

# 能源策動的天線的普遍邊界條件和它們 對一個有限圓柱形天線的應用\*

徐 璋 本

(清 華 大 學)

## 一. 輻射邊界條件的理論

本文所陳述的，關於“一個能源策動的天線”的邊界條件，是具有普遍性的。在第二和第三節中，我們將以一個有限的圓柱形天線為例子，來闡釋其中所包含的原理，並且證實它們的應用。至於陳述這個邊界條件理論的重要性，可以簡單地解釋如下。

在天線輻射問題的古典求解中，我們假設電流在天線上具有正弦形分佈，並由之求出輻射場。這種求解方法當然是粗略而且僅是近似的，因為我們沒有考慮這個正弦形電流究竟是怎樣產生的，也沒有考慮它對能源的反應。在這種求解中，天線和能源的阻抗匹配是按照一般的線路理論來分別處理的。換言之，我們把能源一天線一空間做成的閉合系統分為兩個開敞系統，並且在求解時，又不嚴格的運用麥克斯韋電磁理論。這個粗略而簡單化了的處理方法，在一般工程應用上，一般是相當滿意而成功的。

不過近年來，超短波和微波日益廣泛地應用，迫使人們須要進一步地瞭解：天線上各部分電流的相互作用，和電流對能源的精確反應。假若我們如前段所述，忽視天線的有限邊界情形，又假設天線上電流是按正弦形分佈，那麼這種進一步地瞭解便不可能了。換句話說，就是我們必須把天線系統看做一個和激發能源相耦合的邊界值問題。也就是一個有限導體的受迫振盪問題。自從麥克斯韋和赫茲時代起，這個問題在理論上和實用上便一直被人們注意着<sup>[1]</sup>，尤其近年來，人們研究的興趣更濃厚而分析的方法也更精細了<sup>[2]</sup>。不過人們一向忽視而沒有清晰的區別：一個導體的受迫振盪可分為兩大類的這個問題。第一類是衍射問題，導體由入射波吸取電磁能而產生受迫振盪，再行輻射。至於入射波的能源却在我們研究的系統以外，不受衍射體的影響。第二類

\*1956 年 2 月 20 日收到。

就是我們現在所要討論的問題，導體（天線）直接與能源耦合而受激發，產生受迫振盪而行輻射，因之能源也受着輻射體的強烈反應。衍射問題的各種情形已經過許多作者詳盡地研究，存在着很多的權威著作；但是我們現在討論的能源一天線一空間的閉合系統的輻射問題，却一直沒有獲得正確的理論結構。本文的討論可以告訴我們上面這兩種分類的意義和重要性。總而言之，我們可以說：衍射問題是麥克斯韋電磁場的一個敞開系統問題，而本文所討論的天線輻射問題是一個閉合系統問題。

由上論列，我們知道，本文所要討論的一個有限導體的受迫振盪問題，實質上是一個麥克斯韋電磁場的閉合系統。它包括：(1) 能源；(2) 有限體積的輻射天線；和(3) 四周無限空間，經由這個空間電磁波能向外輻射出去。在這樣一個問題中，規定天線導體的有限幾何形狀和邊界是很容易的一件事。至於能源如何加在這個天線上，却並不是一個很簡單的問題。這方面金若那和他的合作者們曾作了一系列的研究<sup>[1]</sup>。根據物理和工程上的實際情況和數學演算上的方便，我們可以照金若那所用的辦法假設：能源是一個加在天線中部很小空隙上的有限電勢差 $V_0$ 。圖1就表示一個圓柱形天線導體的例子。因為能源空隙如此小，所以在天線兩半截上的電流可以說是連續的。有了上面的規定和瞭解，我們便可以進一步建立：天線導體和外面自由空間兩個介質中的麥克斯韋電磁場方程。因為沒有電磁波能從外面傳到這個系統上來，所以它必然是一個電磁場閉合系統。

為了明確地認識：這個問題需要嚴格地遵照麥克斯韋場理論處理的意義，我們不妨先看看有些作者們所用的方程系統。在天線導體介質(1)中，他們用

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1 = 0, & (a) \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_1 = \mathbf{J}_1 = \sigma_1 (\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}_1), & (b) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, & (c) \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_1, & (d) \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 = 0. & (e) \end{array} \right\} \quad (1)$$

式中沒有一撇的  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ , 和  $\mathbf{B}_1$  都是導體上感應電流  $\mathbf{J}_1$  和電荷  $\rho_1$  所產生的電磁場量。 $\mathbf{E}'_1$  是他們假設由能源所產生的唯一場量。由嚴格的麥克斯韋立場來看，方程系統(1)的不完備和不合理是很顯然的。無論該高頻率能源如何加在天線導體上，它不能僅僅產生一個場量  $\mathbf{E}'_1$ ，它必然同時產生一個位移電流  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'_1$  和相當的磁場  $\mathbf{H}'_1$

和  $\mathbf{B}'_1$ . 根據疊加原理，導體介質（1）中的完全麥克斯韋電磁場方程系統必須是：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}'_1 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}'_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1 = 0, \\ \nabla \times [\mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}_1] - \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}'_1 + \mathbf{D}_1] = \mathbf{J}_1 = \sigma_1 [\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}_1], \\ \nabla \cdot \mathbf{B}'_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \\ \nabla \cdot [\mathbf{D}'_1 + \mathbf{D}_1] = \rho_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 = 0; \end{array} \right\} \quad (2)$$

式中有一撇的場量是由能源產生的，沒有一撇的場量是導體介質中的反應。能源和反應的線性相互作用便完全由公式（2b）和（2d）所規定，而產生導體中的組合電流  $\mathbf{J}_1$  和電荷  $\rho_1$ .

在外面自由空間介質（2）中，因為它的電導率等於零，所以傳導電流和電荷都不能存在。因此相互作用公式（2b）和（2d）便分解開來，得到下列能源場和感應場兩組獨立方程系統：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}'_2 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}'_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_2 = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H}'_2 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_2 = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}'_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D}'_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

從能源和兩個介質中感應場的麥克斯韋場方程全備系統，一般的邊界條件告訴我們，在導體的邊界面上，兩個介質中的電場和磁場的切向分量必須是連續的：

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}_1]_{\tau} = [\mathbf{H}'_2 + \mathbf{H}_2]_{\tau}, \\ [\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}_1]_{\tau} = [\mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}_2]_{\tau}. \end{array} \right\} \quad (4)$$

從理論上講，假若能够知道兩個介質中能源場量的展開式  $\mathbf{E}'_{1,2}$  和  $\mathbf{H}'_{1,2}$ ，那麼我們一定能由公式（4）求出感應場量  $\mathbf{E}_{1,2}$  和  $\mathbf{H}_{1,2}$  和導體上的感應電流和電荷。不過，一般邊界關係（4）的重要關鍵和含義不在於展開能源場量的數學技巧，而在於能源場量和感應場量相互交連作用的基本概念。我們可以運用導體無限大電導率的理想極限情形來研究，便很容易瞭解這一個概念。當導體的電導率為無限大時，導體內的電磁場便等於零，而公式（4）也簡化成下列形狀：

$$\left. \begin{aligned} 0 &= [\mathbf{H}'_2 + \mathbf{H}_2]_{\perp}, \\ 0 &= [\mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}_2]_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

又因為能源和感應場量是空間和時間的連續函數，公式（5）的關係便不僅在兩介質的邊界面上是正確的，在外面自由空間的每一點它們也是正確的。這樣由於電磁場量分量的唯一性，我們便得到下面無耗損天線的一般關係：

$$\mathbf{H}'_2 + \mathbf{H}_2 = 0, \quad \mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}_2 = 0. \quad (6)$$

所以能源場量和感應場量在外面自由空間便恰恰相互抵消了。但這並不是說：一個受激發的無耗損天線不放出輻射。事實上，根據嚴格的麥克斯韋理論所得到的自然邏輯結果 [公式 (6)]，應該看做能源和響應之間的能量平衡關係。同樣，公式 (4) 對於一個電導率為有限的天線來講，能源除去供應輻射能外，還要有一個場量來克服天線的內部阻抗。因為麥克斯韋場方程潛蘊着能量平衡原則，所以我們對於一個包括能源的閉合系統所得到的邊界關係，也必然地潛蘊着同一原則。可見我們上面的演繹和解釋，並沒有在麥克斯韋系統外樹立新的概念。能源場量  $\mathbf{E}'_2$  和  $\mathbf{H}'_2$  僅僅是一個數學上的引導場量 (guide field)，感應場量  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$  必然依照它的模型而反應。這和一個簡單的力學閉合系統中“作用力和反作用力必然大小相等而方向相反”的原則是一樣的。這就是我們遵照麥克斯韋理論閉合邏輯演繹的特色，並且很清楚地告訴我們：能源僅僅供給輻射能，而其本身並不直接產生輻射。真正輻射源是該有形天線上的感應電流。同時上面的演繹也很清楚地將我們現在討論的問題和普通衍射問題區別開來。在衍射問題中，導體由外在能源接受電磁波能；所以從麥克斯韋場論觀點看，它是一個敞開系統。而在我們現在討論的問題中，導體直接由能源吸取能，並且依照該導體的幾何形狀和物理性質反應於能源，能源本身却並不產生輻射。因此從麥克斯韋場論觀點看，能源一天線一自由空間便做成一個閉合系統。

所以公式 (6) 是一個無輻射能源激發的無耗損天線的普遍輻射邊界條件。因為能源在一個理想導體天線內不產生電磁場，在外面自由空間的能源場量  $\mathbf{E}'_2$  和  $\mathbf{H}'_2$  便很容易由假定能源形狀而求得。在下面兩節中，我們將應用這個輻射邊界條件，來解決一個中部有能源電勢差  $V_0$  的有限圓柱形天線的問題。至於天線內部阻抗的影響，我們可以由假定的能源電壓的合適的徑向分佈補充上去。

瞭解了我們現在這個演繹的概念，和公式 (5) 和 (6) 對一個理想的無耗損天線的邊界條件的含義特性，我們可以進一步追究公式 (4) 對一個有限電導率天線的應用的全部意義。由於關係 (4) 中兩個方程的相同意義，我們只須要討論第二個關係電場

的方程便够了。根據公式(5)和(6)，可見  $E'_2$  和  $E_2$  的輻射部分恰恰相互抵消，於是公式(4)右側所剩下的便只有“剩餘”或“地方”場量了。假若我們讓

$$\left. \begin{array}{l} E'_2 = E'_{2(\text{rad})} + E'_{2(\text{local})}, \\ E_2 = E_{2(\text{rad})} + E_{2(\text{local})}, \end{array} \right\} \quad (7)$$

而由公式(5)和(6)，輻射場量相互抵消：

$$E'_{2(\text{rad})} + E_{2(\text{rad})} = 0 \quad (8)$$

那麼關係(4)中的第二公式便簡化為下列形狀：

$$[E'_1 + E_1]_r = [E'_{2(\text{local})} + E_{2(\text{local})}]_r \quad (9)$$

由公式(8)、(9)兩個聯立方程，假若能源場量是知道的話，在理論上我們便可以完全決定感應場  $E_2$  的輻射部分和地方部分。不過這種求解有雙重困難：第一，即使能源電壓在天線空隙處有極簡單的規定，能源所產生的電磁場量仍極難求得；第二，公式(8)和(9)做成的聯立積分微分方程的求解，即使非完全不可能，也是非常繁複的。就是由於這兩重困難，我們不得不求助於公式(5)或(6)的簡單輻射邊界條件，來解決無耗損天線在外面自由空間的輻射問題。事後再用微擾方法來計算一個有耗損天線的內部阻抗的影響。

由上所述，我們的準確演繹所闡明的物理意義是非常重要，而且富於包含性的。除去上面所討論的，關於能源場量和感應場量產生和作用的基本概念外，現在這個“閉合演繹”特別顯示了能源和感應間相互作用的意義。我們可以規定能源的樣式；但是在不知道反應精確函數前，我們無法任意規定能源的場量展開函數。它們必須在麥克斯韋系統內相容，並且遵守公式(2)和(3)所含蘊的直線疊加原理。這自然是任何一個物理現象的閉合演繹的特色。愛因斯坦的普遍引力理論的演繹就是一個例子。在我們現在這個問題中，只要實際空間介質有一點點消耗，那麼能源場量和反應場量便在整個時空系統中相互交連相互作用着。因此在這種普遍的情形下，要在麥克斯韋系統內求能源場量和反應場量的準確平衡情態，是極其困難而幾乎不可能的事。所幸運的是，在無耗損天線和自由真空的理想極限情形下，我們得到極簡單的輻射邊界條件的公式，並且它們的求解是一目了然的。

## 二. 能源和天線系統的符號和命名

參看圖1，本文中所用的符號和命名可以總敍如下：

$2h$ ——圓柱形天線的總長；

- a——天線的半徑；  
 b——極薄圓柱面表層厚度，在這個薄層內有高頻率電流流過， $b \ll a$ ；  
 $V_0$ ——能源（或稱薄片電壓源）的電勢差，它是具有圓形對稱性的；  
 $(\pm 0, \rho_0, \varphi_0)$ ——在表層  $b$  內，薄片電壓源每一點的坐標， $\rho_0 \doteq a$ ；  
 $(\zeta, \rho_0, \varphi_0)$ ——在表層  $b$  內，具有圓形對稱感應電流  $I(\zeta)$  每點的坐標， $\rho_0 \doteq a$ ；  
 $(z, r, \theta)$ ——觀測點  $P$  的坐標；  
 $(\pm h, \rho_0, \varphi_0)$ ——圓柱體底面電荷  $Q(\pm h)$  每一點的坐標， $\rho_0 \doteq a$ ；  
 $I(\zeta)$ ——在薄層  $b$  內，平均感應電流密度。和它相當的體積電荷密度是  $q$ ；  
 $Q(\pm h)$ ——平均底面電荷密度；  
 $e^{-j\omega t}$ ——指數時間係數；  
 $k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + j \omega \mu_1 \sigma_1$ ，是圓柱形導體介質（1）的傳播常數；  
 $k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 + j \omega \mu_2 \sigma_2$ ，是外面自由空間介質（2）的傳播常數；  
 $R_0 = [r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z - 0)^2]^{\frac{1}{2}}$ ，為觀測點  $P$  到電源每點的距離；  
 $R_1 = [r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z - \zeta)^2]^{\frac{1}{2}}$ ，為觀測點  $P$  到感應電流每點的距離；  
 $R_2 = [r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z - h)^2]^{\frac{1}{2}}$ ，為觀測點  $P$  到底面電荷  $Q(+h)$  的距離；  
 $R_3 = [r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z + h)^2]^{\frac{1}{2}}$ ，為觀測點  $P$  到底面電荷  $Q(-h)$  的距離；  
 $d\Pi_0 = \hat{z}e^{-j\omega t} \frac{V_0 b \rho_0 d\varphi_0}{4\pi R_0} e^{jk_2 R_0}$ ，是電壓源每一部分  $(\pm 0, \rho_0, \varphi_0)$  的赫茲函數展開式（關於它的導演，請參看附錄）；  
 $d^2\Pi = \hat{z}e^{-j\omega t} \frac{I(\zeta) d\zeta \rho_0 d\varphi_0}{-j4\pi\omega\epsilon_2 R_1} e^{jk_2 R_1}$ ，是感應電流  $I(\zeta) d\zeta$  每點的赫茲函數展開式；

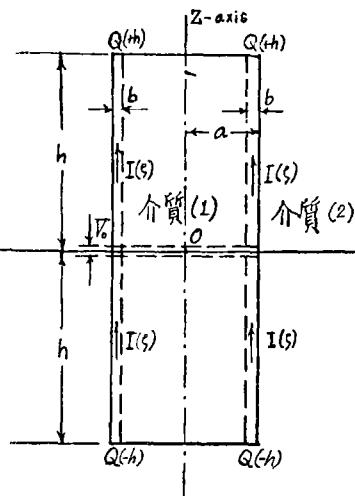


圖 1. 圓柱形天線模型

(10)

$$d\Pi_0 = \hat{z}e^{-j\omega t} \frac{V_0 b \rho_0 d\varphi_0}{4\pi R_0} e^{jk_2 R_0}, \text{ 是電壓源每一部分 } (\pm 0, \rho_0, \varphi_0) \text{ 的赫茲函數展開式(關於它的導演, 請參看附錄);} \quad (11)$$

$$d^2\Pi = \hat{z}e^{-j\omega t} \frac{I(\zeta) d\zeta \rho_0 d\varphi_0}{-j4\pi\omega\epsilon_2 R_1} e^{jk_2 R_1}, \text{ 是感應電流 } I(\zeta) d\zeta \text{ 每點的赫茲函數展開式;} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q(+h) &= -j\omega Q(+h) = I(+h), \\ \frac{\partial}{\partial t} Q(-h) &= -j\omega Q(-h) = -I(-h) = -I(+h), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{是底面電荷 } Q(\pm h) \\ \text{的連續性方程;} \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} d\phi &= e^{-j\omega t} \frac{Q(+h) b \rho_0 d\varphi_0}{4\pi \epsilon_2 R_2} e^{ik_2 R_2} + e^{-j\omega t} \frac{Q(-h) b \rho_0 d\varphi_0}{4\pi \epsilon_2 R_3} e^{ik_2 R_3} = \\ &= e^{-j\omega t} \frac{I(+h) b \rho_0 d\varphi_0}{-j4\pi\omega\epsilon_2 R_2} e^{ik_2 R_2} + e^{-j\omega t} \frac{I(+h) b \rho_0 d\varphi_0}{j4\pi\omega\epsilon_2 R_3} e^{ik_2 R_3}, \end{aligned} \quad (14)$$

為兩底面電荷  $Q(\pm h)$  相當每點的標量電勢函數。

在本文中用 M. K. S. 合理化了的單位來計算一切公式和場量。

### 三. 一個能源激發的有限圓柱形天線的理論

圖 1 表示一個有限圓柱形天線，在它的長度中部有一個薄片電壓源。在非常高的頻率下，沿圓柱軸的電流可以證明是局限於很薄的表面層內。因為我們現在的興趣是研究高頻率能源激發的天線，所以我們可以假設該電流表面層的厚度為  $b$ ，同時  $b$  比圓柱半徑  $a$  小得多。因此該薄電流層到圓柱軸的距離  $\rho_0$  可以說和半徑  $a$  相等，如第二節中各公式所標明着的。在天線內沿徑向電流雖不是完全等於零，但是和在  $b$  層內主要的軸向電流相比，它在實際計算輻射場時是可以完全忽略的。因為軸向電流於達到圓柱兩底面時不一定等於零，我們自然可以假設在該兩底面有表面電荷存在着，它們並且滿足連續性方程 [公式 (13)]。上面這個簡單模型便很精確地代表了一個有限圓柱形天線在高頻率能源激發下的真實情況，同時對麥克斯韋系統講它是具有唯一性的。

現在我們可以應用輻射邊界關係 (6) 到圖 1 所示的簡單模型，並且計算沿  $z$  軸的電場分量：

$$[\mathbf{E}'_2 + \mathbf{E}_2]_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\Pi_0 + \Pi] + k_2^2 [\Pi_0 + \Pi] - \frac{\partial}{\partial z} \phi = 0. \quad (15)$$

在上式中， $\Pi_0$  是能源的總赫茲函數， $\Pi$  是感應電流和體積電荷密度  $q$  所產生的總赫茲函數， $\phi$  是兩底面電荷所產生的總標量電勢。因為電場的徑向或  $r$ -分量可以利用麥克斯韋場方程由它的  $z$ -分量確切地計算出來，所以我們在公式 (15) 中計算  $z$ -分量就够了。

三個函數  $\Pi_0$ ， $\Pi$  和  $\phi$  的微分形式都已在第二節中由公式 (11)，(12) 和 (14) 表達了。由於在天線兩半截的能源、感應電流和底面電荷有反對稱性，我們只需要計算沿正  $z$  軸的場量就够了。圖 2 表明了三個不同區域，在各區域中各勢函數必須正

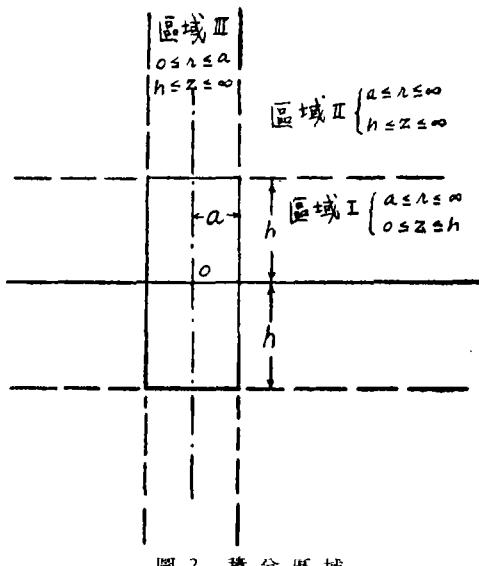


圖 2. 積分區域

確地展開。下面就是它們的演導。

在能源赫茲函數  $\Pi_0$  中，我們先展開下式：<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik_2 R_0}}{R_0} &= \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z-0)^2} e^{i\lambda z} d\lambda = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \sum_n \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{in(\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda z} d\lambda, & r > \rho_0, \\ \sum_n \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{in(\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda z} d\lambda, & r < \rho_0. \end{array} \right\} (16) \end{aligned}$$

將 (16) 式代入公式 (11)，並對  $\varphi_0$  積分 (0 到  $2\pi$ )，我們便得到總能源赫茲函數

$$\Pi_0 = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-i\omega t} \left( \frac{j V_0}{4} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda, & r > \rho_0, \\ e^{-i\omega t} \left( \frac{j V_0}{4} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda, & r < \rho_0. \end{array} \right\} (17)$$

在感應電流  $I(\zeta)$  的赫茲函數  $\Pi$  中，我們展開

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} &= \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + (z - \zeta)^2} e^{i\lambda|z - \zeta|} d\lambda = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \sum_n \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{in(\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda|z - \zeta|} d\lambda, & r > \rho_0, \\ \sum_n \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{in(\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda|z - \zeta|} d\lambda, & r < \rho_0. \end{array} \right\} (18) \end{aligned}$$

將 (18) 式代入公式 (12), 並對  $\varphi_0$  積分, 我們得到:

$$d\Pi = \left\{ \begin{array}{l} e^{-i\omega t} \frac{I(\zeta) d\zeta}{-4\omega \epsilon_2} \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda|z-\zeta|} d\lambda, \quad r > \rho_0 \\ e^{-i\omega t} \frac{I(\zeta) d\zeta}{-4\omega \epsilon_2} \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda|z-\zeta|} d\lambda, \quad r < \rho_0. \end{array} \right\} \quad (19)$$

在我們現在研究的問題中, 我們只需要將 (19) 式在區域 (II) 中對  $\zeta$  積分, 並且得到:

$$\Pi = e^{i\omega t} \left( \frac{1}{-2\omega \epsilon_2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \times \\ \times H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) d\lambda e^{i\lambda z} \left[ \int_0^h I(\zeta) \cos \lambda \zeta d\zeta \right]. \quad (20)$$

在底面電荷所產生的標量勢函數  $\phi$  中, 我們先展開

$$\frac{e^{i\lambda h R_{2,3}}}{R_{2,3}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_n \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i n (\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda|z \mp h|} d\lambda, \quad r > \rho_0 \\ \sum_n \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_n^{(1)}(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i n (\varphi_0 - \theta)} e^{i\lambda|z \mp h|} d\lambda, \quad r < \rho_0. \end{array} \right\} \quad (21)$$

將 (21) 式代入公式 (14), 並且對  $\varphi_0$  積分, 我們便得到在區域 (II) 中的  $\phi$  函數:

$$\phi = e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{-2\omega \epsilon_2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \times \\ \times H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} [-I(h) i \sin \lambda h] d\lambda. \quad (22)$$

將公式 (17)、(20) 和 (22) 代入輻射邊界關係 (15), 我們便得到在區域 (II) 中的下列恆等式:

$$e^{-i\omega t} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) d\lambda e^{i\lambda z} \times \\ \times \left\{ (k_2^2 - \lambda^2) \left[ \frac{V_0}{2} - \frac{1}{j\omega \epsilon_2} \int_0^h I(\zeta) \cos \lambda \zeta d\zeta \right] + \frac{\lambda \sin \lambda h}{j\omega \epsilon_2} I(h) \right\} = 0. \quad (23)$$

在區域 (I) 中我們也可以得到同樣的恆等式, 不過對  $\zeta$  的積分很是繁複, 我們此處不加演繹了。在 (23) 式中只要花括弧中的函數恆等於零, 那麼無論在輻射場中或在邊界上公式 (23) 便完全滿足了。因此我們有下列關係:

$$\int_0^h I(\zeta) \cos \lambda \zeta d\zeta = \frac{j\omega \epsilon_2 V_0}{2} + \frac{\lambda \sin \lambda h}{k_2^2 - \lambda^2} I(h) \quad (24)$$

來求一個無耗損天線像圖 1 所示簡單模型中的電流分佈函數  $I(\zeta)$ 。由圖 1 這個天線的簡單模型, 我們知道  $I(\zeta)$  是  $\zeta$  的偶函數。它必須也是  $\lambda$  的偶函數, 因為假若

$I(\zeta)$  是  $\lambda$  的奇函數的話，那麼感應赫茲函數  $\Pi$  中的對  $\lambda$  的積分便將使  $\Pi$  恆等於零。由上論列，我們可以設公式 (24) 中  $I(\zeta)$  的嘗試解為

$$I(\zeta) = \frac{j\omega \epsilon_2 V_0}{h} G(\lambda) \cos \lambda \zeta; \quad (25)$$

式中  $G(\lambda)$  必須是  $\lambda$  的偶函數，而且是無量綱的。將 (25) 式代入公式 (24) 的兩邊，同時對  $\zeta$  積分，我們便得到  $G(\lambda)$  的解：

$$G(\lambda) = \frac{2\lambda h}{2\lambda h + \sin 2\lambda h} \left[ 1 - \frac{\lambda \sin \lambda h}{k_2^2 - \lambda^2} \cdot \frac{4\lambda}{2\lambda h + \sin 2\lambda h} \cos \lambda h \right]. \quad (26)$$

所以  $G(\lambda)$  確實同時是  $\zeta$  和  $\lambda$  的偶函數。

我們此處自然應該注意到：公式 (25) 仍然是  $I(\zeta)$  的運算函數，它的運算參量就是  $\lambda$ 。當我們把公式 (25) 的  $I(\zeta)$  代入公式 (20) 和 (22)，並且對  $\lambda$  積分後，我們才得到感應勢函數的代數解。將這些  $\Pi$  和  $\phi$  的代數解代入

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \nabla \nabla \cdot \Pi - \mu_2 \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi - \nabla \phi \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_2 &= \mu_2 \epsilon_2 \nabla \times \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi \right) \quad \text{或} \quad \mathbf{H}_2 = j\omega \epsilon_2 \nabla \times \Pi, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

我們便得到空間介質 (2) 中場量  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$  的代數解。最後，從下列簡單公式：

$$I(z) = \frac{1}{b} [H_{2\theta}]_{r=r_0} = \frac{-j\omega \epsilon_2}{b} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \Pi \right]_{r=r_0}, \quad (28)$$

我們便得到天線上電流分佈的代數解。上列求解步驟是任何一個邊界值問題在複數面上（此處的  $\lambda$ -面）積分求解的特色。在我們現在這個問題中，由天線導體有限邊界所引起的諧波或駐波，也必須在運算形式經由  $\lambda$ -積分變成代數形式後，才會呈現出來。

由公式 (28) 得出電流分佈函數後，我們便可以給一個無耗損天線的激發點導納或阻抗以下列定義關係：

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{2\pi \rho_0 b}{V_0} I(0) = \frac{-j2\pi \rho_0 \omega \epsilon_2}{V_0} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \Pi \right]_{s=0, r=r_0}; \quad (29)$$

式中  $Y_0$  和  $Z_0$  為天線中部能源所在地的激發點導納和阻抗。

### 區域 (I) 中 $\Pi$ 函數的計算

現在我們將公式 (25) 中的  $I(\zeta)$  代入公式 (19)，並在區域 (I) 中對  $\zeta$  積分。因為  $I(-\zeta) = I(\zeta)$ ，我們只須要算  $0 \leq z \leq h$  的範圍，相當於天線上半部的區域。

在這個  $z$  的範圍中，運算參量  $\lambda$  必須有一個正的虛數部分。

$$\begin{aligned} \Pi &= e^{-i\omega t} \left( \frac{jV_0}{-4h} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) G(\lambda) d\lambda \left[ \int_{-h}^{+h} e^{i\lambda|z-\zeta|} \cos \lambda \zeta d\zeta \right] = \\ &= \cdots \int \cdots d\lambda \left[ 2 e^{i\lambda z} \int_0^z (\cos \lambda \zeta)^2 d\zeta + 2 \cos \lambda z \int_z^h e^{i\lambda \zeta} \cos \lambda \zeta d\zeta \right] = \\ &= \cdots \int \cdots d\lambda \left[ 2 \cos \lambda z \int_0^h (\cos \lambda \zeta)^2 d\zeta \right] = \cdots \int \cdots d\lambda \left[ \frac{2 \cos \lambda z}{4\lambda} (2\lambda h + \sin 2\lambda h) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

最後兩行可由對  $\lambda$  積分的偶函數和奇函數性質得到。公式 (30) 中的因子

$$2e^{-i\omega t} \cos \lambda z = e^{i(\lambda z - \omega t)} + e^{-i(\lambda z + \omega t)},$$

很清楚地指示出來：這個感應赫茲勢函數或電流是一個駐波，也就是說，對  $\lambda$  的各個本徵值的多次反射波。對一個無耗損天線的兩個平底面的影響講，這又正是我們所期望得到的結果。由於公式 (30) 中對  $\lambda$  的積分量有偶函數性質，在  $\lambda$ -平面的積分計算可寫成下列形式：

$$\begin{aligned} \Pi &= e^{-i\omega t} \left( \frac{jV_0}{-4h} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \times \\ &\quad \times e^{i\lambda z} \left[ 1 - \frac{2\lambda^2 \sin 2\lambda h}{(k_2^2 - \lambda^2)(2\lambda h + \sin 2\lambda h)} \right]^{-1} d\lambda. \quad (31) \end{aligned}$$

至於兩底面電荷所引起的標量勢函數  $\phi$  則具下列形狀：

$$\begin{aligned} \phi &= e^{-i\omega t} \left( \frac{jV_0}{-4h} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} b \rho_0 J_0(\rho_0 \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) \times \\ &\quad \times e^{i\lambda z} \left[ \frac{2\lambda h + \sin 2\lambda h}{2\lambda h \sin 2\lambda h} - \frac{\lambda h}{h^2(k_2^2 - \lambda^2)} \right] d\lambda. \quad (32) \end{aligned}$$

公式 (31) 中的積分量表明：我們可以在  $\lambda$ -平面的上半部加一無限大的半圓周，做成一閉合曲線積分而不影響其結果。如圖 3 所示： $\lambda = +k_2 = +(\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 +$

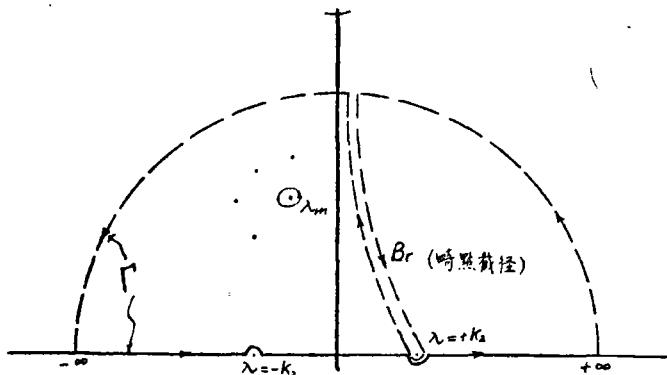


圖 3.  $\lambda$ -平面積分曲線

$j\omega\mu_2\sigma_2)^{\frac{1}{2}}$  點是閉合積分曲線  $\Gamma$  中的一個畸點 (branch point)，而  $\lambda = -k_2$  點却應當摒諸閉合曲線  $\Gamma$  以外。公式 (31) 中的積分量，除去在  $\lambda = +k_2$  的畸點外，尚具有相當於下列超函數 (transcendental equation)

$$1 - \frac{2\lambda^2 \sin 2\lambda h}{(k_2^2 - \lambda^2)(2\lambda h + \sin 2\lambda h)} = 0 \quad \text{或} \quad \sin 2\lambda h = \frac{2\lambda h(k_2^2 - \lambda^2)}{3\lambda^2 - k_2^2}, \quad (33)$$

的根的無數個簡單極點 (poles)。我們很容易證明  $\lambda = 0$  並不是公式 (33) 的一個根，它所有的根都是必須具有正虛數部分的複數。我們讓  $\lambda'_m s$  代表超函數 (33) 的各複數根，讓  $Br$  代表從  $\lambda = +k_2$  到無限遠的合適畸點截徑。這樣公式 (31) 的積分結果便可以寫如：

$$\Pi = \dots \oint_{\Gamma} \dots d\lambda = \dots \int_{Br} \dots d\lambda + 2\pi j \sum_m R_m(\lambda_m) \quad (34)$$

在各極點  $\lambda'_m s$  的剩餘值 (residues)  $R'_m s$  都具有一負指數減幅因子，所以這些相當的剩餘波 (residue wave) 便真是集聚在能源點 ( $z = \pm 0$ ) 的地方性的波。在天線上離能源點 (或面) 稍遠處這些剩餘波便因減幅而非常微弱了。因此在天線上各點  $z \neq \pm 0$  時， $\Pi$  積分式主要部分是由沿畸點截徑 (branchcut) 積分得來，而這些剩餘波  $R'_m s$  便完全可以忽略不計了。不過這個沿畸點截徑積分的精確計算仍然是非常繁複的。所以在討論下列兩種情形時：

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) 非諧振情形: } 2k_2 h \neq n, \text{ 或 } h \neq \frac{n\lambda_0}{4} \\ \text{(b) 諧振情形: } 2k_2 h = n, \text{ 或 } h = \frac{n\lambda_0}{4} \end{array} \right\} n = 1, 2, 3 \dots, \quad (35)$$

我們將採用合適的近似計算方法。在公式 (35) 中  $\lambda_0$  代表能源頻率在自由空間的波長。

(a) **非諧振情形** 由公式 (31)、(34) 和圖 3，我們可以注意到，當我們沿着畸點截徑  $Br$  上升時，愈來愈大的負指數減幅因子使積分結果主要部分來自  $\lambda$  靠近  $k_2$  處。於是在  $\lambda \approx k_2$  附近，我們可以將積分符號內變值很慢的各項因子移出去，這樣便得到：

$$\Pi = e^{-j\omega t} \left( \frac{jV_0\rho_0 b}{8k_2^2} \right) \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{\sin 2k_2 h} \int_{Br} (k_2^2 - \lambda^2) H_0^{(1)}(r\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{j\lambda z} d\lambda \quad (36)$$

公式 (31) 中的  $J_0(\rho_0\sqrt{k_2^2 - \lambda^2})$  一項在  $\lambda \approx k_2$  附近可當作常數  $J_0 = 1$  看待。這樣得到的公式 (36)，在積分符號內已經完全沒有極點了，所以我們可以將沿畸點積分

截徑  $B_r$  放回原來實數軸位置, 得到下列結果:

$$\begin{aligned}\Pi &= e^{-i\omega t} \left( \frac{j V_0 \rho_0 b}{8 k_2^2} \right) \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{\sin 2k_2 h} \int_{-\infty}^{+\infty} (k_2^2 - \lambda^2) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda = \\ &= e^{-i\omega t} \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right) \left( \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2k_2^2 \sin 2k_2 h} \right) \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda = \\ &= e^{-i\omega t} \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right) \left( \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2k_2^2 \sin 2k_2 h} \right) \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[ \frac{e^{ik_2 z} \sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right].\end{aligned}\quad (37)$$

式中最後一行係由球面波的傅里葉換式得來, 在  $r > 0$  時對  $z$  等於任何值, 它都有均勻收斂性, 所以它是可以對  $z$  微分的。

(b) 諧振情形 假若我們不需要更精確計算公式 (31) 的話, 在諧振情形下它的解答自然也是公式 (37). 不過當在諧振時  $2k_2 h = n\pi$ , 所以下列一項因子成爲無限大:

$$\frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2k_2^2 \sin 2k_2 h} = 2h^2 \left( \frac{n\pi + \sin n\pi}{n^2 \pi^2 \sin n\pi} \right) = \infty. \quad (37a)$$

這正好表示這個無耗損天線系統在真空中對能源頻率的諧振現象。可見在我們現在這個理論中, 近似求解的結果並未遺失這個重要的結論。它是天線和空間交連着的閉合系統對能源的諧振反應。這個久已熟知的現象和工程方面的應用, 總算在理論上得到了簡單數學公式的論證。在我們所處的真實宇宙空間, 必然存在着耗損, 而放出的電磁波能也必定被吸收淨盡或轉變爲他種能, 因之  $k_2^2$  必然具有一正的虛數部分:

$$k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 + j \omega \mu_2 \sigma_2;$$

其中  $\sigma_2 \neq 0$ , 但很小。所以上面公式 (37a) 的諧振項因子雖是很大, 但並不會成爲無限大。在我們這個簡單的理論中, “能源一天線一空間”這個閉合系統諧振現象的自然出現, 是很可欣慰的。

### 由兩底面電荷所引起的 $\phi$ 函數的計算

同樣在標量勢函數  $\phi$  [公式 (32)] 的積分中, 我們也得到繞過畸點  $\lambda = +k_2$  的截徑積分, 和相當於公式 (33) 的無數個複根  $\lambda_m'$  的極點。圍繞這些極點  $\lambda_m'$  積分所得到的剩餘波確實在天線上離能源 ( $z = \pm 0$ ) 一點點距離便消失了。積分主要部分係由沿畸點  $\lambda = +k_2$  截徑得來。用相同於前面計算  $\Pi$  函數的方法, 我們便得到

$$\phi = e^{-i\omega t} \left( \frac{-j V_0 \rho_0 b}{2k_2} \right) \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[ \frac{e^{ik_2 z} \sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]; \quad (38)$$

這個標量勢函數  $\phi$  是沒有諧振現象的。

#### 四. 重要公式的導演和討論

根據前節所得矢量勢  $\Pi$  和標量勢  $\phi$  的計算，我們可以對下列各重要問題作相當詳盡的討論。

$$(1) \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [e^{ik_2 \sqrt{r^2+z^2}} / \sqrt{r^2+z^2}] \equiv T(r, z) \text{ 的展開}$$

將  $T(r, z)$  中有關微分運算展開，我們便得到

$$T(r, z) = \frac{e^{ik_2 R}}{R^2} \left[ \frac{k_2^2 r^2}{R^2} + j \frac{k_2}{R} \left( 1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) + \frac{1}{R^2} \left( \frac{3z^2}{R^2} - 1 \right) \right]; \quad (39)$$

式中  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . 在輻射區域中，當  $r \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \infty$  和  $R \rightarrow \infty$  時，公式 (39) 中方括弧裏便只有第一項仍為有限量，也就是

$$T(r, z) = \frac{k_2^2 r^2}{R^3} e^{ik_2 R}. \quad (40)$$

在感應區域中，尤其是在天線導體表面上，公式 (39) 中的三項便都需要保留在計算中。

#### (2) 天線的輻射能、天線效率

由公式 (27)，自由空間中的感應電場和磁場具有下列形狀：

$$\left. \begin{aligned} E_{2z} &= \left( k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi - \frac{\partial}{\partial z} \phi \\ E_{2r} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Pi - \frac{\partial}{\partial r} \phi \\ H_{2\theta} &= -j\omega \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial r} \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

在下面計算中，我們為以後討論的方便，可以提出下列“幾何諧振因子”  $g_0(h)$  的定義：

$$g(h) = \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2k_2^2 \sin 2k_2 h} \equiv \frac{1}{k_2^2} g_0(h)$$

$$\text{或 } g_0(h) = \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2 \sin 2k_2 h}. \quad (42)$$

將前節所得勢量  $\Pi$  和標量  $\phi$  的公式 [(37) 和 (38)] 代入公式 (41) 中，我們便得到輻射區域中各電磁場分量：

$$\left. \begin{aligned} E_{2z} &= e^{j(k_2 R - \omega t)} \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right) \left[ k_2^4 g(h) \frac{r^4}{R^5} - k_2^2 \frac{r^2 z}{R^4} \right], \\ E_{2r} &= e^{j(k_2 R - \omega t)} \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right) \left[ -k_2^4 g(h) \frac{r^3 z}{R^5} - k_2^2 \frac{r^3}{R^4} \right], \\ H_{2\theta} &= e^{j(k_2 R - \omega t)} \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{\omega \mu_2} \right) \left[ -k_2^5 g(h) \frac{r^3}{R^4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

在輻射區域中，能流矢量（烏莫夫－鮑因廷矢量）的時間平均值是：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* = \frac{1}{2} [\hat{z}(E_{2r} H_{2\theta}^*) + \hat{r}(-E_{2\theta} H_{2\theta}^*) + \hat{\theta}(0)], \quad (44)$$

它的徑向分量是

$$S_r = -\frac{1}{2} E_{2r} H_{2\theta}^* = \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right) \left( \frac{1}{\omega \mu_2} \right) \left[ k_2^9 g^2(h) \frac{r^7}{R^9} - k_2^7 g(h) \frac{r^5 z}{R^8} \right]. \quad (45)$$

將  $S_r$  在無限大的圓柱體表面上積分，便得到沿徑向的總能流  $\bar{W}_r$ ，

$$W_r = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_r 2\pi r dz \right]_{r \rightarrow \infty} = \left( \frac{V_0 \rho_0 b}{2} \right)^2 \left( \frac{2\pi}{\omega \mu_2} \right) k_2^9 g^2(h) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^8}{R^9} dz \right]_{r \rightarrow \infty}. \quad (46)$$

公式 (45) 中的第二項是  $z$  的奇函數，所以它的積分等於零。這表明了，由天線兩底面上的電荷  $Q(\pm h)$  所引起的  $E_{2r}$  分量，也就是  $E_{2r}$  和  $S_r$  公式中的第二項，便不真正產生輻射。這個結果便告訴我們：兩底面電荷是這個天線系統的地方性的不連續性，它僅僅影響了感應電場。將公式 (46) 中的積分算出，我們便得到-

$$W_r = \left[ \frac{(V_0 2\pi \rho_0 b)^2 \omega^4 \mu_2^2 \epsilon_2^3}{12\pi \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \right] \left[ \frac{48}{35} g_0^2(h) \right] = \left[ \frac{P_0^2 \omega^4 \mu_2 \epsilon_2}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \right] \left[ \frac{48}{35} g_0^2(h) \right]; \quad (47)$$

式中  $P_0 = (\epsilon_2 V_0 2\pi \rho_0 b) = (p_0 2\pi \rho_0 b)$  代表薄片電壓源的總偶極矩。公式 (47) 中的第一項表示：一個具有極矩  $P_0$  的偶極子每秒鐘輻射的能量<sup>[5]</sup>。第二項是一個無量綱的因子，它表示這個有限圓柱形天線輻射和一個沒有長度的偶極子輻射相比的效率。

將  $S_z$  在無限大的圓柱體的兩底面上作面積積分，我們便得到沿  $z$  軸向的總能流

$$W_z = \left[ \int_0^\infty (+S_z) 2\pi r dr \right]_{z \rightarrow +\infty} + \left[ \int_0^\infty (-S_z) 2\pi r dr \right]_{z \rightarrow -\infty} \equiv 0. \quad (48)$$

這正是我們所希望的，因為在天線兩半截上電壓和感應電流的反對稱性，所以沿軸向的總能流等於零。就輻射來說，這便證實了天線介質中  $E_z$  分量是可忽略不計的。

由上可見天線系統輻射出來的總能流便由公式 (47) 所完全代表了。假若我們讓

$$W_0 = \frac{P_0^2 \omega^4 \mu_2 \epsilon_2}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (49)$$

表示一個赫茲偶極子  $P_0$  的輻射，我們便可以用  $\eta$  表示這個天線的效率：

$$W = W_r = \eta W_0; \quad (50)$$

式中  $\eta = \frac{48}{35} g_0^2(h) = \frac{48}{35} \left( \frac{2k_2 h + \sin 2k_2 h}{2 \sin 2k_2 h} \right)^2.$

當天線的半長 ( $h$ ) 近似地等於自由空間波長的四分之一 ( $\lambda_0/4$ ) 或其倍數時，效率  $\eta$  便很大。也就是這個“天線和自由空間”系統和外加能源頻率有輻射諧振。以往這方面的經驗告訴我們：這個關於能源激發天線的簡單理論，把它看做一個真正輻射邊界條件問題，在原則和計算上都是正確的。能源本身並不直接輻射，而是和“天線空間”有輻射諧振。

### (3) 中心激發天線的本徵輻射電阻

在定義本徵輻射電阻之前，我們必須先計算在天線中部  $z = \pm 0$  處電流的輻射部分。後者就是在  $\Pi$  函數中沿崎點截徑的積分。由公式 (28)、(37) 和 (39)，我們得到

$$I_r(0) = \frac{-j\omega \epsilon_2 2\pi \rho_0}{b} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \Pi \right]_{\substack{r=0 \\ r=\rho_0}} = \frac{V_0 \pi \rho_0 b}{\omega \mu_2} k_2^3 g_0(h) e^{j(k_2 \rho_0 - \omega t)}; \quad (52)$$

它的有效值是

$$I_{r,\text{eff}} = \frac{V_0 \pi \rho_0 b}{\omega \mu_2 \sqrt{2}} k_2^3 g_0(h). \quad (53)$$

本徵輻射電阻  $R_{\text{rad}}$  的定義便由下列公式確定：

$$W = (I_{r,\text{eff}})^2 R_{\text{rad}}. \quad (54)$$

由公式 (47)，我們便得到

$$R_{\text{rad}} = \frac{32}{35\pi} \sqrt{\frac{\mu^2}{\epsilon^2}} = \frac{32}{35\pi} (120\pi) = 109.7; \quad (55)$$

它差不多是自由空間對平面電磁波的輻射電阻的四分之一。由它的定義可見它確是一個中心激發天線的本徵電阻，和天線的長度無關。

### (4) 中心激發天線的激發點輻射電阻

激發點輻射電阻  $R_{\text{ant}}$  的定義公式是

$$I_{r,\text{eff}} R_{\text{ant}} = V_0. \quad (56)$$

將公式 (53) 的  $I_{r,\text{eff}}$  代入上式，我們便得到：

$$R_{\text{ant}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^3} \frac{1}{g_0(h)} \frac{\lambda_0^2}{\rho_0 b} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon^2}}. \quad (57)$$

可見  $R_{\text{ant}}$  隨下列兩個因子而變：幾何諧振因子  $g_0(h)$  和波長-截面因子  $\frac{\lambda_0^2}{\rho_0 b}$ 。因為天線中的電流隨這個電阻而變，所以它是圓柱天線和自由空間系統對激發電壓的輻射電阻。上面兩個幾何因子也表示出這個天線系統幾何構造的重要性。外加能源激

發頻率愈高，也就是激發波長愈短，那麼這個電阻便愈小，而這個天線便也是更有效的輻射者。假若外加激發頻率是固定的，那麼在幾何諧振情形下 ( $g_0(h) \rightarrow \infty$ )，電阻便最低而電流的輻射部分便最大。這個關係對一個圓柱形天線的設計來講，自然是顯而易見的。

### (5) 電流輻射部分在天線上的分佈

從  $\Pi$  函數展開式的第一項所得出的電流輻射部分，在天線上的分佈便有下列形式：

$$I_r(z) = \frac{V_0 4\pi^3 b g_0(h)}{\zeta_0 \lambda_0^2} \cdot \frac{\rho_0^5}{(\rho_0^2 + z^2)^2} \cos(k_2 \sqrt{\rho_0^2 + z^2}), \quad \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_0}}. \quad (58)$$

正如我們所希望的，它和外加電壓  $V_0$  是同相的；不過它的分佈却和一個真正餘弦形分佈有很大的偏差。

### (6) 總電流在天線上的分佈

包含一個輻射部分和一個感應部分的總電流，它的分佈由下列方程得出：

$$I(z) = e^{-j\omega t} \left( \frac{V_0 \pi \rho_0^2 b}{j\omega \mu_2} \right) g_0(h) \left[ \frac{\partial}{\partial r} T(r, z) \right]_{r=\rho_0}; \quad (59)$$

式中  $T(r, z)$  由公式 (39) 表示，而

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} T(r, z) = & e^{jk_2 R} \left[ \frac{j k_2^3 r^3}{R^4} + \frac{4 j k_2 z^2 r - 2 k_2^2 r^3 + 3r}{R^5} + \right. \\ & \left. + \frac{12 j k_2 z^2 r - 3 j k_2 r^3}{R^6} - \frac{15 z^2 r}{R^7} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

公式 (58) 所表示的電流輻射部分便是由公式 (60) 的第一項演算得來。其餘三項便是電流的感應部分，它在天線附近區域，特別是在天線邊界上，是很重要的。由此我們便得到電流感應部分的分佈方程：

$$\begin{aligned} I_i(z) = & \frac{V_0 \pi \rho_0^2 b}{\omega \mu_2} g_0(h) \left[ \frac{4 k_2^2 z \rho_0 - 2 k_2^2 \rho_0^3 + 3 \rho_0}{R^5} + \right. \\ & \left. + \frac{12 j k_2 z^2 \rho_0 - 3 j k_2 \rho_0^3}{R^6} - \frac{15 z^2 \rho_0}{R^7} \right] \cos \left( k_2 \sqrt{\rho_0^2 + z^2} - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

在天線中部  $z = 0$  處，電流感應部分和輻射部分之比便是

$$\frac{I_i(0)}{I_r(0)} = \frac{1}{(k_2 \rho_0)^3} \sqrt{9 - 3(k_2 \rho_0)^2 + 4(k_2 \rho_0)^4} e^{+i\varphi}; \quad (62)$$

式中  $\varphi = - \left[ \pi - \arctan \left( \frac{3 - 2 k_2^2 \rho_0^2}{3 k_2 \rho_0} \right) \right] \doteq -\frac{\pi}{2}$ . (63)

相角  $\varphi$  並不準確等於  $-\frac{\pi}{2}$  的原因，是由於在  $\Pi$  函數的畸點截徑積分計算中用了近

似方法的緣故。公式(62)告訴我們兩項重要的事情：第一，當  $k_2 \rho_0 \ll 1$  時，像在一般的情形下，這個比例值是非常大的。也就是說，輻射場好像騎在一個非常大的有質感應場上面，然後脫離後者以光速  $c$  向自由空間輻射出去。在一切沿天線的電流測量中，我們實際上僅僅量出感應電流部分，因為那個非常小的同相輻射部分或能量部分完全被大的感應部分所遮蓋了；第二，要想增加電流輻射部分或可脫離天線的輻射場，唯一的方法便是增加圓柱形天線的橫截面積或半徑。

### (7) 天線內阻抗的影響

從圖1所示天線模型，可見對導體中每一薄層電流  $I(\zeta)$  的輻射邊界條件是一樣的。假設能源電壓在半徑方向的變化是按照圓柱形導體內電流和電壓分佈的熟知的古典公式<sup>[6]</sup>

$$V_0 \longrightarrow V_0 J_0 (\rho_0 \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}) / J_0 (a \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}), \quad (64)$$

那麼根據疊加原理，我們只要將公式(11)中的  $V_0 b$ ，公式(12)中的  $I(\zeta)b$ ，和公式(14)中的  $I(+h)b$  用下列各式代替：

$$(11) \text{ 中 } V_0 b \longrightarrow V_0 J_0 (\rho_0 \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}) d\rho_0 / J_0 (a \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}), \quad (65)$$

$$(12) \text{ 中 } I(\zeta) b \longrightarrow I_0(\zeta) J_0 (\rho_0 \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}) d\rho_0 / J_0 (a \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}), \quad (66)$$

$$(14) \text{ 中 } I(+h) b \longrightarrow I_0(+h) J_0 (\rho_0 \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}) d\rho_0 / J_0 (a \sqrt{k_1^2 - \lambda_1^2}); \quad (67)$$

那麼上述輻射邊界條件便仍然是完全滿足的。在上列三式中，

$I_0(\zeta)$  = 導體表面的體電流密度；

$k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + j\omega \mu_1 \sigma_1$ ，在天線導體中；

$\lambda_1 \doteq k_2$ ，對於在圓柱形導體內傳播的主波講。

這樣公式(17)、(20)和(22)中的結果勢函數  $\Pi_0$ 、 $\Pi$  和  $\phi$ ，便都獲得一個對  $\rho_0$  講，從  $\rho_0 = 0$  到  $\rho_0 = a$  的額外積分。其餘演導和推論便完全不受影響。

當我們的圓柱形天線是由一對和它有相同質料和半徑的輸送線饋送能量時，上述變換和積分便很準確地描敘了天線內阻抗的影響。詳細的計算是很直接的，此處從略了。

假若在天線中部，我們用其他方法饋送能量，那麼在  $z = \pm 0$  或輸入處，電壓和電流在半徑上的分佈函數便必須事先規定或描劃出來，然後才能考慮計算天線內阻抗的影響和結果。

## 附 錄

具有能源電壓  $V_0$  的赫茲微分函數公式 (11) 的導演

矢量勢  $\mathbf{A}$  的達朗伯方程 (d'Alembert's equation)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (\text{A1})$$

用合理化的 M. K. S. 單位制計算的求解是

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu \mathbf{J}(\zeta) d\zeta dS}{4\pi R} e^{i(kR - \omega t)}; \quad (\text{A2})$$

式中  $\mathbf{J}(\zeta)$  是沿  $\zeta$ -方向的體電流密度,  $R$  是由觀測點到體積元  $J(\zeta) d\zeta dS$  的距離。

相當的赫茲函數  $\Pi_0$  的定義公式是

$$d\mathbf{A} = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (d\Pi_0) = -j\omega \mu_2 \epsilon_2 d\Pi_0. \quad (\text{A3})$$

將公式 (A2) 和 (A3) 合併, 我們便得到

$$d\Pi_0 = \frac{\mathbf{J}(\zeta) d\zeta dS}{-j 4\pi \omega \epsilon R} e^{i(kR - \omega t)}. \quad (\text{A4})$$

在長度  $d\zeta$  上的電流  $J(\zeta)$  便表示在  $d\zeta$  的兩底面上有相反的電荷, 它們的關係式是

$$J(\zeta) = \frac{\partial}{\partial t} q = -j\omega q(\zeta). \quad (\text{A5})$$

兩個相反電荷  $\pm q dS$  相距  $d\zeta$  便相當於一個電容系統, 而具有電容量

$$dC = \frac{\epsilon dS}{d\zeta}. \quad (\text{A6})$$

以  $dC$  除  $qdS$ , 我們便得到在  $d\zeta$  兩端的電壓差  $V_0$ :

$$V_0 = \frac{qdS}{dC} = \frac{q d\zeta}{\epsilon} = \frac{p_0}{\epsilon} = \frac{J(\zeta) d\zeta}{-j\omega \epsilon}; \quad (\text{A7})$$

式中  $p_0 = q d\zeta$  是單位面積內的偶極矩。將公式 (A7) 代入公式 (A4), 我們便得到

$$d\Pi_0 = \frac{V_0 dS}{4\pi R} e^{i(kR - \omega t)}. \quad (\text{A8})$$

所以在小間隙  $d\zeta$  兩端具有電壓  $V_0$  的能源, 便相當於同一間隙處具有一個古典赫茲偶極子。在前面論文中, 我們便用這個公式來計算能源場的展開式。

## 參 考 文 獻

- [ 1 ] Abraham, M., *Ann. d. Physig*, **66**, (1898), 435; *Math. Ann.*, **52** (1899), 81.  
 Sommerfeld, A., *Ann. d. Physik*, **15** (1904), 673.  
 Mie, G., *ibid.*, **25** (1908), 377.  
 Debye, P., *ibid.*, **30** (1909), 59.  
 Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. A***87** (1912), 193.  
 Oseen, C. W., *Ark. f. Mat. Astr. Fysik*, **9**: 12 (1913).  
 Brillouin, L., *Radio-electricite*, **3** (1922), 147.
- [ 2 ] Hallen, E., *Uppsala Univ. Arsskrift*, No. 1 (1930); *Nova Acta, Uppsala, Ser. 4*, **11**: 4 (1938).  
 King, L. V., *Trans. Roy. Soc. London*, **236** (1937); 381.  
 Schelkunoff, S. A., *Trans. A.I.E.E.* **57** (1938), 744; *Proc. I.R.E.* **29** (1941), 493.  
 Barrow, W. L., Chu, L. J., and Jansen, J. J., *Proc. I.R.E.* **27** (1939), 769.  
 Stratton, J. A., and Chu, L. J., *Journ. App. Physics*, **12**, March 1941.  
 King, R. and Blake, F. G., *Proc. I.R.E.* **30** (1942), 335.  
 Schelkunoff, S. A. and Feldman, C. B., *ibid.* **30** (1942), 511.  
 Brillouin, *Quarterly of App. Math.* **1** (1943), 201.  
 Schelkunoff, S. A., *Proc. I.R.E.* **34** (1946), 1, 231.
- [ 3 ] King, R. and Harrison Jr. C. W., *ibid.* **30**: 10 (1942).  
 Harrison, C. W. and King, R., *ibid.* **31**: 12 (1943).  
 King, R. and Middleton, D., *Quarterly App. Math.* **3** (1946), 302.  
 King, R. and Winternitz, T. W., *ibid.* **5** (1947-48), 403.
- [ 4 ] Watson, G. N., "Bessel Functions", Camb. Univ. Press, 1948, Chap. XI.
- [ 5 ] Stratton, J. A., "Electromagnetic Theory", 1940, Chap. VIII, p. 437, eg. (34).
- [ 6 ] Sommerfeld, A., *Ann. d. Physik*, **15** (1904), 673.  
 Stratton, J. A., "Electromagnetic Theory", Chap. IX, 9.15.

---

## GENERAL BOUNDARY RELATIONS FOR A SOURCE-DRIVEN ANTENNA WITH APPLICATION TO A FINITE CYLINDRICAL CONDUCTOR

HSU CHANG-PEN

*(Tsing-Hua University)*

## ABSTRACT

In this article, the general boundary relations for a source-driven physical antenna are formulated in a strictly Maxwellian sense. Therefrom, by invoking the limiting condition of infinite conductivity for a lossless antenna, we arrive at a simple radiation boundary relation which brings forth the significance of the field expansions for a non-radiating source and at the same time indicates the way for a first order solution. This then characterizes the formulation of our present boundary-value problem of a "closed system" and also differentiates itself from a diffraction problem for an "open system" as far as Maxwell's field is concerned.

The formulation appears rather unfamiliar at first sight, but some reflections on the energy balance relation in macroscopic phenomena and especially on Dirac's treatment of radiation damping of election will help justify our present argument.

The first order solution for a source-driven finite cylindrical antenna obtained by using the simple radiation boundary condition gives rise to a geometrical factor which indicates the condition of resonance of the system. The necessary procedure to take into account the effect of internal impedance of a real antenna is indicated; but, thanks to the principle of superposition, this modification does not change the essential features obtained for the case of a lossless antenna.