

在均佈載荷作用下受有預加張力的彈性圓薄膜大撓度問題*

顧 瑛 琳

(清 華 大 學)

一. 引 言

均佈載荷作用下彈性圓薄膜的大撓度問題最先是漢蓋^[1]所研究的。漢蓋的方法基本上是正確的，但在數字計算上存在着錯誤，而且長期未被發現。之後錢偉長教授^[2]和 C. A. 阿歷克賽也夫^[3]指出計算上的錯誤，並重行整理結果，給出了正確的答案。

以上所討論的問題都是假定薄膜在原始狀態下是處於沒有應力的情況下的，但實際上如在儀器製造及其他工程應用中往往使薄膜先受均勻的張力，然後再在邊緣上加固定。為此，必須考慮受有預加張力的圓薄膜在均佈載荷作用下的大撓度問題。本文對此問題作了研究，給出了一系列圖表，並對大撓度圓薄膜儀器的誤差問題加以討論。

二. 基本方程及解

根據彈性圓薄板大撓度的理論，略去撓矩的影響，即得在均佈載荷作用下彈性圓薄膜（圖 1）的大撓度方程為：

$$\begin{cases} N_r \frac{dw}{dr} = -\frac{1}{2} qr, & (1) \\ \frac{d}{dr} (r \cdot N_r) - N_t = 0. & (2) \end{cases}$$

此地 w 為撓度； r 為向徑； q 為均佈載荷之強度； N_r ， N_t 為單位長度之徑向和周向合力；它們可表示如下：

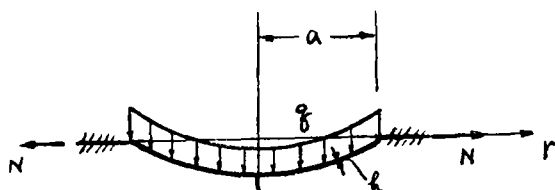


圖 1

$$\begin{cases} N_r = N + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \mu \left(\frac{u}{r} \right) \right], & (3) \\ N_t = N + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{u}{r} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. & (4) \end{cases}$$

*1956 年 2 月 3 日收到。

其中 N 為單位長度之預加張力; u 為徑向位移 (從薄膜受有預加張力後算起); h 為膜的厚度; μ 為橫向變形係數 (泊松比).

由 (3)、(4) 式可得

$$u = \frac{r}{Eh} [(N_t - \mu N_r) - N(1 - \mu)]. \quad (5)$$

將 (2) 式代入 (5) 式, 得

$$u = \frac{r}{Eh} \left[\frac{d}{dr} (r \cdot N_r) - \mu \cdot N_r - N(1 - \mu) \right]; \quad (6)$$

將 (6) 式代入 (3) 式, 得

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \cdot N_r) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (7)$$

如圓薄膜之半徑為 a , 則邊界條件為:

$$r = a: \quad w = 0; \quad (8)$$

$$r = a: \quad u = 0,$$

$$\text{或由 (6),} \quad \frac{d}{dr} (r \cdot N_r) - \mu N_r = N(1 - \mu), \quad (9a)$$

$$\text{或} \quad N_t - \mu N_r = N(1 - \mu); \quad (9b)$$

$$\text{及} \quad r = 0: \quad N_r = \text{有限值}. \quad (10)$$

現在的問題就是在邊界條件 (8), (9), (10) 下解方程組 (1) 及 (7). 爲了把各種數量化爲無量綱的純數, 採用下列變換:

$$\begin{aligned} W &= \frac{w}{h}, & S &= \frac{a^2 N}{Eh^3}, \\ S_r &= \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, & P &= \frac{a^4 q}{Eh^4} (1 - \mu^2), \\ S_t &= \frac{a^2 N_t}{Eh^3}, & x &= \frac{r^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

則方程 (1) 及 (7) 變爲:

$$\begin{cases} P = -4 \left(\frac{dW}{dx} \right) \cdot S_r \cdot (1 - \mu^2), \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} (x \cdot S_r) + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 = 0; \end{cases} \quad (13)$$

而邊界條件 (8), (9a), (10) 變爲:

$$\begin{cases} x = 1: & W = 0, \end{cases} \quad (14a)$$

$$\begin{cases} x = 1: & 2x \frac{dS_r}{dx} + (1-\mu) S_r = S(1-\mu), \end{cases} \quad (14b)$$

$$\begin{cases} x = 0: & S_r = \text{有限值}. \end{cases} \quad (14b)$$

方程組 (12), (13) 之解為已知^[2]:

$$S_r = \left[\frac{P \cdot c}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2c} \cdot f(cx), \quad (15)$$

$$S_t = \left[\frac{P \cdot c}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2c} \cdot [f(cx) + 2c \cdot x \cdot f'(cx)]; \quad (16)$$

此地

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{144}x^3 - \frac{17}{288}x^4 - \frac{37}{864}x^5 - \frac{1205}{36288}x^6 - \frac{219241}{8128512}x^7 - \dots, \quad (17)$$

c 為常數, 可由邊界條件 (14b) 決定.

將 (15) 及 (16) 式代入 (14b) 式, 整理得:

$$S \cdot P^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(1-\mu)} \cdot c^{-\frac{1}{3}} \cdot [f(c) (1-\mu) + 2 \cdot c \cdot f'(c)]. \quad (18)$$

理論上可以根據不同的 $S \cdot P^{-\frac{2}{3}}$ 值 (對已知 μ) 解 (18) 式求出 c 之值, 但實際上我們 (對不同的 μ 值) 先給不同的 c 值, 再算出 $S \cdot P^{-\frac{2}{3}}$ 的值. 結果可見表 1.

再將 (15) 式代入 (12) 式, 得

$$\frac{dW}{dx} = - \left[\frac{P \cdot c}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot h(x); \quad (19)$$

此地

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}x^2 + \frac{55}{144}x^3 + \frac{36}{96}x^4 + \frac{205}{576}x^5 + \frac{17051}{48284}x^6 + \frac{2864485}{8128512}x^7 + \dots \quad (20)$$

將 (19) 式積分, 並引用邊界條件 (14a), 得

$$W = \left[\frac{P \cdot c}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot [g(c) - x \cdot g(cx)]; \quad (21)$$

此地

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h(x) dx = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{36}x^2 + \frac{55}{576}x^3 + \frac{7}{96}x^4 + \frac{305}{3456}x^5 + \frac{51153}{1016064}x^6 + \frac{2864485}{63028096}x^7 + \dots \quad (22)$$

在中心點 $x = 0$ 處:

$$W(0) = g(c) \cdot \left[\frac{c \cdot P}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{[2(1-\mu^2)]^{1/3}} [(c)^{\frac{1}{3}} \cdot g(c)] \cdot P^{\frac{1}{3}}; \quad (23)$$

$$\text{又 } S_r(0) = S_i(0) = S(0) = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[2(1-\mu^2)]^{2/3}} \right] \cdot (c)^{-\frac{1}{3}} \cdot P^{\frac{2}{3}}. \quad (24)$$

在邊界上 $x = 1$:

$$S_r(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(1-\mu^2)^{2/3}} \cdot [(c)^{-\frac{1}{3}} \cdot f(c)] \cdot P^{\frac{2}{3}}, \quad (25)$$

$$S_i(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(1-\mu^2)^{2/3}} \cdot \{(c)^{-\frac{1}{3}} \cdot [f(c) + 2 \cdot c \cdot f'(c)]\} \cdot P^{\frac{2}{3}}. \quad (26)$$

以下列符號代表一系列常數:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2(1-\mu^2)^{2/3}} \right] \cdot (1-\mu), \\ A' &= [2(1-\mu^2)]^{\frac{1}{3}}, \\ A'' &= 2[2(1-\mu^2)]^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

給出不同之 c 值, 就可求得一系列 $A'W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}}$, $A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}}$, $A'' \cdot S_r(1)P^{-\frac{2}{3}}$ 及 $A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}}$ 之值. 結果見表 1, 並製成下列諸曲線:

$$\left\{ \begin{aligned} A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}} - S \cdot P^{-\frac{2}{3}}, \\ A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}} - S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}; \end{aligned} \right. \quad (\text{圖 } 2, 3, 4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S \cdot P^{-\frac{2}{3}}, \\ A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}; \end{aligned} \right. \quad (\text{圖 } 5, 6, 7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S \cdot P^{-\frac{2}{3}}, \\ A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}; \end{aligned} \right. \quad (\text{圖 } 8, 9, 10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S \cdot P^{-\frac{2}{3}}, \\ A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \right. \quad (\text{圖 } 11, 12, 13)$$

表 1

$c =$	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.370	0.390	0.400	
$P^{-\frac{1}{3}} \cdot S = A \cdot c^{-\frac{1}{3}} \cdot [f(c) \cdot (1-\mu) - 2 \cdot c \cdot f'(c)]$	$\mu=0.250$	∞	1.50	1.16	0.976	0.888	0.806	0.569	0.431	0.327	0.241	0.159	0.084	0.055	0.024	0.008
	$\mu=0.300$	∞	1.53	1.19	1.00	0.906	0.820	0.571	0.431	0.322	0.230	0.145	0.065	0.035	0.001	—
	$\mu=0.350$	∞	1.57	1.22	1.02	0.927	0.841	0.585	0.433	0.317	0.219	0.128	0.042	0.009	—	—
$P^{\frac{1}{3}} \cdot S^{-1} = A^{-1} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot [f(c) \cdot (1-\mu) - 2 \cdot c \cdot f'(c)]^{-1}$	$\mu=0.250$	0	0.667	0.862	1.02	1.13	1.24	1.76	2.32	3.06	4.15	6.29	11.9	18.2	41.7	123
	$\mu=0.300$	0	0.654	0.840	1.00	1.10	1.22	1.75	2.32	3.11	4.35	6.90	15.4	28.6	909	—
	$\mu=0.350$	0	0.637	0.820	0.980	1.08	1.19	1.71	2.31	3.15	4.57	7.81	23.8	111	—	—
$A' \cdot P^{-\frac{1}{3}} \cdot W(0) = c^{\frac{1}{3}} \cdot g(c)$	—	0	0.216	0.273	0.313	0.346	0.373	0.477	0.553	0.618	0.676	0.730	0.782	0.803	0.823	0.834
$A'' \cdot P^{-\frac{1}{3}} \cdot S(0) = c^{-\frac{1}{3}}$	—	∞	4.64	3.69	3.16	2.92	2.71	2.15	1.88	1.71	1.59	1.49	1.42	1.39	1.37	1.36
$A'' \cdot P^{-\frac{1}{3}} \cdot S_r(1) = c^{-\frac{1}{3}} \cdot f(c)$	—	∞	4.62	3.65	3.11	2.87	2.65	2.04	1.73	1.53	1.37	1.24	1.14	1.10	1.06	1.04
$A'' \cdot P^{-\frac{1}{3}} \cdot S_i(1) = c^{-\frac{1}{3}} [f(c) + 2 \cdot c \cdot f'(c)]$	—	∞	4.57	3.57	3.01	2.75	2.51	1.81	1.42	1.13	0.890	0.676	0.475	0.400	0.315	0.278

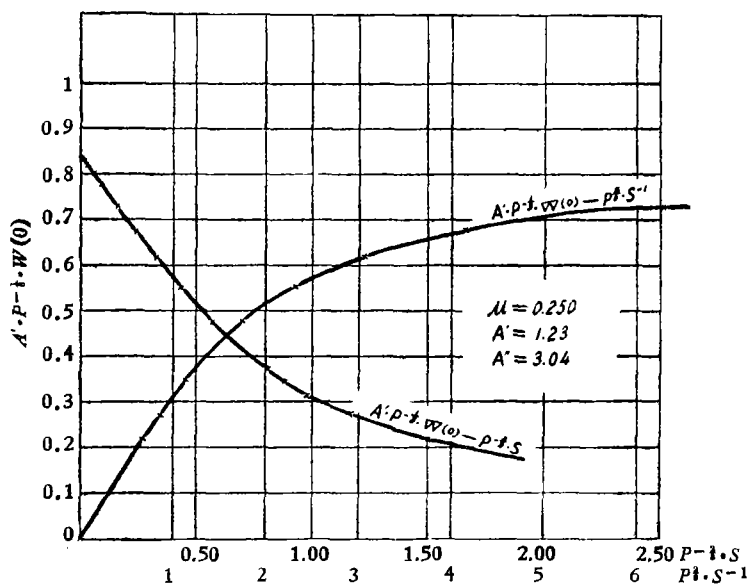


圖 2

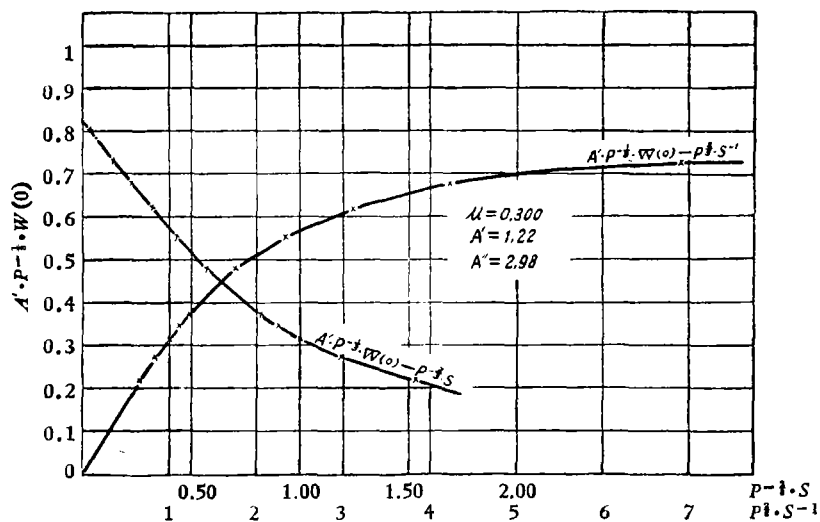


圖 3

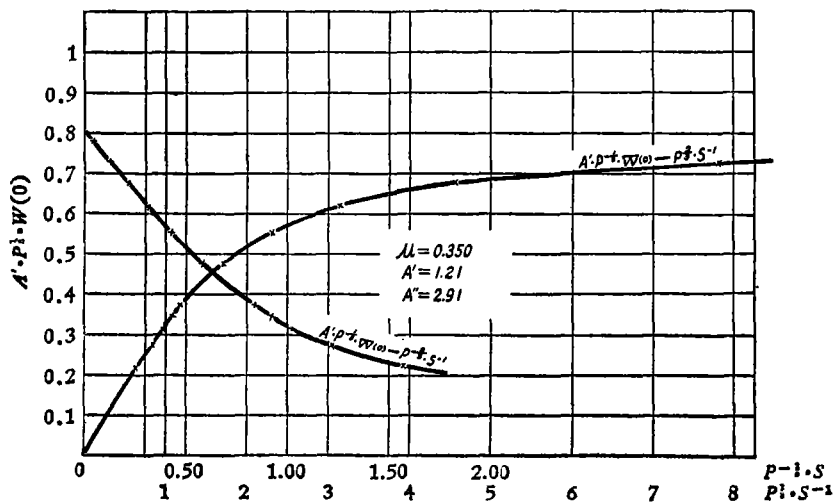


圖 4

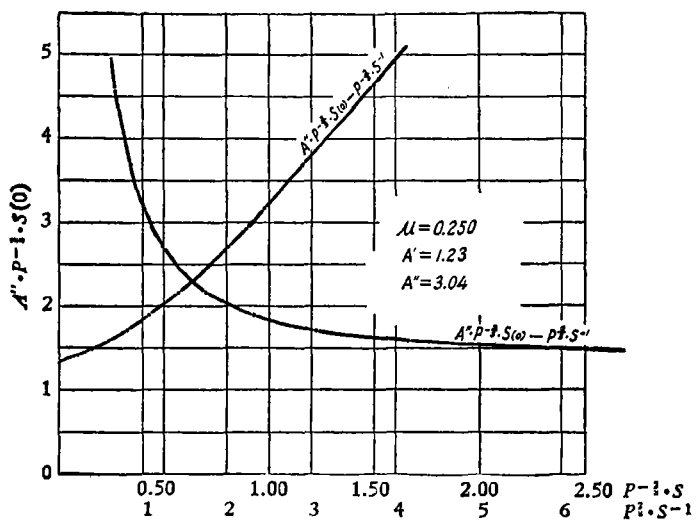


圖 5

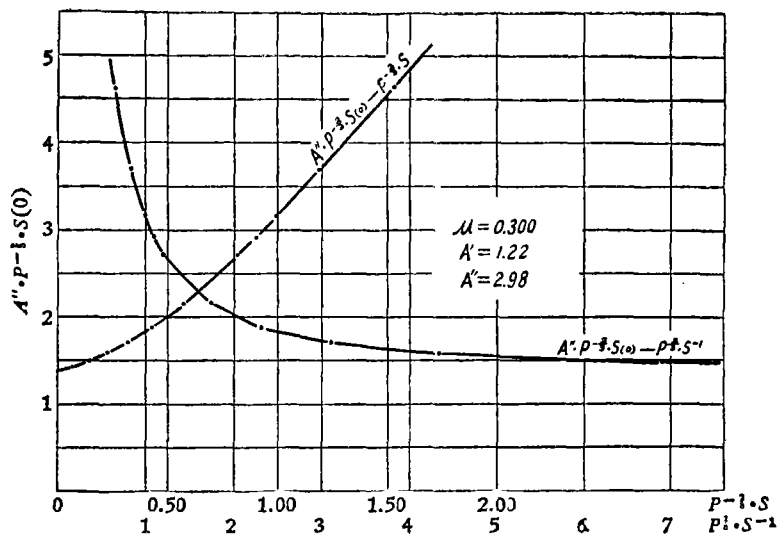


圖 6

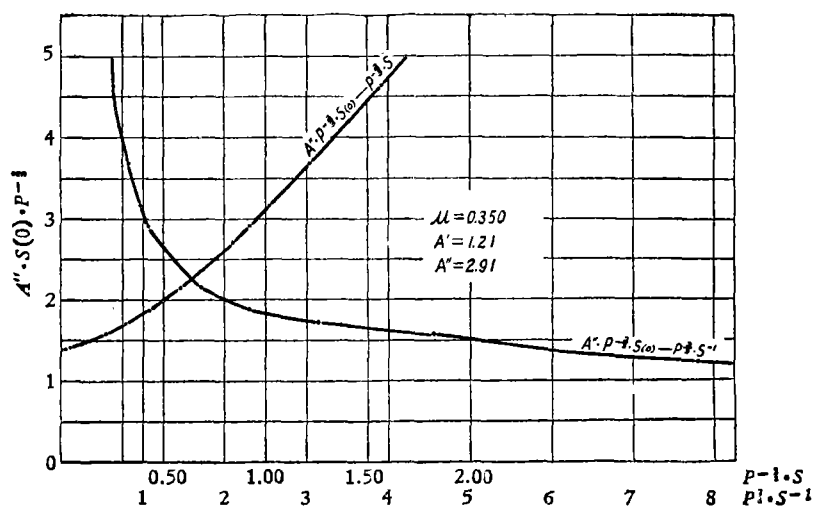


圖 7

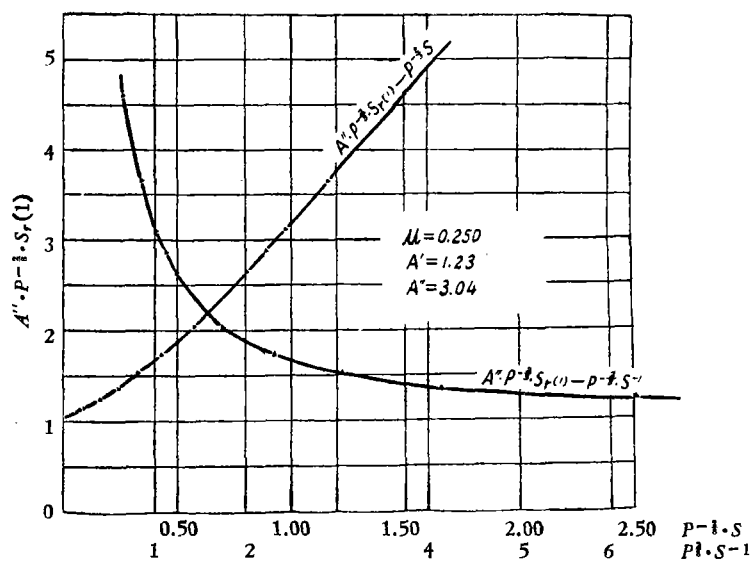


圖 8

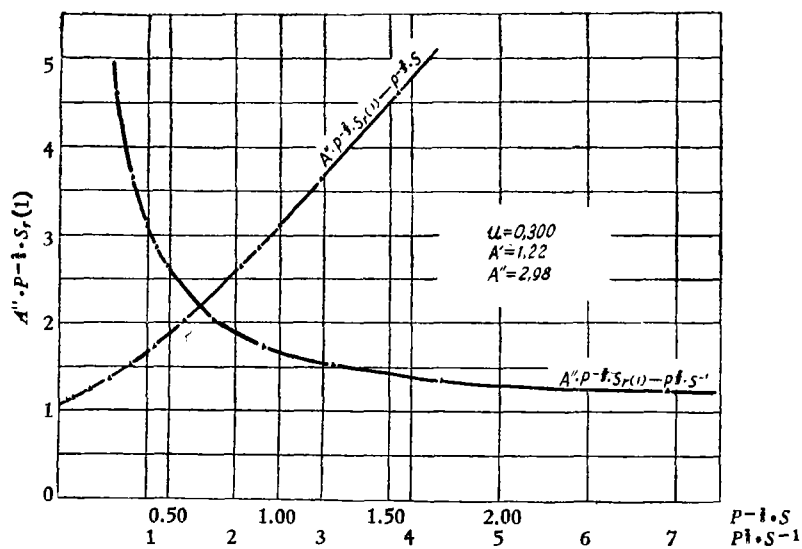


圖 9

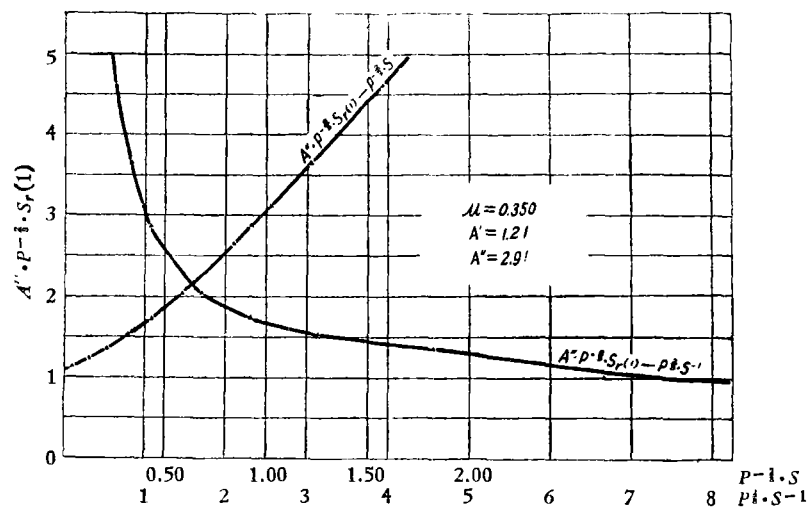


圖 10

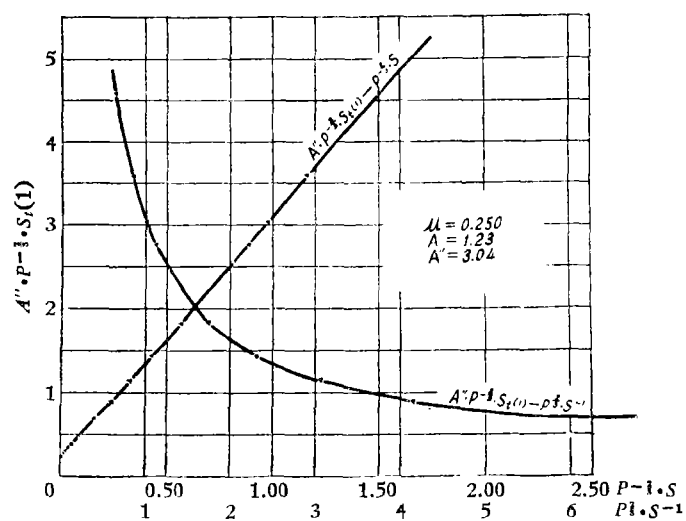


圖 11

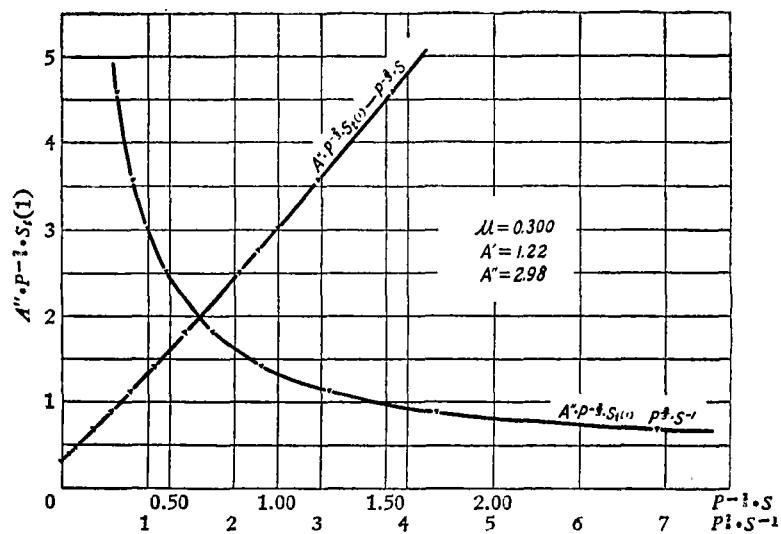


圖 12

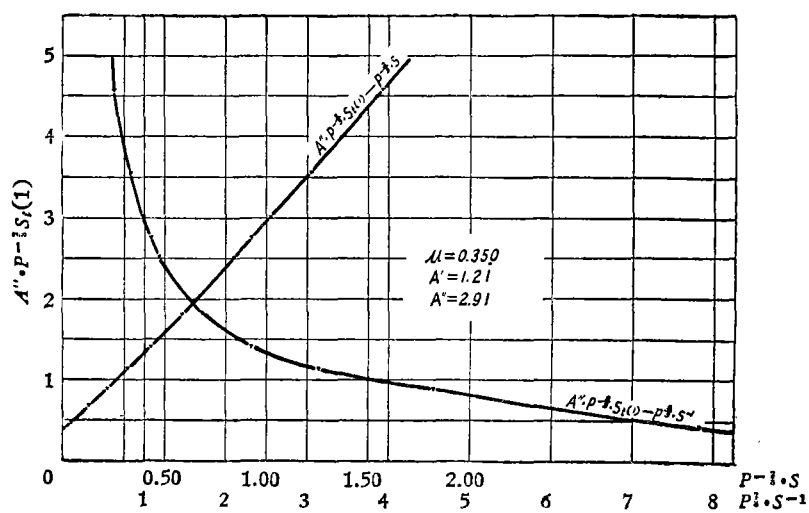


圖 13

三. 討 論

總觀諸曲線，可以發現這樣幾點：

(1) 由 $A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}} - P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 曲線可見當 $P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 較小時，曲線為一斜直線，這表示當 S 比 $P^{\frac{2}{3}}$ 大很多時， $\frac{A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}}}{P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}} = \frac{S \cdot A' \cdot W(0)}{P}$ 為一常數，這也就是當預加張力很大時的線性理論結果。

(2) 由 $A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}} - P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 曲線可見當 $P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 較大時，曲線漸趨水平，這表示當 $P^{\frac{2}{3}}$ 比 S 大很多時 $A' \cdot W(0) \cdot P^{-\frac{1}{3}}$ 漸趨一常數。這就是當預加張力很小時的漢蓋理論結果。

(3) 由 $A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$, $A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 及 $A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 諸曲線可見當 $P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}$ 較大時，曲線漸趨水平。這表示當 $P^{\frac{2}{3}}$ 比 S 大很多時， $A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}}$, $A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}}$, $A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}}$ 均漸趨一常數，這就是當預加張力很小時的漢蓋理論結果。

(4) 由 $A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{-\frac{2}{3}} \cdot S$, $A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{-\frac{2}{3}} \cdot S$ 及 $A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}} - P^{-\frac{2}{3}} \cdot S$ 諸曲線可見當 $P^{-\frac{2}{3}} \cdot S$ 較大時，曲線為一斜直線，這表示當 S 比 $P^{\frac{2}{3}}$ 大時 $\frac{A'' \cdot S(0) \cdot P^{-\frac{2}{3}}}{S \cdot P^{-\frac{2}{3}}} = \frac{A'' \cdot S(0)}{S}$, $\frac{A'' \cdot S_r(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}}}{S \cdot P^{-\frac{2}{3}}} = \frac{A'' \cdot S_r(1)}{S}$ 及 $\frac{A'' \cdot S_i(1) \cdot P^{-\frac{2}{3}}}{S \cdot P^{-\frac{2}{3}}} = \frac{A'' \cdot S_i(1)}{S}$ 均為常數，這就是當預加張力很大時 $S(0)$, $S_r(1)$, $S_i(1)$ 不因橫向載荷而改變的線性理論結果。

總地說來，當 $S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}$ 較小時， $W(0)$, $S(0)$, $S_r(1)$, 及 $S_i(1)$ 均接近於線性理論結果，所以我們有可能將它們以 $S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}$ 之冪級數表示之，並可以肯定這些級數在 $S^{-1} \cdot P^{\frac{2}{3}}$ 很小時均為收斂。下面我們就來進行這樣的工作。

$$\begin{aligned} \text{令 } A' \cdot W \cdot P^{-\frac{1}{3}} &= c^{\frac{1}{3}} \cdot [g(c) - x \cdot g(cx)] = W_1 \cdot (P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1}) + \\ &+ W_2 \cdot (P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1})^2 + W_3 \cdot (P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1})^3 + W_4 \cdot (P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1})^4 + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

此地 $W_1, W_2 \dots$ 均為待定常數。今由 (22) 得

$$c^{\frac{1}{3}} \cdot [g(c) - x \cdot g(cx)] = c^{\frac{1}{3}} \cdot [(1-x) + \frac{1}{4}(1-x^2)c + \dots], \quad (29)$$

又由 (18) 得

$$\begin{aligned} P^{\frac{2}{3}} \cdot S^{-1} &= \frac{1}{A} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot [f(c) \cdot (1-\mu) + 2 \cdot c \cdot f'(c)]^{-1} = \\ &= \frac{1}{A} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot \left[(1-\mu) - \frac{3-\mu}{2} \cdot c - \dots \right], \end{aligned} \quad (30)$$

現將 (29) 及 (30) 式代入 (28) 式，整理後得

$$(1-x) + \frac{1}{4}(1-x^2)c + \dots =$$

$$= \frac{W_1}{A \cdot (1-\mu)} + \frac{W_2}{A^2 \cdot (1-\mu)^2} c^{\frac{1}{2}} + \frac{W_3}{A^3 \cdot (1-\mu)^3} c^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{(3-\mu) \cdot W_1}{2 \cdot A \cdot (1-\mu)} + \frac{W_4}{A^4 \cdot (1-\mu)^4} \right] c + \dots$$

比較等式二邊 c 之各次項的係數，即可求得 $W_1, W_2 \dots$ 諸常數之值為：

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot (1-x) = (A'')^{-1} \cdot (1-x),$$

$$W_2 = 0,$$

$$W_3 = 0,$$

$$W_4 = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2(1-\mu^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-x^2) - \frac{3-\mu}{2}(1-x) \right] =$$

$$= (A'')^{-4} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-x^2) - \frac{3-\mu}{2}(1-x) \right];$$

代入 (28) 式得

$$A' \cdot W \cdot P^{-\frac{1}{2}} = \frac{1-x}{A''} \cdot P^{\frac{3}{2}} \cdot S^{-1} + \frac{1}{(A'')^4} \left[\frac{1}{4}(1-x^2) - \frac{3-\mu}{2}(1-x) \right] \cdot (P^{\frac{3}{2}} \cdot S^{-4}) + \dots$$

重寫即得 W 之表示式為：

$$W = \frac{1-x}{A' \cdot A'' \cdot S} \cdot P + \frac{1}{A' \cdot (A'')^4 \cdot S^4} \cdot \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3-\mu}{2}x - \frac{5-2\mu}{4} \right] \cdot P^3 + \dots, \quad (31)$$

使 $x=0$ ，即得 $W(0)$ ：

$$W(0) = \frac{1}{A' \cdot A'' \cdot S} P + \frac{1}{A' \cdot (A'')^4 \cdot S^4} \left[-\frac{5-2\mu}{4} \right] P^3 + \dots \quad (32)$$

同理可將 $S(0), S_r(1), S_t(1)$ 表成級數，結果如下：

$$S(0) = S + \frac{1}{(A'')^3} \cdot \frac{3-\mu}{2(1-\mu) \cdot S^2} \cdot P^2 + \dots, \quad (33)$$

$$S_r(1) = S + \frac{1}{(A'')^3} \cdot \frac{1}{(1-\mu) \cdot S^2} \cdot P^2 + \dots, \quad (34)$$

$$S_t(1) = S + \frac{1}{(A'')^3} \cdot \frac{\mu}{(1-\mu) \cdot S^2} \cdot P^2 + \dots \quad (35)$$

順便從 (33) 式還可求得

$$c = \frac{1}{(A'')^3 \cdot S^3} \cdot P^2 - \frac{1}{(A'')^5 \cdot S^5} \cdot \frac{3(3-\mu)}{2(1-\mu)} \cdot P^4 + \dots \quad (36)$$

可以看到：(31) - (35) 式中之首項均為線性理論的結果。

四. 大撓度薄膜儀器誤差之計算

首先計算靜力情形下大撓度理論結果（取二項）與線性理論之誤差，由 (32) 式可得中心點撓度之絕對誤差為：

$$\Delta_{CT} = \frac{1}{A' \cdot (A'')^4 \cdot S^4} \cdot \left[\frac{5+2\mu}{4} \right] \cdot P^3; \quad (37)$$

對於線性理論結果之相對誤差為：

$$\eta_{CT} = \left\{ \frac{1}{A' \cdot (A'')^4 \cdot S^4} \cdot \left[\frac{5+2\mu}{4} \right] \cdot P^3 \right\} / \left\{ \frac{1}{A' \cdot A'' \cdot S} \cdot P \right\} = \frac{5+2\mu}{128} \cdot \left(\frac{P^2}{S^3} \right). \quad (38)$$

以 $\mu = 0.300$ 計算，

$$\eta_{CT} = 4.38 \cdot \left(\frac{P^2}{S^3} \right) \%. \quad (39)$$

可見只要 $\frac{P^2}{S^3}$ 不大，誤差就比較小。

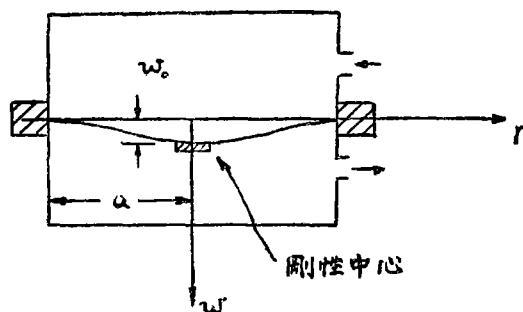


圖 14.

下面將討論大撓度圓薄膜儀器之動力誤差問題。H. И. 別里克^[4]曾討論過具有剛性中心的薄膜儀器（圖 14）的動力誤差的理論計算，即討論了測量振動壓力之值與靜力校正值間誤差之理論值。他在計算靜力校正值或在推導動力方程中均採用了線性理論：

$$w = \frac{\Delta p \cdot (a^2 - r^2)^2}{64 \cdot c}. \quad (40)$$

此地 Δp 為壓力差：

及

$$c = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}.$$

如果薄膜具有不大之初張力而變形比較大時，他所得的結果應該作適當的修改，現重行推導如下：

先求得 w 與 $w(0)$ 之關係式。由 (31)、(32) 式得（略去高次項）

$$w = \frac{a^2 - r^2}{4N} \cdot q - \frac{E \cdot h}{512 N^4} [r^4 - 2(3-\mu) a^2 \cdot r^2 + a^4(5-2\mu)] \cdot q^3, \quad (41)$$

$$w(0) = \frac{a^2}{4N} \cdot q - \frac{E h a^4}{512 N^4} (5-2\mu) \cdot q^3. \quad (42)$$

$$\text{令} \quad q = q_1 \cdot w(0) + q_2 \cdot [w(0)]^2 + q_3 \cdot [w(0)]^3, \quad (43)$$

此地 q_1, q_2, q_3 爲待定之常數。代入 (42) 式經整理後，比較等式二邊 $w(0)$ 各次項之係數即可求得 $q_1, q_2 \dots$ 諸值，將這些值代回 (43) 式即得

$$q = \frac{4N}{a^2} \cdot w(0) - \frac{Eh}{2a^4} (5-2\mu) \cdot [w(0)]^3; \quad (44)$$

將 (44) 式代入 (41) 式加以整理得

$$w = \alpha_1 \cdot w(0) + \alpha_3 \cdot [w(0)]^3; \quad (45)$$

$$\text{此地} \quad \alpha_1 = 1 - \frac{r^2}{a^2}, \quad (46)$$

$$\alpha_3 = -\frac{Eh}{8Na^6} [r^4 - 2(3-\mu)a^2r^2 + a^4(5-2\mu)] + \frac{(a^2-r^2)Eh}{8a^4N} (5-2\mu). \quad (47)$$

現在推導薄膜之運動方程。薄膜可視爲受慣性力 P_1 ，氣體對運動之阻力 P_2 ，彈性力 P_3 及干擾力 P_4 之作用下而處於平衡。分別求此四力。

1. 慣性力 P_1 ——它包括薄膜本身之慣性力 P'_1 及剛性中心之慣性力 P''_1 兩部分。先求 P'_1 :

$$P'_1 = 2\pi h\rho \int_0^a r \cdot dr \cdot \left(-\frac{d^2w}{dt^2}\right), \quad (48)$$

此地 ρ 爲密度， t 爲時間。我們假設動荷情形下 (45) 式之關係仍舊存在，則

$$\frac{d^2w}{dt^2} = (\alpha_1 + 3\alpha_3 w(0)^2) \frac{d^2w(0)}{dt^2} + 6 \cdot \alpha_3 \cdot w(0) \cdot \left(\frac{dw(0)}{dt}\right)^2.$$

代入 (48) 式得

$$P'_1 = -2\pi h\rho \left[\frac{d^2w(0)}{dt^2} \left(\int_0^a r \cdot \alpha_1 \cdot dr + 3w(0)^2 \int_0^a r \cdot \alpha_3 \cdot dr \right) + 6w_0 \left(\frac{dw(0)}{dt} \right)^2 \cdot \int_0^a r \cdot \alpha_3 \cdot dr \right].$$

今由 (46), (47) 得

$$\int_0^a r \cdot \alpha_1 \cdot dr = \int_0^a r \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr = \frac{1}{2} a^2,$$

$$\int_0^a r \cdot \alpha_3 \cdot dr = \frac{Eh}{96N},$$

$$\therefore P'_1 = -2\pi h\rho \left[\left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{Eh}{32N} w(0)^3 \right) \frac{d^2w(0)}{dt^2} + \frac{Eh}{16N} w(0) \cdot \left(\frac{dw(0)}{dt} \right)^2 \right]. \quad (49)$$

再求 P''_1 : 假設其質量 m_0 集中在中心，則

$$P''_1 = -m_0 \cdot \frac{d^2w(0)}{dt^2}. \quad (50)$$

$$\therefore P_1 = P'_1 + P''_1 = -2\pi h\rho \left[\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{m_0}{2\pi h\rho} + \frac{Eh}{32N} w(0)^2 \right) \frac{d^2 w(0)}{dt^2} + \frac{Eh}{16N} w(0) \cdot \left(\frac{dw(0)}{dt} \right)^2 \right]. \quad (51)$$

2. 氣體對運動之阻力 P_2 ——氣體對運動之阻力是由於薄膜變形後引起氣體在連接儀器之導管中運動而引起的,故必須先求出薄膜撓曲面與原始平面包含之體積,可視它為一旋轉體,其體積為

$$V = \int_{w(0)}^0 \pi \cdot r^2 \cdot dw. \quad (52)$$

同理由 (45) 可得

$$dw = -\frac{2r}{a^2} \cdot w(0) \cdot dr - \frac{Eh}{2Na^6} [r^3 - (3-\mu)a^2 r] \cdot w(0)^3 \cdot dr - \frac{Ehr}{4a^4 N} (5-2\mu) \cdot w(0)^3 \cdot dr.$$

代入 (52) 式, 積分得

$$V = \frac{\pi a^2}{2} w(0) + \frac{Eh\pi}{48N} w(0)^3.$$

則流量 $Q = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi a^2}{2} + \frac{Eh\pi}{16N} w(0)^2 \right) \cdot \frac{dw(0)}{dt}.$

根據流體之層流理論, 阻力 P_2 為

$$P_2 = \frac{8 \cdot \xi \cdot l}{a_1^2} \cdot Q = \frac{8 \cdot \xi \cdot l}{a_1^2} \left(\frac{\pi a^2}{2} + \frac{Eh\pi}{16N} w(0)^2 \right) \frac{dw(0)}{dt}. \quad (53)$$

此地 ξ 為在導管中運動之氣體之絕對黏滯係數; l 為導管之長度; a_1 為導管之內半徑.

3. 彈性力 P_3 ——我們根據 (44) 式, 假設已知 $w(0)$, 反求 q , 並視它為單位面積之彈性力, 則

$$\begin{aligned} P_3 &= \pi \cdot a^2 \cdot q = \pi a^2 \left[\frac{4N}{a^2} \cdot w(0) - \frac{Eh}{2a^4} (5-2\mu) w(0)^3 \right] = \\ &= 4\pi N w(0) - \frac{Eh\pi}{2a^2} (5-2\mu) \cdot w(0)^3. \end{aligned} \quad (54)$$

4. 干擾力 P_4 ——即振動之壓力差, 設此壓力差為

$$\Delta p = \Delta p_0 \cdot \sin \omega t,$$

此地 Δp 為壓力差; Δp_0 為壓力差之振幅; ω 為頻率; t 為時間.

$$\therefore P_4 = \pi \cdot a^2 \cdot \Delta p_0 \cdot \sin \omega t. \quad (55)$$

聯合 (51), (53), (54), (55) 諸式得薄膜之運動方程:

$$\begin{aligned}
& \left[m_0 + 2\pi h \rho \left(\frac{1}{2} a^2 + \frac{Eh}{32N} \omega(0)^2 \right) \right] \frac{d^2 \omega(0)}{dt^2} + \\
& + 2\pi h \rho \cdot \frac{Eh}{16N} \cdot \omega_0 \cdot \left(\frac{d\omega(0)}{dt} \right)^2 + \frac{8 \cdot \xi \cdot l}{a_1^2} \left(\frac{\pi a^2}{2} + \frac{Eh\pi}{16N} \omega(0)^2 \right) \frac{d\omega(0)}{dt} + \\
& + 4\pi N \omega(0) - \frac{Eh\pi}{2a^2} (5-2\mu) \cdot \omega(0)^3 = \pi \cdot a^2 \cdot \Delta p_0 \cdot \sin \omega t. \quad (56)
\end{aligned}$$

我們將採用攝動法來解此非線性振動問題，錢偉長教授^[5]及其他很多同志曾採用此法解決一系列鉸或梁的大撓度靜力平衡問題，均得到良好的結果。

為使各種數量變為無量綱的純數，先作下列變換：

$$\left. \begin{aligned}
M_0 &= \frac{\omega^2 \cdot m_0}{aE\pi}, & R &= \frac{h \cdot \rho \cdot a \cdot \omega^2}{4E}, & K &= \frac{Eh}{4N}, \\
W_0 &= \frac{\omega(0)}{a}, & \theta &= \omega t, & L &= \frac{2\xi \cdot l \cdot \omega \cdot a}{a_1^2 \cdot E}, & \Delta P_0 &= \frac{\Delta p_0}{E}, \\
S &= \frac{4N}{Ea}, & H &= \frac{h}{2a} (5-2\mu).
\end{aligned} \right\} \quad (57)$$

代入 (56) 式整理得

$$\begin{aligned}
& [M_0 + (4+K \cdot W_0^2) R] \frac{d^2 W_0}{d\theta^2} + 2 \cdot K \cdot R \cdot W_0 \cdot \left(\frac{dW_0}{d\theta} \right)^2 + \\
& + (2+K \cdot W_0^2) \cdot L \cdot \frac{dW_0}{d\theta} + S \cdot W_0 - H \cdot W_0 = \Delta P_0 \cdot \sin \theta. \quad (58)
\end{aligned}$$

今選載荷 ΔP_0 為攝動參數，令

$$W_0 = f_1 \cdot \Delta P_0 + f_3 \Delta P_0^3 + \dots, \quad (59)$$

此地 f_1, f_3 均為 θ 之函數，代入 (58) 式整理得

$$\begin{aligned}
& [(M_0+4R) f_1'' + 2 \cdot L \cdot f_1' + S \cdot f_1] \cdot \Delta P_0 + [(M_0+4R) f_3'' + 2L \cdot f_3' + S \cdot f_3 + \\
& + K \cdot R \cdot f_1^2 \cdot f_1' + 2 \cdot K \cdot R \cdot f_1 \cdot f_1'^2 + K \cdot L \cdot f_1^2 \cdot f_1' - H \cdot f_1^3] \Delta P_0^3 + \dots = \Delta P_0 \cdot \sin \theta. \quad (60)
\end{aligned}$$

比較等式兩邊 ΔP_0 項之係數，得

$$(M_0+4R) f_1'' + 2 \cdot L \cdot f_1' + S \cdot f_1 = \sin \theta. \quad (61)$$

令

$$\left. \begin{aligned}
2n &= \frac{2L}{M_0+4R}, \\
k^2 &= \frac{S}{M_0+4R}, \\
\Delta q &= \frac{1}{M_0+4R};
\end{aligned} \right\} \quad (62)$$

則 (61) 變為

$$f_1'' + 2n f_1' + k^2 f_1 = \Delta q \cdot \sin \theta, \quad (63)$$

(63) 之解為

$$f_1 = e^{-n\theta} \cdot [C_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \theta + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \theta] + \frac{\Delta q \cdot \sin \alpha}{2n} \sin (\theta - \alpha); \quad (64)$$

此地 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2n}{k^2 - 1}$. 在 (64) 式中除去右邊第一項, 因該項隨 θ 之增加而趨近於零, 則得

$$f_1 = \frac{\Delta q \cdot \sin \alpha}{2n} \sin (\theta - \alpha). \quad (65)$$

比較 (60) 式兩邊 ΔP_0^3 項之係數得

$$(M_0 + 4R) f_3'' + 2L f_3' + S \cdot f_3 + K \cdot R \cdot f_1^2 \cdot f_1'' + 2KR f_1 \cdot f_1'^2 + K \cdot L \cdot f_1^2 \cdot f_1' - H \cdot f_1^3 = 0. \quad (66)$$

將 (65) 式代入, 整理後得

$$(M_0 + 4R) f_3'' + 2L f_3' + S \cdot f_3 = \frac{\Delta q^3 \cdot \sin^3 \alpha}{8n^3} [(K \cdot R + H) \sin^3 (\theta - \alpha) - 2 \cdot K \cdot R \sin (\theta - \alpha) \cdot \cos^2 (\theta - \alpha) - K \cdot L \cdot \sin^2 (\theta - \alpha) \cdot \cos (\theta - \alpha)]. \quad (67)$$

除採用 (62) 之變換外, 另令

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\Delta q^3 \cdot \sin^3 \alpha}{8n^3} (K \cdot R + H) \frac{1}{M_0 + 4R}, \\ B_2 &= \frac{-\Delta q^3 \cdot \sin^3 \alpha}{8n^3} \cdot 2K \cdot R \cdot \frac{1}{M_0 + 4R}, \\ B_3 &= \frac{-\Delta q^3 \cdot \sin^3 \alpha}{8n^3} \cdot K \cdot L \cdot \frac{1}{M_0 + 4R}; \end{aligned}$$

則 (67) 式變為

$$f_3'' + 2n f_3' + k^2 f_3 = B_1 \sin^3 (\theta - \alpha) + B_2 \sin (\theta - \alpha) \cos^2 (\theta - \alpha) + B_3 \sin^2 (\theta - \alpha) \cos (\theta - \alpha). \quad (68)$$

$$\text{令 } f_3 = D_1 \sin^3 (\theta - \alpha) + D_2 \sin^2 (\theta - \alpha) \cos (\theta - \alpha) +$$

$$+ D_3 \sin (\theta - \alpha) \cos^2 (\theta - \alpha) + D_4 \cos^3 (\theta - \alpha), \quad (69)$$

此地 D_1, D_2, D_3 及 D_4 為待定係數. 代入 (68) 式, 整理後比較 $\sin^3 (\theta - \alpha), \sin^2 (\theta - \alpha) \cos (\theta - \alpha), \sin (\theta - \alpha) \cos^2 (\theta - \alpha)$ 及 $\cos^3 (\theta - \alpha)$ 諸項之係數可得下列方程組:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - 3) D_1 - 2n D_2 + 2 D_3 &= B_1, \\ 6 D_1 + 4n D_2 + (k^2 - 7) D_3 - 6n D_4 &= B_2, \\ 6n D_1 + (k^2 - 7) D_2 - 4n D_3 + 3 D_4 &= B_3, \\ 2 D_2 + 2n D_3 + (k^2 - 3) D_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

解此聯立方程組可得

$$D_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad D_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad D_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}; \quad (71)$$

此地

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -[\dot{k}^8 - 20\dot{k}^6 + 4(10n^2 + 31)\dot{k}^4 - 24(7n^2 + 10)\dot{k}^2 + \\ &\quad + 9(16n^4 + 40n^2 + 15)] , \\ \Delta_1 &= -[\dot{k}^6 - 17\dot{k}^4 + (28n^2 + 85)\dot{k}^2 - 5(12n^2 + 21)] \cdot B_1 + \\ &\quad + 2[\dot{k}^4 - 2(2n^2 + 5)\dot{k}^2 + 3(2n^2 + 5)] \cdot B_2 - 2n[\dot{k}^4 - 6\dot{k}^2 + 3(4n^2 + 7)] \cdot B_3 , \\ \Delta_2 &= 6n \cdot [\dot{k}^4 - 6\dot{k}^2 + 3(4n^2 + 5)] \cdot B_1 - 2n(2\dot{k}^4 - 3\dot{k}^2 - 9) \cdot B_2 - \\ &\quad - [\dot{k}^6 - 13\dot{k}^4 + 3(4n^2 + 13)\dot{k}^2 - 9(4n^2 + 3)] \cdot B_3 , \\ \Delta_3 &= 6[\dot{k}^4 - 2(2n^2 + 5)\dot{k}^2 + 15] \cdot B_1 - [\dot{k}^6 - 13\dot{k}^4 + 3(4n^2 + 15)\dot{k}^2 - \\ &\quad - 9(4n^2 + 5)] \cdot B_2 + 4n(\dot{k}^4 - 9) \cdot B_3 , \\ \Delta_4 &= -24n[\dot{k}^2 - (2n^2 + 5)] \cdot B_1 + 2n[\dot{k}^4 - 6\dot{k}^2 + \\ &\quad + 3(4n^2 + 7)] \cdot B_2 + 2[\dot{k}^4 - 2(2n^2 + 5)\dot{k}^2 + 9] \cdot B_3 . \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

綜合上述結果可得

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{(\Delta q) \cdot \sin \alpha}{2n} \cdot \sin(\theta - \alpha) \cdot \Delta P_0 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \sin^3(\theta - \alpha) + \\ &\quad + \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin^2(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) + \frac{\Delta_3}{\Delta} \sin(\theta - \alpha) \cos^2(\theta - \alpha) + \\ &\quad + \frac{\Delta_4}{\Delta} \cos^3(\theta - \alpha) + \dots \end{aligned} \quad (73)$$

而由(42)可得靜載荷時之中心點之撓度為(以 $\Delta p_0 \sin \omega t$ 代 q , 並按(57)式變換):

$$(W_0)_{CT} = \frac{1}{S} \cdot \Delta P_0 \cdot \sin \theta - \frac{1}{S^4} \cdot H \cdot \Delta P_0^3 \cdot \sin^3 \theta + \dots \quad (74)$$

比較(73)與(74)式, 就可求得對於非線性靜力校正值之動力誤差, 如果要求對於線性靜力校正值之誤差, 則再加上(39)式之因素即可。具體計算此地從略。

五. 結 語

以上對受有預加張力在均佈載荷作用下彈性圓薄膜的大撓度問題作了研究, 除了繪製了一套圖表外, 並將若干量表示為級數形式。可以肯定, 只要預加張力相對於載荷而言比較大, 則線性理論可以適用。最後還討論了大撓度薄膜儀器的動力誤差問題。

作者在此特對中國科學院力學研究所胡海昌同志的熱誠而耐心的幫助及指示, 表示深切的謝意。

參 考 文 獻

- [1] Hency, H., Über den Spannungszustand in Kreisrunden Platten mit Verschwindender Biegesteifigkeit, *Zeit. f. Math. u. Physik.*, **63** (1915), 311—317.
- [2] 錢偉長, 軸對稱圓薄膜在大撓度情形下的一般理論, 彈性圓薄膜大撓度問題, 中國科學院出版, 1955.
- [3] Алехеев, С. А., Круглая плоская упругая мембрана под равномерной поперечной нагрузкой, *инж. сборник*, т. 14 (1953), 196—198.
- [4] Велик, Н. И., Теоретическое Исследование Динамических Погрешностей Мембранных Приборов, *Изв. АН СССР, ОТН*, 1954, No. 1, 105—113.
- [5] 錢偉長, 圓薄膜大撓度理論的攝動法, 彈性圓薄膜大撓度問題, 中國科學院出版, 1955.

ON THE LARGE DEFLECTION OF ELASTIC CIRCULAR MEMBRANE WITH INITIAL TENSION UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

KU CHIU-LIN

(Tsing-Hua University)

ABSTRACT

The problem of large deflection of a elastic circular membrane under uniformly distributed load without initial tension has been solved^[1, 2, 3]. But in many practical cases, such as in the membrane-apparatus and other technical manufacturings, the membranes are pre-stretched with uniform tensile force before fixing at the edge. Therefore, in this paper, the problem of large deflection of a elastic circular membrane under uniformly distributed load with initial tension is studied, and a group of curves and numerical data are given.

Several quantities such as deflection w , deflection at the center $w(0)$, radial and tangential force at the center $N(0)$, radial force at the edge $N_r(a)$, and tangential force at the edge $N_t(a)$ are expressed in the forms of power series of load q as follows:

$$w = \frac{a^2 - r^2}{4N} q - \frac{Eh}{512 N^4} [r^4 - 2(3-\mu) a^2 r^2 + a^4 (5-2\mu)] q^3 + \dots,$$

$$w(0) = \frac{a^2}{4N} q - \frac{Eh a^4}{512 N^4} (5-2\mu) q^3 + \dots,$$

$$N(0) = N + \frac{(3-\mu) a^2 Eh}{64(1-\mu) N^2} q^2 + \dots,$$

$$N_r(a) = N + \frac{a^2 Eh}{32(1-\mu) N^2} q^2 + \dots,$$

$$N_t(a) = N + \frac{\mu a^2 Eh}{32(1-\mu) N^2} q^2 + \dots,$$

Where r : radical distance from the center;

a : radius of the membrane;

q : uniform load per unit area;

N : initial tension;

E : modulus of elasticity;

h : thickness of the membrane;

μ : Poisson's ratio.

From the curves and the expressions it is easily seen that the results are nearly close to those of the linear theory when the initial tension is very large in comparison with the load.

Having these results, we finally discuss the problem of the calculation of the dynamic correction of largely deflected membrane-apparatus by perturbation method.