_y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, \\ E J_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\gamma J_x}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - P(e_x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{a_y \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P(e_y - a_y) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{a_x \gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P(e_x - a_x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + E J_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \\ - G J_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\gamma F r^2}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $F$  是截面面積,  $J_x, J_y$  是截面的中心主慣性矩,  $J_\omega$  是主扇慣性矩,  $\gamma$  是材料單位體積的重量,  $z$  是沿軸線方向的坐標(左手坐標系),  $t$  是時間,  $GJ_d$  是自由扭轉的剛度, 而

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{J_x + J_y}{F} + a_x^2 + a_y^2, \\ \beta_x &= \frac{1}{2J_y} \int_F x(x^2 + y^2) dF - a_x, \quad \beta_y = \frac{1}{2J_x} \int_F y(x^2 + y^2) dF - a_y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

對於兩端鉸支的桿件, 邊界條件是當  $z = 0$  及  $z = l$  ( $l$  是桿件的長度)時<sup>[1]</sup>:

$$\xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0.$$

於是可令

$$\xi = A_n(t) \sin \lambda_n z, \quad \eta = B_n(t) \sin \lambda_n z, \quad \theta = C_n(t) \sin \lambda_n z; \quad (3)$$

其中  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ . 將 (3) 式代入方程組 (1), 得

1) 爲了書寫簡單, 以後在外文字母上加撇表示對  $z$  微分, 加 “.” 表示對  $t$  微分。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{g} (F + J_y \lambda_n^2) \ddot{A}_n + (E J_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2) A_n + \frac{a_y \gamma F}{g} \ddot{C}_n + P(e_y - a_y) \lambda_n^2 C_n &= 0, \\ \frac{\gamma}{g} (F + J_x \lambda_n^2) \ddot{B}_n + (E J_x \lambda_n^4 - P \lambda_n^2) B_n - \frac{a_x \gamma F}{g} \ddot{C}_n - P(e_x - a_x) \lambda_n^2 C_n &= 0, \\ \frac{\gamma}{g} (F r^2 + J_\omega \lambda_n^2) \ddot{C}_n + [E J_\omega \lambda_n^4 + G J_d \lambda_n^2 - P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \lambda_n^2] C_n - \\ - \frac{a_x \gamma F}{g} \ddot{B}_n - P(e_x - a_x) \lambda_n^2 B_n + \frac{a_y \gamma F}{g} \ddot{A}_n + P(e_y - a_y) \lambda_n^2 A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

對於非兩端鉸支的桿件，爲了簡單起見，我們只用  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\theta$  的邊界條件都相同的情形來說明，這在實際中遇到得最多，例如一端固定及另一端鉸支，一端固定及另一端懸空等。應用伽達金方法，可令

$$\xi = A_n(t) Z(\lambda_n z), \quad \eta = B_n(t) Z(\lambda_n z), \quad \theta = C_n(t) Z(\lambda_n z); \quad (5)$$

其中  $Z(\lambda_n z)$  是  $(\lambda_n z)$  的函數，滿足指定的邊界條件，例如可取  $Z$  爲梁自由振動的函數或者多項式。(5)式中之  $\lambda_n$  爲一參數，當然也可以等於 1。再定義  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\theta$  的變分爲

$$\delta \xi = \delta A_n(t) Z, \quad \delta \eta = \delta B_n(t) Z, \quad \delta \theta = \delta C_n(t) Z. \quad (6)$$

將 (5) 式代入方程組 (1)，並將其第一、第二、第三式分別乘上  $\delta \xi$ 、 $\delta \eta$ 、 $\delta \theta$ ，然後沿全桿長度(即由  $z = 0$  到  $z = l$ ) 積分，我們就得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{g} (F e_{00} - J_y \lambda_n^2 e_{20}) \ddot{A}_n + (E J_y \lambda_n^4 e_{40} + P \lambda_n^2 e_{20}) A_n + \frac{a_y \gamma F}{g} e_{00} \ddot{C}_n - P(e_y - a_y) \lambda_n^2 e_{20} C_n &= 0, \\ \frac{\gamma}{g} (F e_{00} - J_x \lambda_n^2 e_{20}) \ddot{B}_n + (E J_x \lambda_n^4 e_{40} + P \lambda_n^2 e_{20}) B_n - \frac{a_x \gamma F}{g} e_{00} \ddot{C}_n + P(e_x - a_x) \lambda_n^2 e_{20} C_n &= 0, \\ \frac{a_y \gamma F}{g} e_{00} \ddot{A}_n - P(e_y - a_y) \lambda_n^2 e_{20} A_n - \frac{a_x \gamma F}{g} e_{00} \ddot{B}_n + P(e_x - a_x) \lambda_n^2 e_{20} B_n + \\ + \frac{\gamma}{g} (F r^2 e_{00} - J_\omega \lambda_n^2 e_{20}) \ddot{C}_n + [E J_\omega \lambda_n^4 e_{40} - G J_d \lambda_n^2 e_{20} + \\ + P(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \lambda_n^2 e_{20}] C_n &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad e_{00} = \int_0^l Z^2 dz, \quad e_{20} = \int_0^l \frac{d^2 z}{d(\lambda_n z)^2} Z dz,$$

$$e_{40} = \int_0^l \frac{d^4 Z}{d(\lambda_n z)^4} Z dz.$$

比較 (7) 與 (4) 容易看出，對於非兩端鉸支的桿件，在數學的表達上，與兩端鉸支的桿件並無本質上的差別，因此，以下只就鉸支桿件討論。

假設  $P(t)$  具有下列形式，即

$$P(t) = P_0 + \mu P_1(t), \quad (8)$$

其中  $P_0$  是常力,  $P_1(t)$  是週期變化的力, 週期為  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ( $\omega$  是頻率), 而  $\mu$  是一個小參數. 這樣, 方程組 (4) 是聯立的具有週期性係數的二階微分方程組, 為了讀者的方便起見, 我們先來簡略地敘述關於這類方程組的一些理論, 詳細情形可參考著作 [3] 及 [10].

### 三. 關於具有週期性係數的線性微分方程組

設運動的方程為:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{sk}(t) x_k, \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

其中  $p_{sk}$  是時間  $t$  的週期函數, 週期為  $T$ , 即  $p_{sk}(t+T) = p_{sk}(t)$ . 假設  $x_{sj}(t)$  ( $s, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $s$  表示函數的次序,  $j$  表示解的次序) 構成方程組 (9) 的一組基礎解, 那末在任何第  $j$  個解中以  $(t+T)$  代替  $t$ , 則仍然得到 (9) 的一個解, 因此,

$$x_{sj}(t+T) = a_{1j} x_{s1}(t) + a_{2j} x_{s2}(t) + \dots + a_{nj} x_{sn}(t); \quad (10)$$

其中  $a_{1j}, \dots, a_{nj}$  皆為常數.

方程

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

稱為 (9) 的特徵方程, 而它的根  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 稱為特徵根.

將 (11) 式化為法式:

$$\begin{vmatrix} \boxed{R_1} & & & \\ & \boxed{R_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{R_p} & & 0 \\ & & 0 & & & \end{vmatrix} = 0,$$

其中  $R_1, R_2, \dots, R_p$  是對應於初級因子的矩陣, 即  $R_k$  的形式是:

$$R_k = \begin{pmatrix} \rho_k - \rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 1 & \rho_k - \rho & 0 \\ 0 & 1 & \ddots \\ & & 1 & \rho_k - \rho \end{pmatrix}. \quad (12)$$

再設  $R_k$  的階數是  $\mu_k$ , 顯然

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n.$$

則方程組 (9) 對應於  $R_k$  有  $\mu_k$  個獨立的解, 它們的形式是:

$$x_{si}^{(k)}(t) = e^{\alpha_k t} P_{si}^{(k)}(t) \quad (13)$$

$$(s = 1, 2, \cdots, n; \quad i = 1, 2, \cdots, \mu_k; \quad k = 1, 2, \cdots, p).$$

其中  $\alpha_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k$  稱為特徵指數. 而

$$\left. \begin{aligned} P_{s1}^{(k)}(t) &= \frac{t^{\mu_k-1}}{(\mu_k-1)!} \varphi_{s1}^{(k)} + \frac{t^{\mu_k-2}}{(\mu_k-2)!} \varphi_{s2}^{(k)} + \cdots + t \varphi_{s, \mu_k-1} + \varphi_{s, \mu_k}, \\ P_{s2}^{(k)}(t) &= \frac{t^{\mu_k-2}}{(\mu_k-2)!} \varphi_{s1}^{(k)} + \frac{t^{\mu_k-3}}{(\mu_k-3)!} \varphi_{s2}^{(k)} + \cdots + \varphi_{s, \mu_k-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ P_{s\mu_k}^{(k)}(t) &= \varphi_{s1}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) 式中之  $\varphi$  皆係  $t$  之週期函數, 而週期為  $T$ . 換言之, 我們共有  $p$  組解, 每組包含  $\mu_k$  個獨立解. 因此有下述的定理<sup>[3]</sup>: “如果所有特徵根的模(絕對值)都小於 1, 則運動是穩定的; 如果在特徵根中, 即使只有一個的模大於 1, 則運動是不穩定的; 當特徵根中一部分的模小於 1, 另一部分的模等於 1 時(或者所有特徵根的模都等於 1 時), 如果這些模為 1 的根是單根, 或者雖是重根, 但其重數等於對應於該根的解之組數, 則運動是穩定的; 如果重根的重數大於對應於該根的解之組數, 則運動是不穩定的”.

李雅普諾夫又證明了: 如果方程組 (9) 具有正則形式, 即可以寫成

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k),$$

其中  $H(t, x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_k)$  是關於  $x_i, y_i$  的二次式, 而係數是  $t$  的週期函數, 週期為  $T$ , 則它的特徵方程是倒根方程. 換言之, 如果  $\rho_i$  是特徵根, 則  $\frac{1}{\rho_i}$  也必是特徵

根。又因方程組 (9) 的係數皆是實函數, 如果  $\rho_i$  是特徵根, 則其共軛值  $\bar{\rho}_i$  也必是特徵根。因此可以說正則系統的特徵根的分佈是對稱於單位圓和實軸的。由此, 對於正則系統, 必須它的所有特徵根之模皆等於 1, 運動才可能穩定。

#### 四. 問題的解法及例

我們首先來證明, 方程組 (4) 可以化為正則形式。在方程組 (4) 中令

$$A_n = p_1, \quad B_n = p_2, \quad C_n = p_3,$$

於是可將 (4) 寫成

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \dot{p}_j + \sum_{j=1}^3 b_{ij} p_j = 0, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (15)$$

其中  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  的意義由 (4) 式看得很清楚, 例如,

$$a_{11} = \frac{\gamma}{g} (F + J_y \lambda_n^2), \quad b_{11} = E J_y \lambda_n^4 - P \lambda_n^2,$$

即  $a_{ij}$  是常數,  $b_{ij}$  是  $t$  的週期函數, 而且顯然

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (16)$$

令

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \dot{p}_j = q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (17)$$

則 (15) 可以寫為

$$\dot{q}_i = - \sum_{j=1}^3 b_{ij} p_j. \quad (18)$$

再由 (17) 式解出  $\dot{p}_i$  得

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^3 d_{ij} q_j, \quad (19)$$

其中  $d_{ij}$  為一定的實係數, 而且顯然  $d_{ij} = d_{ji}$ 。再令

$$H(t, p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (d_{ij} q_i q_j + b_{ij} p_i p_j),$$

即可將 (18) 及 (19) 寫成

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

因此, (4) 的特徵方程是倒根方程, 即具有下列形式:

$$\rho^6 + k_1 \rho^5 + k_2 \rho^4 + k_3 \rho^3 + k_2 \rho^2 + k_1 \rho + 1 = 0. \quad (20)$$

根據前述的李雅普諾夫的定理可知, 如果方程 (20) 的六個根的模都等於 1, 而且是

單根,則運動是穩定的;只要有一個根的模不等於 1,則運動是不穩定的。因此我們可以把穩定及不穩定分界的條件取作是 (20) 的根之模全等於 1,但有重根(在這個分界上,運動屬於穩定或不穩定,對於我們並無興趣)。

由 (13) 及 (14) 式可以看出,方程組 (4) 至少包含有下列形式的解,即

$$A_n = \varphi_1(t) e^{\alpha_k T}, \quad B_n = \varphi_2(t) e^{\alpha_k T}, \quad C_n = \varphi_3(t) e^{\alpha_k T}. \quad (21)$$

而

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k \quad \text{或} \quad \rho_k = e^{\alpha_k T}. \quad (22)$$

(21) 中之  $\varphi$  是  $t$  的週期函數,週期為  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。在 (8) 式中,如果  $\mu = 0$ ,則 (4) 就成為桿件受縱向常力  $P_0$  的自由振動方程,設其頻率為  $\omega_{nj}(j = 1, 2, 3)$ ,則此時的解顯然可以寫成

$$A_n = A e^{\pm i \omega_{nj} t}, \quad B_n = B e^{\pm i \omega_{nj} t}, \quad C_n = C e^{\pm i \omega_{nj} t}. \quad (23)$$

其中  $A, B, C$  是常數。比較 (21) 與 (23), 即知此時

$$\varphi_1(t) = A, \quad \varphi_2(t) = B, \quad \varphi_3(t) = C.$$

$$\alpha_k = \pm i \omega_{nj}.$$

由 (22) 式,此時之特徵根為

$$\rho_k = e^{\alpha_k T} = e^{\pm i \frac{\omega_{nj}}{\omega} 2\pi},$$

$$\text{即} \quad \rho_{1,2} = e^{\pm i \frac{\omega_{n1}}{\omega} 2\pi}, \quad \rho_{3,4} = e^{\pm i \frac{\omega_{n2}}{\omega} 2\pi}, \quad \rho_{5,6} = e^{\pm i \frac{\omega_{n3}}{\omega} 2\pi}. \quad (24)$$

當  $\mu \neq 0$  時,因為  $\mu$  是一個小參數,根據阿爾捷梅耶夫的方法,可以把特徵指數展開為  $\mu$  的級數,於是我們可令

$$\alpha_k = \pm i (\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \alpha_{nj}^{(2)} \mu^2 + \cdots), \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

在分界上,特徵根之模為 1 且有重根,再由 (22) 式,

$$\rho_k = e^{\alpha_k T} = e^{\alpha_k \frac{2\pi}{\omega}}. \quad (26)$$

由此可知,運動穩定及不穩定分界的條件是 (25) 式中之  $\alpha_{nj}^{(1)}, \alpha_{nj}^{(2)} \cdots$  等皆是實數,而且

$$\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \alpha_{nj}^{(2)} \mu^2 + \cdots = \frac{m\omega}{2}, \quad (27)$$

或者

$$(\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \cdots) \pm (\omega_{nk} + \alpha_{nk}^{(1)} \mu + \cdots) = \pm m\omega. \quad (28)$$

( $m = 1, 2, 3 \cdots, k$  代表與  $j$  不同的指標).

當  $\mu \rightarrow 0$  時, (27) 及 (28) 就變為

$$\frac{\omega_{nj}}{\omega} = \frac{m}{2}, \quad (29)$$

$$\frac{\omega_{nj} \pm \omega_{nk}}{\omega} = m \quad (\text{設 } \omega_{nj} > \omega_{nk}). \quad (30)$$

當  $m$  一定時, (27) 式 [或 (28) 式] 一般能給出在  $(\mu, \omega)$  平面上的兩條分界線, 它們在  $\mu = 0$  時相交在由 (29) 式 [或 (30) 式] 所決定的一點. 在這兩條分界線之間的區域就是不穩定的區域 ( $|\rho_k|$  不全為 1), 而在此以外的區域就是穩定的區域, 這是因為特徵根  $\rho_k$  是  $\mu$  的連續函數的緣故. 因此薄壁桿件發生動力的不穩定將在 (29) 及 (30) 式所確定的頻率比例附近. 這個結果和果耳金布拉特及鮑羅廷所獲得的結果完全相同, 但是方法上簡單了許多.

另外, 容易看出, 桿件在由 (29) 式所確定的頻率附近喪失穩定時, 其振動形式將主要是對應於  $\omega_{nj}$  的彎扭振動, 而在 (30) 式所決定頻率附近喪失穩定時, 其振動形式將是對應於  $\omega_{nj}$  及  $\omega_{nk}$  的彎扭振動的聯合.

如果要決定不穩定的區域, 則必須應用 (27) 及 (28) 式, 下面用一個具體例子來說明. 考慮一鉸支窄條受端力偶作用 (圖 2) 的動力穩定問題. 假設端力偶具有下列形式:

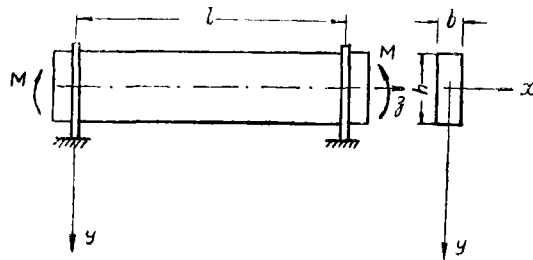


圖 2

$$M = M_0 (1 + \mu \cos \omega t),$$

其中  $M_0$  是常數, 我們忽略截面圍繞其中心主軸轉動的慣性力, 於是得到基本方程為:

$$\left. \begin{aligned} E J_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + M_0 (1 + \mu \cos \omega t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ M_0 (1 + \mu \cos \omega t) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - G J_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma F}{g} r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

因為兩端鉸支, 令

$$\xi = A(t) \sin \lambda z, \quad \theta = C(t) \sin \lambda z, \quad \left( \lambda = \frac{\pi}{l} \right).$$

將此代入 (31) 式得



$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + \omega_y^2 A + \beta_1 (1 + \mu \cos \omega t) C &= 0, \\ \ddot{C} + \omega_\theta^2 C + \beta_2 (1 + \mu \cos \omega t) A &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_y^2 &= \frac{E J_y \lambda^4}{F} \frac{g}{\gamma}, & \omega_\theta^2 &= \frac{G J_\theta \lambda^2}{F r^2} \frac{g}{\gamma} \\ \beta_1 &= -\frac{g}{\gamma} \frac{M_0 \lambda^2}{F}, & \beta_2 &= \frac{\beta_1}{r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$\omega_y$  是桿件在  $x$  方向自由振動的頻率,  $\omega_\theta$  是桿件自由扭轉振動的頻率. 根據阿爾捷梅耶夫的方法, 令

$$\left. \begin{aligned} A &= (A_1 + \mu \varphi_1^{(1)} + \mu^2 \varphi_1^{(2)} + \dots) e^{\pm i (\omega_j + \mu \alpha_j^{(1)} + \mu^2 \alpha_j^{(2)} + \dots)}, \\ C &= (C_1 + \mu \varphi_2^{(1)} + \mu^2 \varphi_2^{(2)} + \dots) e^{\pm i (\omega_j + \mu \alpha_j^{(1)} + \mu^2 \alpha_j^{(2)} + \dots)}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

其中  $A_1, C_1$  是常數, 所有的  $\varphi$  是  $t$  的週期函數, 週期為  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . 而  $\omega_j (j = 1, 2)$  是桿件受常力偶  $M_0$  作用時的自由振動頻率. 將 (34) 代入方程組 (32), 取  $\mu$  的同次項得:

$$\mu^0: \quad \left. \begin{aligned} (\omega_y^2 - \omega_j^2) A_1 + \beta_1 C_1 &= 0, \\ \beta_2 A_1 + (\omega_\theta^2 - \omega_j^2) C_1 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\mu^1: \quad \left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1^{(1)} \pm 2i \omega_j \dot{\varphi}_1^{(1)} + (\omega_y^2 - \omega_j^2) \varphi_1^{(1)} + \beta_1 \varphi_2^{(1)} &= 2\omega_j \alpha_j^{(1)} A_1 - \beta_1 \cos \omega t C_1, \\ \ddot{\varphi}_2^{(1)} \pm 2i \omega_j \dot{\varphi}_2^{(1)} + (\omega_\theta^2 - \omega_j^2) \varphi_2^{(1)} + \beta_2 \varphi_1^{(1)} &= 2\omega_j \alpha_j^{(1)} C_1 - \beta_2 \cos \omega t A_1; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\mu^2: \quad \left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1^{(2)} \pm 2i \omega_j \dot{\varphi}_1^{(2)} + (\omega_y^2 - \omega_j^2) \varphi_1^{(2)} + \beta_1 \varphi_2^{(2)} &= \mp 2i \alpha_j^{(1)} \dot{\varphi}_1^{(1)} + \\ &+ 2\omega_j \alpha_j^{(1)} \varphi_1^{(1)} - \beta_1 \cos \omega t \varphi_2^{(1)} + 2\omega_j \alpha_j^{(2)} A_1 + [\alpha_j^{(1)}]^2 A_1, \\ \ddot{\varphi}_2^{(2)} \pm 2i \omega_j \dot{\varphi}_2^{(2)} + (\omega_\theta^2 - \omega_j^2) \varphi_2^{(2)} + \beta_2 \varphi_1^{(2)} &= \mp 2i \alpha_j^{(1)} \dot{\varphi}_2^{(1)} + \\ &+ 2\omega_j \alpha_j^{(1)} \varphi_2^{(1)} - \beta_2 \cos \omega t \varphi_1^{(1)} + 2\omega_j \alpha_j^{(2)} C_1 + [\alpha_j^{(1)}]^2 C_1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

由 (35) 式,

$$\begin{vmatrix} \omega_y^2 - \omega_j^2 & \beta_1 \\ \beta_2 & \omega_\theta^2 - \omega_j^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

因  $\omega_j$  是桿件受常力偶  $M_0$  作用的自由振動頻率, 上式自然滿足, 於是得到

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_y^2 \omega_\theta^2 - \beta_1 \beta_2, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_y^2 + \omega_\theta^2. \quad (39)$$

在方程組 (36) 中,  $\varphi_1^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$  以及它們的微分都是  $t$  的週期函數, 於是有

$$\int_0^T \dot{\varphi}_1^{(1)} dt = \int_0^T \ddot{\varphi}_1^{(1)} dt = \int_0^T \ddot{\varphi}_2^{(1)} dt = \int_0^T \dot{\varphi}_2^{(1)} dt = 0, \quad (40)$$

將 (36) 之第一式乘上  $\beta_2$ , 第二式乘上  $(\omega_y^2 - \omega_j^2)$ , 相減之後由  $t = 0$  到  $t = T$  積分, 注意到 (38) 和 (40), 即得

$$\alpha_j^{(1)} = \frac{\beta_1 \beta_2 C_1 - \beta_2 A_1 (\omega_y^2 - \omega_j^2)}{2\omega_j [\beta_2 A_1 - (\omega_y^2 - \omega_j^2) C_1]} \int_0^T \cos \omega t dt = 0. \quad (41)$$

於是 (36) 變為:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1^{(1)} \pm 2i\omega_j \dot{\varphi}_1^{(1)} + (\omega_y^2 - \omega_j^2) \varphi_1^{(1)} + \beta_1 \varphi_2^{(1)} &= -\beta_1 \cos \omega t C_1, \\ \ddot{\varphi}_2^{(1)} \pm 2i\omega_j \dot{\varphi}_2^{(1)} + (\omega_\theta^2 - \omega_j^2) \varphi_2^{(1)} + \beta_2 \varphi_1^{(1)} &= -\beta_2 \cos \omega t A_1. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

現在來求 (42) 的解, 先求它的均勻解  $\bar{\varphi}_1^{(1)}$ ,  $\bar{\varphi}_2^{(1)}$ , 即設其右端為零. 我們令

$$\bar{\varphi}_1^{(1)} = R_1 e^{v t}, \quad \bar{\varphi}_2^{(1)} = R_2 e^{v t}.$$

將此代入 (42), 得到決定  $v$  的特徵行列式為:

$$\begin{vmatrix} v^2 \pm 2i\omega_j v + (\omega_y^2 - \omega_j^2) & \beta_1 \\ \beta_2 & v^2 \pm 2i\omega_j v + (\omega_\theta^2 - \omega_j^2) \end{vmatrix} = 0,$$

注意到 (39) 式, 不難求得上式的根是  $v = 0$ ,  $\pm 2i\omega_j$ ,  $\pm(\omega_j - \omega_k)$ ,  $\pm i(\omega_j + \omega_k)$  ( $\omega_k$  表示與  $\omega_j$  不同的頻率, 如  $j = 1$ , 則  $k = 2$ ; 如  $j = 2$ , 則  $k = 1$ ). 因此得到均勻解

$$\bar{\varphi}_1^{(1)} = R'_1 + R'_2 e^{\mp 2i\omega_j t} + R'_3 e^{\pm i(\omega_j - \omega_k) t} + R'_4 e^{\mp i(\omega_j + \omega_k) t},$$

$$\bar{\varphi}_2^{(1)} = R''_1 + R''_2 e^{\mp 2i\omega_j t} + R''_3 e^{\pm i(\omega_j - \omega_k) t} + R''_4 e^{\mp i(\omega_j + \omega_k) t}.$$

其中所有  $R$  是常數。但因  $\bar{\varphi}_1^{(1)}, \bar{\varphi}_2^{(1)}$  均係週期函數, 假設此時  $\omega$  又並不滿足 (29) 或 (30) 式 (因  $\mu \neq 0$ )<sup>1)</sup>, 故  $\bar{\varphi}_1^{(1)}, \bar{\varphi}_2^{(1)}$  只能是常數, 即

$$\bar{\varphi}_1^{(1)} = R'_1, \quad \bar{\varphi}_2^{(1)} = R'_2. \quad (43)$$

現在來求 (42) 的特解, 令

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t. \\ \varphi_2^{(1)} &= G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

將 (44) 代入 (42), 取各同類項的係數為零, 這樣就得到四個關於  $D_1, D_2, G_1, G_2$  的線性代數方程, 解算以後即得

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{C_1}{\delta} \left\{ (\omega_k^2 - \omega_i^2 - 2\omega^2) [\beta_1^2 \beta_2 - \beta_1 \beta_2 k (k \beta_2 + \omega^2)] + \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 [(\kappa \beta_2 + \omega^2)^2 - 4\omega_i^2 \omega^2 + \beta_1 \beta_2] \left( \frac{\beta_1}{k} + \omega^2 - \beta_2 k \right) \right\}, \\ G_2 &= \frac{C_1}{\delta} \left\{ (\omega_k^2 - \omega_i^2 - 2\omega^2) \left[ \beta_1 \beta_2^2 k - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\beta_1}{k} + \omega^2 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \left[ \left( \frac{\beta_1}{k} + \omega^2 \right)^2 - 4\omega_i^2 \omega^2 + \beta_1 \beta_2 \right] (\kappa^2 \beta_2 + \kappa \omega^2 - \beta_1) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

其中

$$\delta = \omega^2 (\omega^2 - 4\omega_i^2) (\omega^4 + \omega_i^4 + \omega_k^4 - 2\omega^2 \omega_i^2 - 2\omega_i^2 \omega_k^2 - 2\omega_k^2 \omega^2), \quad (46)$$

$$\kappa = \frac{A_1}{C_1} = \frac{\beta_1}{\omega_i^2 - \omega_y^2} = \frac{\omega_i^2 - \omega_\theta^2}{\beta_2}. \quad (47)$$

至於  $D_1, G_1$  的算式, 我們不擬寫出, 因為以後並不需要。

現在來考察方程組 (37), 令其中  $\alpha_i^{(1)} = 0$ , 並將第一式乘以  $\beta_2$ , 第二式乘以  $(\omega_y^2 - \omega_i^2)$ , 相減之後由  $t = 0$  到  $t = T$  積分, 注意到 (38) 和

$$\int_0^T \dot{\varphi}_1^{(2)} dt = \int_0^T \ddot{\varphi}_1^{(2)} dt = \int_0^T \dot{\varphi}_2^{(2)} dt = \int_0^T \ddot{\varphi}_2^{(2)} dt = 0,$$

即得:

$$\alpha_i^{(2)} = \frac{\beta_1 \beta_2 \int_0^T \varphi_2^{(1)} \cos \omega t dt - \beta_2 (\omega_y^2 - \omega_i^2) \int_0^T \varphi_1^{(1)} \cos \omega t dt}{2\omega_i T [\beta_2 A_1 - (\omega_y^2 - \omega_i^2) C_1]}.$$

1) 換言之, 我們是在臨界頻率比例 (29) 及 (30) 的附近展開  $\alpha_k$ , 正如阿爾德樺耶夫所指出的, 這用以決定不穩定區域是完全足夠的。

再因  $\varphi_1^{(1)}$  和  $\varphi_2^{(1)}$  是由 (43) 和 (44) 的和所表示, 於是得到

$$\alpha_j^{(2)} = \frac{\beta_1 \beta_2 (k G_2 + D_2)}{4k C_1 \omega_j \left( k \beta_2 + \frac{\beta_1}{k} \right)}. \quad (48)$$

以下計算中假設  $h = 5b$ ,  $l = 50b$  (見圖 2),  $\frac{E}{G} = 2.5$ ,  $\frac{M_0}{M_k} = \frac{1}{2}$  ( $M_k = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y G J_d}$  是靜力喪失穩定的臨界撓矩), 另外, 我們注意到

$$\left( \frac{\omega_y}{\omega_\theta} \right)^2 \approx \frac{13}{6} 10^{-4}, \quad \frac{\beta_1 \beta_2}{\omega_\theta^4} = \left( \frac{M_0}{M_k} \right)^2 \left( \frac{r}{l} \right)^2 \left( \frac{E J_y}{G J_d} \right) \pi^2 \approx \frac{13}{24} 10^{-4},$$

因此

$$\omega_1^2 \approx \omega_\theta^2, \quad \omega_2^2 \approx \frac{13}{8} \cdot 10^{-4} \omega_\theta^2.$$

又對於  $\omega_1$ ,

$$k = \frac{\beta_1}{\omega_1^2 - \omega_y^2} \approx \frac{\beta_1}{\omega_1^2} \left( 1 + \frac{13}{6} \cdot 10^{-4} \right);$$

對於  $\omega_2$ ,

$$k = \frac{\omega_2^2 - \omega_\theta^2}{\beta_2} \approx \frac{\omega_\theta^2}{\beta_2} \left( \frac{13}{8} \cdot 10^{-4} - 1 \right).$$

利用這些關係, 不難求得  $\alpha_1^{(2)}$ ,  $\alpha_2^{(2)}$  的近似算式為

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{13}{96} \cdot 10^{-4} \frac{\omega_1^3}{\delta} \omega_\theta^6 \left[ 1 - 3 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 - 4 \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)^4 + \frac{13}{24} 10^{-4} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 + \frac{52}{3} 10^{-4} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)^4 \right],$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{2}{39} 10^4 \frac{\omega_2^3}{\delta} \omega_\theta^6 \left[ 1 - \frac{8}{13} 10^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 + \frac{128}{39} 10^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^4 \right].$$

因此基本的不穩定區域的界限將由下列方程近似地決定<sup>1)</sup>:

$$\frac{\omega_1}{\omega} + \mu^2 \frac{\alpha_1^{(2)}}{\omega} = \frac{1}{2}, \quad (49)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega} + \mu^2 \frac{\alpha_2^{(2)}}{\omega} = \frac{1}{2}, \quad (50)$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega} + \mu^2 \frac{\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}}{\omega} = 1. \quad (51)$$

將  $\alpha_1^{(2)}$ ,  $\alpha_2^{(2)}$  的值代入並在 (49), (50), (51) 中分別令

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{2} + \Delta, \quad \frac{\omega_2}{\omega} = \frac{1}{2} + \Delta, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega} = 1 + \Delta,$$

1) 近似計算的結果表明, 在  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega} = 1$  的附近不存在不穩定的區域, 即  $\Delta$  不為實數。

則 (49), (50), (51) 均化為決定  $\Delta$  的方程, 它們在  $\mu \rightarrow 0$  時能給出趨近於零的兩個  $\Delta$  值. 爲了簡單起見, 我們忽略數量級爲  $\Delta^2$  以上的項, 化簡以後就分別得到:

$$\Delta^2 + 376 \cdot 10^{-8} \mu^2 \Delta - 91 \cdot 10^{-8} \mu^2 = 0, \quad (52)$$

$$\Delta^2 - \frac{\mu^2}{16} \Delta - \frac{\mu^2}{288} = 0, \quad (53)$$

$$\Delta^2 + \frac{\mu^2}{48} \Delta - \frac{\mu^2}{24} \sqrt{\frac{13}{8}} 10^{-2} = 0. \quad (54)$$

由 (52), (53), (54) 式計算所得的結果表示在圖 3, 4, 5 上, 其中畫了線的部分即代表不穩定的區域. 圖 3 表示對應於  $\omega_1$  的(即扭轉形式的)不穩定區域, 圖 4 表示對應於  $\omega_2$  的(即在  $x$  方向的彎曲形式的)不穩定區域, 圖 5 則表示以混合形式喪失穩定的區域. 圖 3, 4 的結果和鮑羅廷的結果相近, 不過要窄得多. 至於圖 5 的結果, 用鮑羅廷的方法是得不到的.

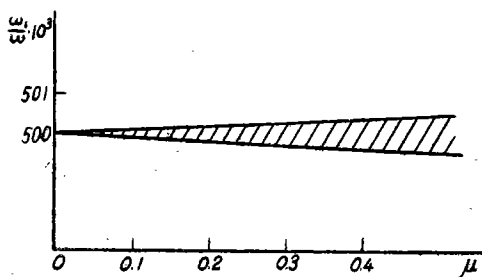


圖 3

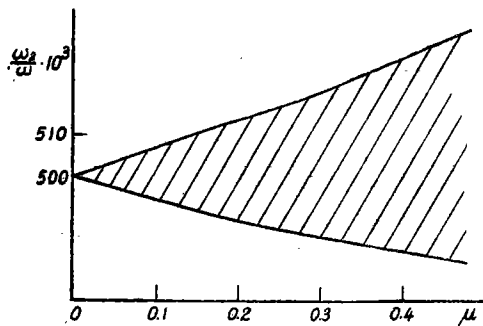


圖 4

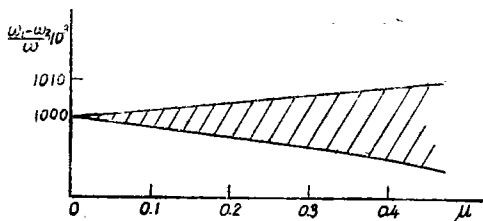


圖 5

如果要求基本不穩定區域以下的第二, 第三, ... 等不穩定區域, 或者要求基本不穩定區域的更準確的寬度, 則必須算出  $\alpha_1^{(3)}$ ,  $\alpha_2^{(3)}$ ,  $\alpha_1^{(4)}$ ,  $\alpha_2^{(4)}$  ... 等, 但爲了實用的目的, 上面的計算已經足夠了.

## 參 考 文 獻

- [1] Беллев, Н. М., Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил, об "Инженерные сооружения и строительная механика" Ленинград, Изд "Путь" 1924.
- [2] Гольденблат, И. И., Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат 1947.
- [3] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- [4] Артемьев, Н. А., Метод определения характеристических показателей и приложения его к двум задачам небесной механики, *Изв. АН СССР, Серия матем.*, 1944.
- [5] Салион, В. Е., Динамическая устойчивость плоской формы изгиба, *ДАН СССР* 78 5, 1951.
- [6] Соболев, В. А., Динамическая устойчивость деформации полосы при внецентренном сжатии и чистом изгибе. Инженерный сборник, Т. 19, 1954.
- [7] Болотин, В. В., О параметрическом Возбуждении поперечных колебаний, об. "Поперечные колебания и критические скорости" Изд. АН СССР вып. 2, 1953.
- [8] ———, Динамическая устойчивость плоской формы изгиба, Инженерный сборник, Т. 14 1953.
- [9] Власов, В. З., Некоторые задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости, *Изв. АН СССР, ОТН* № 9, 1950.  
材料力學, 結構力學與彈性力學的若干問題, 科學譯叢, 理論及應用力學第 4 種, 1954.
- [10] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения Гостехиздат, 1952.
- [11] Вейлин, Е. А. и Джанелидзе, Г. Ю., Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем. *ПММ*, 16:5, 1952.

## ON THE DYNAMIC STABILITY OF THIN-WALLED BEAMS

SHI PO-MING

(Tsing Hua University)

## ABSTRACT

In this paper, an approximate method for determining the unstable regions of dynamic stability of thin-walled beams is given. The beam is assumed to be under the actions of concentrated longitudinal forces at both ends and of the type

$$P(t) = P_0 + \mu P_1(t),$$

where  $P_0 = \text{const.}$ ,  $P_1(t)$  a periodic force with period  $2\pi/\omega$  and  $\mu$  a small parameter. The end conditions are arbitrary. By using trigonometric series or Galerkin's method satisfying the end conditions, the fundamental equations, based on Vlasov's theory, are reduced to a system of three ordinary linear differential equations (4) or (7) of 2<sup>nd</sup> order with periodic coefficients. Moreover, they can easily be transformed to canonical form

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

Therefore, their characteristic equations are reciprocal equations, with characteristic roots symmetrically distributed with respect to the real axis and unit circle in a complex plane.

The condition of boundary lines between stable and unstable regions is taken as, that all of the characteristic roots have unit modulus (absolute value), but there exist equal roots. Expanding the characteristic exponentials in series of the small parameter  $\mu$ , this condition is represented by the following equations:

$$\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \alpha_{nj}^{(2)} \mu^2 + \cdots = \frac{m\omega}{2}, \quad (27)$$

or 
$$(\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \cdots) \pm (\omega_{nk} + \alpha_{nk}^{(1)} \mu + \cdots) = \pm m\omega. \quad (28)$$

$$(m = 1, 2, 3 \cdots, \quad j, k = 1, 2, 3).$$

where  $\omega_{nj}, \omega_{nk}$  represent different frequencies of  $n$ -mode vibrations of the beam under the action of a constant force  $P_0$ , and  $\omega$  is the frequency of  $P_1(t)$ . When  $\mu \rightarrow 0$ , (27) and (28) become

$$\frac{\omega_{nj}}{\omega} = \frac{m}{2} \quad (29)$$

$$\frac{\omega_{nj} \pm \omega_{nk}}{\omega} = m \quad (\text{assume } \omega_{nj} > \omega_{nk}), \quad (30)$$

Hence, dynamic instability would take place at the neighbourhoods of these critical ratios, expressed by (29) and (30).

When the unstable regions of dynamic stability are desired, we use perturbation method to determine  $\alpha_{nj}^{(j)}$ . For practical use, it is sufficient to determine  $\alpha_{nj}^{(1)}, \alpha_{nj}^{(2)}$  only. The boundary lines can then be approximately determined by the following equations:

$$\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \alpha_{nj}^{(2)} \mu^2 = \frac{m\omega}{2},$$

$$(\omega_{nj} + \alpha_{nj}^{(1)} \mu + \alpha_{nj}^{(2)} \mu^2) \pm (\omega_{nk} + \alpha_{nk}^{(1)} \mu + \alpha_{nk}^{(2)} \mu^2) = \pm m\omega.$$

For illustrating this method, a simply supported beam of narrow rectangular cross-section, under the action of varying end moments (fig. 2) is considered. The fundamental unstable regions, corresponding to bending, torsional and "mixed" type of dynamic instability are calculated and shown in figs. 4, 3, 5.