

彈性薄壁桿件的振動理論*

解 伯 民

(清華大學)

一. 前 言

本文基於與前文^[1] 相同的假設，處理了彈性薄壁桿件的一般振動問題。本文的結果說明，在一般場合，薄壁桿件的振動是空間彎扭振動和軸向振動的聯合。對應於一定的彎扭振動形式，可以有無限多個自由振動的頻率，它們對應於不同的軸向振動形式。按照 B. 3. 符拉索夫的理論計算所得的頻率相當於我們的最低頻率，但前者一般高於後者。

二. 基 本 方 程

考慮一彈性薄壁桿件在線佈橫向載荷 $q_x^0(z)$, $q_y^0(z)$, 線佈扭矩 $m_z^0(z)$ 及縱向壓力 P 的作用下的振動問題。假設縱向壓力 P 係由按平面規律分佈的應力所合成，它可以是時間 t 的已知函數 $P(t)$ 。坐標系

的取法如圖 1。 x , y 為桿件橫截面的中心主軸， z 為桿件軸線。設桿件各點在振動時沿 x , y , z 軸之位移各為 u , v , w ，則在振動時作用在單元 $dz ds$ 上之慣性力沿 x , y , z 軸之分量各為：

$$\left. \begin{aligned} p_x dz ds &= -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\gamma}{g} h dz ds, \\ p_y dz ds &= -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\gamma}{g} h dz ds, \\ p_z dz ds &= -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\gamma}{g} h dz ds. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

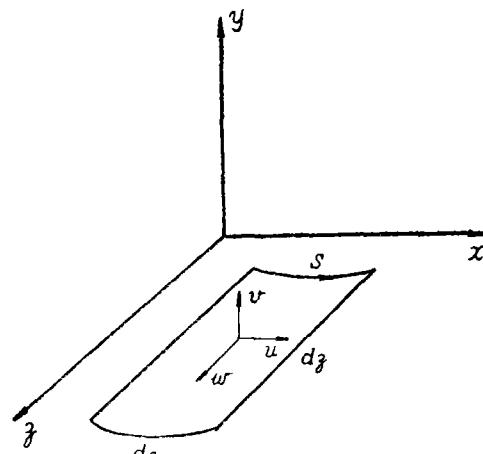


圖 1

其中 $h = h(s)$ 為壁厚， γ 為單位體積的重量， g 為重力加速度。 p_x , p_y , p_z 之意義為

* 1956 年 2 月 3 日收到。

桿件單位面積上的慣性力分量。設 ξ, η 為坐標原點（即截面重心）沿 x, y 軸方向之位移， θ 為截面轉角。根據橫截面周線不可變形之假定，於是作用在桿件單位長度上的慣性力 q_x, q_y 及慣性扭矩 m_z 為：

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\gamma F}{g}, \\ q_y &= -\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\gamma F}{g}, \\ m_z &= -\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma I_p}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $F = \int_0^l h ds$ 為截面面積，

$$I_p = \int_0^l (a^2 + y^2) h ds \text{ 為截面極慣性矩。}$$

在書寫桿件單元的振動方程時，我們應該計及縱向壓力由於桿件振動變形而發生的影響。設桿件在振動時的變形很小，我們認為縱向壓力在桿件橫截面上所引起的法應力 σ_z^0 及剪應力 τ_{zz}^0 與在平衡情況下所引起的相同，即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^0 &= -\frac{P}{F} - \frac{P e_y y}{I_{yy}} - \frac{P e_x x}{I_{xx}}, \\ \tau_{zz}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 e_x, e_y 為 P 作用點之 x, y 坐標。

$$I_{yy} = \int_0^l y^2 h ds, \quad I_{xx} = \int_0^l x^2 h ds.$$

在 q_x^0, q_y^0, m_z^0 及 P 的聯合作用下，桿件已有形變，我們假設這些形變很小，而且為了清楚起見，我們以 $w, \xi, \eta, \theta, \tau_{zz}, \sigma_z$ 等來表示由於桿件振動而發生的位移和應力的增量，於是¹⁾：

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\tau_{zz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} x' + \frac{\partial \eta}{\partial z} y' + \frac{\partial \theta}{\partial z} \omega' \right). \quad (5)$$

其中 ω 表示扇性面積。於是根據前文^[1]的 (15)–(18) 式，即得在振動時的基本方程：

$$\begin{aligned} Eh \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(h \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial z} (h x')' + \frac{\partial \eta}{\partial z} (h y')' + \frac{\partial \theta}{\partial z} (h \omega')' \right] - \\ - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

1) 外文字母上加一撇表示對 s 之微分。

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} x' h ds + A_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_{12} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + A_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + q_x^0 = 0, \quad (7)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} y' h ds + A_{12} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + A_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + q_y^0 = 0, \quad (8)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} \omega' h ds + A_{13} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + A_{23} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + A_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\gamma I_\rho}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m_z^0 = 0. \quad (9)$$

其中 $A_{11} = -P + GI'_{xx}$, $A_{22} = -P + GI'_{yy}$,

$$A_{33} = -\frac{I_{xx} + I_{yy}}{F} P - \frac{I_{xxx} + I_{xyy}}{I_{xx}} Pe_x - \frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{I_{yy}} Pe_y + GI'_{\omega\omega} + C,$$

$$A_{12} = GI'_{xy}, \quad A_{13} = Pe_y + GI'_{x\omega}, \quad A_{23} = -Pe_x + GI'_{y\omega}.$$

而 $I'_{xx} = \int_0^l x'^2 h ds$, $I'_{xy} = \int_0^l x' y' h ds$, ...

如果邊界條件與時間無關，相應於方程組 (6)–(9) 的邊界條件與前文^[1] 相同。

由方程組 (6)–(9) 可以看出，在一般場合，振動是以 w , ξ , η , θ 同時出現而存在的，也就是說是空間彎扭振動和軸向振動的聯合。

爲處理簡便計，我們引進下列函數 ϕ ，即令

$$w = \frac{1}{Eh} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad (10)$$

$$\tau_{zz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z} x' + \frac{\partial \eta}{\partial z} y' + \frac{\partial \theta}{\partial z} \omega' \right) = -\frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right), \quad (11)$$

其中 $c^2 = \frac{Eg}{\gamma}$ 。於是第 (6) 式自然滿足，而方程 (7), (8), (9) 則化爲：

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) x' ds + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - Pe_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - q_x^0 = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) y' ds + P \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + Pe_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - q_y^0 = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \omega' ds - Pe_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + Pe_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \left[(r^2 + \alpha c_x + \beta c_y) P - C \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\ + \frac{\gamma I_\rho}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - m_z^0 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

其中爲簡便計，引入了下列符號：

$$r^2 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{F}, \quad \alpha = \frac{I_{xxx} + I_{xyy}}{I_{xx}}, \quad \beta = \frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{I_{yy}}.$$

決定函數 ϕ , ξ , η , θ 的第四個方程可由 (10) 及 (11) 中消去 w 而得到，即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{G}{E} h \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + Gh \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} x' + \frac{\partial \eta}{\partial z} y' + \frac{\partial \theta}{\partial z} \omega' \right) = 0. \quad (15)$$

方程組 (12)–(15) 就是我們的基本方程，在各種支承情況下的邊界條件也很容易求出^[1]。

三. 鋸支桿件的解

對於在兩端 $z = 0$ 及 $z = L$ 鋸支的桿件，兩端的邊界條件為：

$$\text{當 } z = 0 \text{ 及 } z = L \text{ 時, } \xi = \eta = \theta = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad (16)$$

也即

$$\xi = \eta = \theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial s} = 0. \quad (17)$$

另外，對於開口截面的桿件，因為在兩縱向邊線上無剪應力，所以有邊界條件：

$$\text{當 } s = 0 \text{ 及 } s = l \text{ 時, } \phi = 0. \quad (18)$$

而對於閉合截面的桿件則有週期條件：

$$\phi|_s = \phi|_{s+l}. \quad (19)$$

當 $q_x^0 = q_y^0 = m_z^0 = 0$ 而 $P = \text{const}$ 時，為要滿足邊界條件 (17)，可令

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) \cos \lambda_n z \sin k_n t, \\ \xi &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n z \sin k_n t, \\ \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n z \sin k_n t, \\ \theta &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n z \sin k_n t; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ 。將 (20) 式代入方程組 (12)–(15)，取各同類項的係數為零，我們得到

$$\frac{G}{E} \int_0^l \phi_n(s) \lambda_n v_n^2 x' ds - P k_n^2 A_n + P e_y k_n^2 C_n - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 A_n = 0, \quad (21)$$

$$\frac{G}{E} \int_0^l \phi_n(s) \lambda_n v_n^2 y' ds - P k_n^2 B_n - P e_x k_n^2 C_n - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 B_n = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{E} \int_0^l \phi_n(s) \lambda_n v_n^2 \omega' ds + P e_y k_n^2 A_n - P e_x k_n^2 B_n - [(r^2 + \alpha e_x + \beta e_y) P - C] k_n^2 C_n - \\ - \frac{\gamma I_\rho}{g} k_n^2 C_n = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$h \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{h} \frac{d\phi_n(s)}{ds} \right] - v_n^2 \phi_n(s) + Eh \lambda_n (A_n x' + B_n y' + C_n \omega') = 0; \quad (24)$$

其中 $v_n^2 = \frac{E}{G} \left(\lambda_n^2 - \frac{k_n^2}{c^2} \right)$. 在很多場合, 因 $\lambda_n^2 > \frac{k_n^2}{c^2}$, 所以 v_n 是實數, 但我們並不限制 v_n 是實數, 也即 v_n 可以是虛數.

設函數 $X_n(v_n, \lambda_n, s)$, $Y_n(v_n, \lambda_n, s)$, $\Omega_n(v_n, \lambda_n, s)$ 為下列方程

$$\left. \begin{aligned} h \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \frac{dX_n}{ds} \right) - v_n^2 X_n + Eh \lambda_n x' &= 0, \\ h \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \frac{dY_n}{ds} \right) - v_n^2 Y_n + Eh \lambda_n y' &= 0, \\ h \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{h} \frac{d\Omega_n}{ds} \right) - v_n^2 \Omega_n + Eh \lambda_n \omega' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

之解, 而且對於開口截面桿件滿足邊界條件:

$$X_n(0) = X_n(l) = 0, \quad Y_n(0) = Y_n(l) = 0, \quad \Omega_n(0) = \Omega_n(l) = 0. \quad (26)$$

對於閉合截面桿件滿足週期條件:

$$X_n(s) = X_n(s + l), \quad Y_n(s) = Y_n(s + l), \quad \Omega_n(s) = \Omega_n(s + l), \quad (27)$$

則方程 (24) 之解可以寫成

$$\phi_n(s) = A_n X_n(s) + B_n Y_n(s) + C_n \Omega_n(s). \quad (28)$$

將 (28) 式代入方程組 (21)–(23), 並引進下列符號:

$$c_n^{11}(v_n, \lambda_n) = \int_0^l X_n x' ds, \quad c_n^{12}(v_n, \lambda_n) = \int_0^l X_n y' ds, \dots; \quad (29)$$

再注意到 $c_n^{12} = c_n^{21}$, $c_n^{13} = c_n^{31}$, $c_n^{23} = c_n^{32}$, 我們就得到決定振動頻率 k_n 的特徵行列式為:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{11} - P \lambda_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{12} & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{13} + P e_y \lambda_n^2 \\ \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{12} & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{22} - P \lambda_n^2 - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{23} - P e_x \lambda_n^2 \\ \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{13} + P e_y \lambda_n^2 & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{23} - P e_x \lambda_n^2 & \frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{33} - [(r^2 + \alpha e_x + \beta e_y) P - C] \lambda_n^2 - \frac{\gamma I_e}{g} k_n^2 \end{array} \right| = 0 \quad (30)$$

如截面具有二對稱軸, 則 $c_n^{12} = c_n^{23} = c_n^{13} = 0$. 再假設 $P = 0$, 則 (30) 式化為三個獨立的方程:

$$\frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 c_n^{11} - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 = 0, \quad (31)$$

$$\frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 e_n^{22} - \frac{\gamma F}{g} k_n^2 = 0, \quad (32)$$

$$\frac{G}{E} \lambda_n v_n^2 e_n^{33} + C \lambda_n^2 - \frac{\gamma I_\rho}{g} k_n^2 = 0. \quad (33)$$

對應於一定的 λ_n , (31) 式及 (32) 式分別決定了桿件在 x 及 y 方向橫向振動的頻率, 而 (33) 式則決定了扭轉振動的頻率。現引進下列符號:

$$\left. \begin{aligned} v_{nx}^2 &= \frac{E}{G} \frac{EF \lambda_n^2}{\lambda_n e_n^{11} + EF}, & v_{ny}^2 &= \frac{E}{G} \frac{EF \lambda_n^2}{\lambda_n e_n^{22} + EF}, \\ v_{nw}^2 &= \frac{E}{G} \frac{(EI_\rho - C) \lambda_n^2}{\lambda_n e_n^{33} + EI_\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

則 (30) 式可寫為:

$$\left| \begin{array}{ccc} EF \left(\frac{v_n^2}{v_{nx}^2} - 1 \right) - P & \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{12} & \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{13} + Pe_y \\ \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{12} & EF \left(\frac{v_n^2}{v_{ny}^2} - 1 \right) - P & \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{23} - Pe_x \\ \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{13} + Pe_y & \frac{G}{E} \frac{v_n^2}{\lambda_n} e_n^{23} - Pe_x & (EI_\rho - C) \left(\frac{v_n^2}{v_{nw}^2} - 1 \right) - \\ & & - (r^2 + \alpha e_x + \beta e_y) P \end{array} \right| = 0. \quad (35)$$

對應於一定的 λ_n , 即對應於一定的彎扭振動形式, 滿足 (35) 的 v_n 值一般有無窮多個, 也就是 k_n 值有無窮多個, 它們對應於不同的軸向振動形式。

如果 P 之值達到穩定問題之臨界值, 即 P 滿足下列行列式時^[1],

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda_n e_n^{11} - P & \lambda_n e_n^{12} & \lambda_n e_n^{13} + Pe_y \\ \lambda_n e_n^{12} & \lambda_n e_n^{22} - P & \lambda_n e_n^{23} - Pe_x \\ \lambda_n e_n^{13} + Pe_y & \lambda_n e_n^{23} - Pe_x & \lambda_n e_n^{33} - [(r^2 + \alpha e_x + \beta e_y) P - C] \end{array} \right| = 0,$$

則 $k_n = 0$, 而振動之週期趨於無限大。

在一定的 λ_n 和 k_n 時, 橫截面係圍繞一定點而振動, 這點稱為旋轉中心。我們用 C_{nx}, C_{ny} 表示它的 x, y 坐標。旋轉中心的條件是

$$\begin{aligned} u &= \xi - C_{ny} \theta = 0, \\ v &= \eta + C_{nx} \theta = 0. \end{aligned}$$

於是

$$C_{nx} = -\frac{\eta}{\theta} = -\frac{B_n}{C_n}, \quad C_{ny} = \frac{\xi}{\theta} = \frac{A_n}{C_n}.$$

由 (35) 式不難求得 $\frac{A_n}{C_n}$ 及 $\frac{B_n}{C_n}$, 但因該式較繁, 我們現在只寫出當 $P=0$ 時的 C_{nx} 及

C_{ny} 之算式：

$$\left. \begin{aligned} C_{nx} &= \frac{m \lambda_n \left(\frac{1}{v_{nx}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) e_n^{23} - e_n^{12} e_n^{13}}{m^2 \lambda_n^2 \left(\frac{1}{v_{nx}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) \left(\frac{1}{v_{ny}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) - (e_n^{12})^2}, \\ C_{ny} &= \frac{e_n^{12} e_n^{23} - m \lambda_n \left(\frac{1}{v_{ny}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) e_n^{13}}{m^2 \lambda_n^2 \left(\frac{1}{v_{nx}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) \left(\frac{1}{v_{ny}^2} - \frac{1}{v_n^2} \right) - (e_n^{12})^2}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中 $m = \frac{FE^2}{G}$.

下面以工字形截面鉸支桿件自由振動的計算為例來說明上述理論的應用。設 $P=0$ 而壁厚 $h = \text{const.}$ 弧長 s 的計算起點取在坐標原點。我們得到 x' , y' 及 ω' 的分

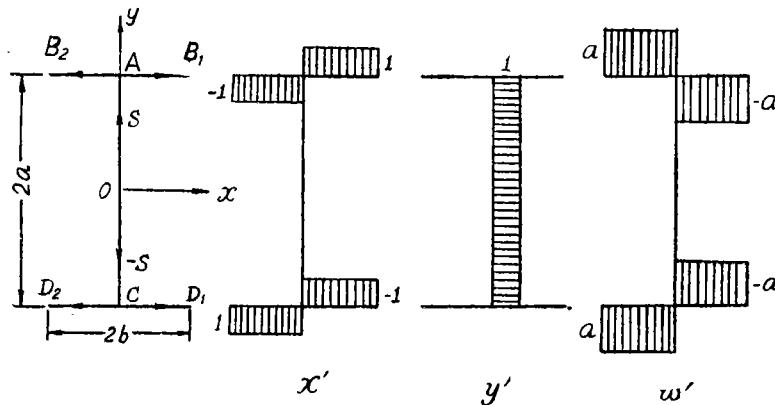


圖 2

佈如圖 2 所示。解方程 (25) 並注意到在 B_1, B_2, D_1, D_2 即 $s = \pm (a + b)$ 四點應滿足邊界條件 (26)，而在 A, C 即 $s = \pm a$ 兩點應滿足平衡條件：

$$\sum \tau_{zz} h = 0; \quad (37)$$

其中“ Σ ”代表將匯集在 A 點（或 C 點）的三段 B_1A, B_2A, OA （或 D_1C, D_2C, OC ）在 A 點（或 C 點）的剪力求和。根據 (11)、(20) 之第一式及 (28) 式，(37) 式分解為：

$$\sum X_n(a) = \sum X_n(-a) = 0,$$

$$\sum Y_n(a) = \sum Y_n(-a) = 0,$$

$$\sum Q_n(a) = \sum Q_n(-a) = 0;$$

其中“ Σ ”仍代表將在匯集點的三段內之量求和。這樣就得到：

在 $D_1 C$ 內 ($-a - b \leq s \leq -a$)：

$$X_n = \frac{2Eh \lambda_n sh \frac{v_n(s+a+b)}{2} sh \frac{v_n(s+a)}{2}}{v_n^2 ch \frac{v_n b}{2}},$$

$$Y_n = 0,$$

$$\Omega_n = a X_n;$$

在 $C A$ 內 ($-a \leq s \leq a$)： $X_n = 0$,

$$Y_n = \frac{Eh \lambda_n}{v_n^2} \left(1 - \frac{ch v_n s}{ch v_n a} \right),$$

$$\Omega_n = 0.$$

另外， X_n 係按反對稱於 x 軸及 y 軸的規律分佈， Y_n 係按對稱於 x 軸及 y 軸的規律分佈，而 Ω_n 則按對稱於 x 軸而反對稱於 y 軸的規律分佈。換句話說，對於 x 及 y 軸， X_n 與 x' ， Y_n 與 y' ， Ω_n 與 ω' 具有相同的對稱性或反對稱性。於是在其餘各段的 X_n ， Y_n 及 Ω_n 容易求得。由 (29) 式計算得到：

$$e_n^{11} = \frac{4Eh \lambda_n}{v_n^2} \left(b - \frac{2}{v_n} \tanh \frac{v_n b}{2} \right),$$

$$e_n^{22} = \frac{2Eh \lambda_n}{v_n^2} \left(a - \frac{1}{v_n} \tanh v_n a \right),$$

$$e_n^{33} = a^2 e_n^{11}, \quad e_n^{12} = e_n^{23} = e_n^{31} = 0.$$

我們下面僅限於計算最基本的頻率，也即令 $n = 1$ 而 $\lambda_n = \frac{\pi}{L}$ 。再假設 $\frac{a}{b} = 2$ ，
 $\frac{h}{b} 0.1^{11}$ ， $\frac{E}{G} = 2.5$ 。由 (34) 式經過一系列的化簡就得到決定兩個橫向振動及扭轉振動的頻率的算式：

$$z_1^3 - 2\pi^2 z_1 - \frac{\pi^2}{\delta} \tanh \frac{\delta z_1}{2} = 0, \quad (38)$$

$$z_2^3 - 2\pi^2 z_2 - \frac{\pi^2}{4\delta} \tanh 2\delta z_2 = 0, \quad (39)$$

$$z_3^2 - 17.6982 z_3 - \frac{13.9290}{\delta} \tanh \frac{\delta z_3}{2} = 0. \quad (40)$$

1) h 之數值只影響 $v_{n\omega}$ 而與 v_{nx} 及 v_{ny} 無關。如果忽略自由扭轉的剛度 C ，則 $v_{n\omega}$ 也與 h 無關。

其中

$$z_1 = v_{1x} L, \quad z_2 = v_{1y} L, \quad z_3 = v_{1\omega} L, \quad \delta = \frac{b}{L}.$$

而 L 為桿件長度。

解出方程 (38), (39), (40) 後，就不難求得頻率。因為由 (31) — (34) 式可知：

$$k_{1x}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{G}{E} v_{1x}^2 \right], \quad k_{1y}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{G}{E} v_{1y}^2 \right],$$

$$k_{1\omega}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{G}{E} v_{1\omega}^2 \right].$$

如果 v_1 取虛數值，則方程 (38) — (40) 化為

$$z_1^3 + 2\pi^2 z_1 + \frac{\pi^2}{\delta} \operatorname{tg} \frac{\delta z_1}{2} = 0, \quad (41)$$

$$z_2^3 + 2\pi^2 z_2 + \frac{\pi^2}{4\delta} \operatorname{tg} 2\delta z_2 = 0, \quad (42)$$

$$z_3^3 + 17.6982 z_3 + \frac{13.9290}{\delta} \operatorname{tg} \frac{\delta z_3}{2} = 0. \quad (43)$$

其中 $z_1 = |v_{1x}| \cdot L, \quad z_2 = |v_{1y}| \cdot L, \quad z_3 = |v_{1\omega}| \cdot L.$

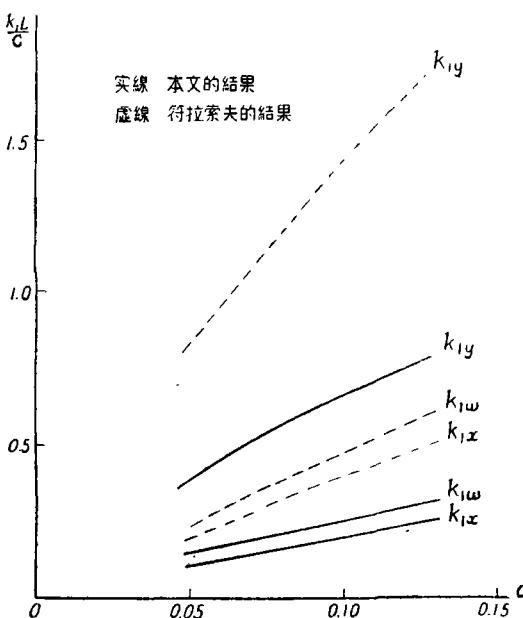


圖 3

方程 (38) — (40) 各決定 z_1, z_2, z_3 的一個正根，而方程 (41), (42), (43) 則皆有無窮多正根，由它們定出的頻率遠高於由前者定出的頻率。

根據 (38) — (40) 算出的結果如圖 3 所示。圖上同時畫出了按 B. 3. 符拉索夫的理論計算的結果。由圖上可以看出，按符拉索夫的理論計算的頻率高於我們的結果相當多，這種情況在實際應用中不能不加注意。另外，這種情況也是料想得到的，因為前者引用了桿件中曲面剪應變為零的假定，實際上就對軸向位移 w 加上了一定的限制，因而提高了桿件振動的頻率。

胡海昌同志曾對本文初稿提出了一些修正意見，謹此致謝。

參 考 文 獻

- [1] 胡海昌,解伯民,“彈性薄壁桿件的平衡與穩定的一般理論”,物理學報,11: 4 (1955), 339—357.
 [2] Власов, В. З., Тонкостенные упругие стержни, Москва, Госстройиздат, 1940.
 [3] Джанелидзе, Г. Ю., Пановко, Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержней, Огизгостехиздат, 1948. “彈性薄壁桿件的靜力學” 1955.

THEORY OF VIBRATIONS OF THIN-WALLED BEAMS

SHI Po-MING

(Tsing Hua University)

ABSTRACT

In this paper, the problem of vibrations of thin-walled beams is investigated. The fundamental assumption is the same as that in a preceding paper^[1], i.e. the non-deformability of contour lines of transverse cross-sections in its own plane. Equations of vibrations show that the vibrations of thin-walled beams generally take place as a combination of bending-torsional and longitudinal vibrations. Corresponding to a certain type of bending-torsional vibrations, instead of only one frequency as in the well-known Vlasov's (B. З. Власов) theory, there are an infinite number of frequencies, corresponding to different types of longitudinal vibrations. The natural frequencies as calculated by Vlasov's theory correspond to the lowest frequencies in our theory, but the former are generally higher than the latter as should be expected.