物 理 學 報

第 12 卷 第 5 期 1956 年 9 月

# 分析力學中正則方程的簡化*

張 宗 燧

(北京師範大學理論物理教研室)

提 要

本文討論以下的問題．在分析力學中，如果由於廣義動量的定義

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i \qquad i = 1, 2, \cdots N$$

($q$ 爲廣義坐標，$L$ 爲拉格倫日函數，$\dot{q} \equiv dq/dt$)，$(p, q)$ 間有某些關係

$$\phi_\alpha(p \cdots, q \cdots) = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2, \cdots m$$

我們問：能否尋到一些新變數 $Q, P$，使它們一方面依然適合正則方程，而另一方面成爲完全獨立的變數，不受上式的限制？我們證明，當 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ 間的泊松括號都等於零時，這是可能的．我們又證明：如果

$$\psi_\mu(p, \cdots q \cdots) = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

爲運動積分(由於起始條件的適當選擇而構成的運動積分也考慮在內)，而它們與 $\phi$ 間的泊松括號，它們彼此間的泊松括號都等於零，那末我們可以選擇新變數 $Q, P$，使它們同時不受 $\psi_\mu = 0$ 的限制．新變數 $Q$ 的數目等於 $N-m-n$.

應用這個理論至麥克斯韋場及矢量介子場並沒有帶來新的結果．我們指出：在電磁場正則方程中消去縱場後的結果正可以應用這個理論至麥克斯韋場而獲得．

## 一. 引　　言

這一篇短文的目的是解決以下的問題：如果由於

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots N) \tag{2}$$

($q_1, q_2, \cdots$ 爲廣義坐標，$L$ 爲拉格倫日函數，$\dot{q} = dq/dt$)，我們有下面的式子：

$$\tilde{\phi}_\alpha(q_1 \cdots, p_1 \cdots) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots), \tag{3}$$

那末我們問：能否找到一些新的變數 $Q, P$，使它們的運動微分方程可以寫爲正則的形式，而同時使它們是完全獨立的，不受 (3) 式的拘束？在提出這個問題時，我們假定

*1956 年 5 月 17 日收到．

(2) 式是有解的，亦卽 (1), (2), (3) 式是有解的.

這個問題的解決，對於某些力學系統的量子化，有極大的用處. 在 (3) 式出現的情形下，當我們將理論過渡至量子力學而繼續用 $q, p$ 作爲變數時，我們通常將 (3) 式改寫爲

$$\tilde{\varphi}_\alpha(q_1, \cdots, p_1, \cdots)\,\Psi = 0, \tag{4}$$

式中 $\Psi$ 代表波函數. 因此在 (3) 式出現的情形下，輔助條件是容易出現的. 當上面所提出的問題已經解決，那末我們便可以避免 (4) 式.

在適當的條件下 (條件見 §2)，上面所提的問題的解決是可能的. 但應用這個理論至麥克斯韋場、矢量介子場方程 (1), (2) 時，我們並沒有獲得新的結果 (見 §3).

在此必須指出：(3) 式中所包含的 $\tilde{\varphi}$ 是極廣泛的. 首先，它包含 $(q, p)$ 間由於 (1) 式而來的關係. 例如：如果 $L$ 不含有 $\dot{q}_1$，那末 $p_1 = 0$ 卽是 (3) 式中之一. 其次，它也包含由於 (1), (2) 而來的關係. 最後，我們也可以令它包含 (1), (2) 的某些運動積分 $\vartheta(q_1, \cdots, p_1, \cdots)$，詳情見 §2. 因此，雖然對於麥克斯韋場及矢量介子場它沒有帶來新的結果，這個理論是值得指出的.

這篇短文受了 Dirac 一篇論文[1] 的啓發，但本文所用方法是與他的論文不一樣的.

## 二. 理 論

現在討論如何去求上述的 $Q, P$ 及它們的正則方程，並說明這個理論的條件. 條件是：由 (1) 式而來的 $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots$ 都滿足

$$[\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\varphi}_\beta] = 0, \qquad \alpha, \beta, = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

$$[A, B] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right).$$

無疑地，這個條件是極強的，成爲理論的一個大缺點.

爲說明方便起見，稱這些 $\tilde{\varphi}$ 爲 $\phi^*$. 現在，考慮由 (1), (2) 式而來的 $\tilde{\varphi}$，考慮 (1), (2) 的運動積分 $\vartheta(q, p)$，在它們中選出所有的 $\tilde{\varphi}$ 及 $\vartheta$，選擇條件爲

$$[\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\varphi}_\beta] = [\tilde{\varphi}_\alpha, \vartheta_\beta] = [\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta] = 0,$$
$$[\tilde{\varphi}_\alpha, \phi^*_\beta] = [\vartheta_\alpha, \phi^*_\beta] = 0. \qquad (\text{對所有的 } \alpha, \beta) \tag{6}$$

選擇 $\vartheta(q, p)$ 時，我們將由於這些 $\vartheta(q, p)$ 的一部或全部等於零的起始條件而獲得的運動積分，也考慮在內. 我們現在將 $\phi^*$，選出的 $\tilde{\varphi}$, $\vartheta$ 統稱爲 $\phi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \cdots$. 依照以上所說，

$$[\phi_\alpha, \phi_\beta] = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, \rho), \tag{7}$$

式中 $\rho$ 代表這些 $\phi$ 的總數．這些 $\phi$ 相當於 Dirac 論文中第一種 $\phi$.

讓我們引入一個切觸變換

$$\sum (Q_i\,dP_i + p_i\,dq_i) = dS(q, P), \tag{8}$$

使

$$Q_i = \phi_i(q_1, \cdots, p_1 \cdots) \qquad (i = 1, 2, \cdots \rho). \tag{9}$$

注意在 (8) 中 $S$ 可以不必明顯地含有 $t$. 讓我們看一下這個切觸變換是否可能．為說明方便起見，我們令 $\alpha, \beta, \cdots$ 的任一個代表下註 $1, 2, \cdots, \rho$ 中之一，令 $r, s, \cdots$ 的任一個代表下註 $\rho+1, \rho+2, \cdots N$ 中之一，再令 $i, j, \cdots, \mu, \nu, \cdots$ 的任一個自 1 變化至 $N$. 用這個符號，(9) 式成為

$$Q_\alpha = \phi_\alpha(q, p). \tag{10}$$

由 (10), (8) 二式得

$$\phi_\alpha\left(q_1, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \cdots\right) = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}. \tag{11}$$

它的積分條件是

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial P_\beta} = \frac{\partial \phi_\beta}{\partial P_\alpha},$$

亦卽

$$\sum_i \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_\beta} = \sum_i \frac{\partial \phi_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_\alpha},$$

亦卽

$$\sum_i \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial q_i} = \sum_i \frac{\partial \phi_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q_i},$$

亦卽 (7) 式．因此使 (10) 式成立的切觸變換 (8) 是成立的．

令 $q, p$ 等為 $t, c_1, c_2, \cdots c_{2N}$ 的某一個函數，如此地選擇，使 $c_1, \cdots c_{2N}$ 取某一些固定值 $c_1^0, c_2^0, \cdots c_{2N}^0$ 時的 $q, p$ 滿足 (1), (2) 式，亦卽令該時的 $q, p$ 代表某一個實際運動．由於 $Q, P$ 等為 $q, p$ 的函數，$Q, P$ 也成為 $t, c_1, c_2 \cdots$ 的函數．考慮 $q, p, Q, P$ 對 $t$ 及對於某一個 $c$ 的變化；由 (8) 式得

$$\sum (Q_i \dot{P}_i + p_i \dot{q}_i) = \dot{S},$$

$$\sum (Q_i\,\delta P_i + p_i\,\delta q_i) = \delta S.$$

將前一式對這個 $c$ 取變化，後一個對時間微分，相減，得

$$\sum \{\delta Q_i \dot{P}_i - \dot{Q}_i\,\delta P_i + \delta p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i\,\delta q_i\} = 0. \tag{12}$$

現在令 $H$ 為

$$\sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \tag{13}$$

利用 (1) 式，得

$$dH = \sum \{\dot{q}_i\, dp_i - (\partial L/\partial q_i)\, dq_i\};$$

由此證明了當 (1) 式成立時，$H$ 是 $(q, p)$ 的函數．但 $(q, p)$ 間可能由於 (1) 式而有某些類似 (3) 的關係，因此 $H(q, p)$ 的函數形式不是唯一的．令 $H^{(1)}$ 爲任意一個選擇；它也滿足

$$H^{(1)}(q, p) = \sum p_i\dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \tag{14}$$
$$dH^{(1)} = \sum \{\dot{q}_i\, dp_i - (\partial L/\partial q_i)\, dq_i\}.$$

考慮 $q(t), p(t)$ 自實際運動過程上的值作一個小變化，亦即考慮 $c_1, c_2, \cdots$ 自 $c_1^0$, $c_2^0, \cdots$ 處作一個小變化．討論 $H^{(1)}\ (q, p)$ 的變化時，必須在 (14) 式右方引入$(q, \dot{q}, p)$中的關係（即 (1) 式），因此我們在這個變化上加上一個限制，即 $q(t), p(t)$ 在變化前後都滿足 (1) 式．除了這個限制外，變化是任意的．對於這樣的變化，我們有

$$\delta H^{(1)} = \sum \{\dot{q}_i\, \delta p_i - (\partial L/\partial q_i)\, \delta q_i\}.$$

因爲變化是在實際運動附近的，我們可以在上式中用 $\dot{p}_i$ 代替 $\partial L/\partial q_i$，得

$$\delta H^{(1)} = \sum (\dot{q}_i\, \delta p_i - \dot{p}_i\, \delta q_i).$$

因此 (12) 式成爲

$$\sum (\delta Q_i\, \dot{P}_i - \dot{Q}_i\, \delta P_i) = -\,\delta H^{(1)}. \tag{15}$$

上式的意義是：令 $Q, P$ 自實際運動上的值承受一個任意的但與 (1) 式不矛盾的變化，那時 $\delta Q_i$, $\delta P_i$ 及 $\delta H^{(1)}$ 與運動過程的 $\dot{Q}, \dot{P}$ 有以上的關係．

將 $H^{(1)}\ (q, p)$ 寫爲 $K(Q, P)$ 或 $K(Q_\alpha, Q_r, P_\alpha, P_r)$． 由於 $Q_\alpha$, $\dot{Q}_\alpha$ 在運動過程中等於零，得

$$\frac{\partial}{\partial P_\alpha} K(O, Q_r, P_\beta, P_r) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \rho). \tag{16}$$

這個式子在運動路程上受到滿足．

(16) 式有三個不同的情形：

(i) 它們的左方都恆等於零；

(ii) 它們的左方是 $P_1, P_2, \cdots P_\rho$ 的獨立函數，因此可以由 (16) 式求出

$$P_\alpha = \theta_\alpha(Q_r, P_r) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \rho); \tag{17}$$

(iii) 它們的左方不都恆等爲零而也不是 $P_1, \cdots P_\rho$ 的獨立函數．

第三種情形是不允許的，因爲在此我們可以在 (16) 式中至少獲得一個式子

$$g(Q_r, P_r) = 0, \tag{18}$$

而這是一個新的運動積分，與 $Q_\alpha(\alpha = 1, \cdots \rho)$ 所構成的泊松括號等於零，因而否定了

本節開始時所說 $\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_\rho$ 包含了滿足 (6) 式的運動積分的全部. 餘下的只有第一個及第二個情形.

在第一個情形下, $K(0, Q_r, P_\alpha, P_r)$ 不是 $P_\alpha$ 的函數. 令 $H'(Q_r, P_r)$ 爲 $K(0, Q_r, 0, P_r)$, 我們自 (15) 式獲得所需的結果

$$\dot{Q}_r = \partial H'/\partial P_r, \qquad \dot{P}_r = -\partial H'/\partial Q_r. \tag{19}$$

在第二個情形下, 我們令

$$H'(Q_r, P_r) = K(O, Q_r, \theta_\alpha(Q_r, P_r), P_r). \tag{20}$$

那末, 在運動過程上任何一點我們有

$$\frac{\partial H'}{\partial Q_r} = \left\{\frac{\partial K}{\partial Q_r} + \sum_\alpha \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial Q_r}\right\}_{Q_\alpha=0,\ P_\alpha=\theta_\alpha} = \left(\frac{\partial K}{\partial Q_r}\right)_{Q_\alpha=0,\ P_\alpha=\theta_\alpha}$$

及

$$\dot{P}_r = -(\partial K/\partial Q_r)_{Q_\alpha=0,\ P_\alpha=\theta_\alpha},$$

因此我們得

$$\dot{P}_r = -(\partial H'/\partial Q_r).$$

同理, 可得

$$\dot{Q}_r = (\partial H'/\partial P_r),$$

便獲得了所需的結果.

一個特殊的情形是 $-H^{(1)}$ 本身卽是一個 $\phi$. 稱它爲 $\phi_1$, (15) 式成爲

$$\sum (\delta Q_i \dot{P}_i - \dot{Q}_i \delta P_i) = \delta Q_1,$$

因此

$$\dot{P}_1 = 1,$$

卽

$$P_1 = t + C.$$

以此代入 $S(q, P)$, 得 $S = S(q_1, \cdots, t + C, P_2, \cdots)$. 由於 $\alpha = 1$ 的 (11) 式, 它必然滿足

$$-H^{(1)}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - \frac{\partial S}{\partial t}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0,$$

因此它卽是尋常的哈密頓-雅可比方程的一個解. 在這個情形下, 尋到 $S$ 在實質上卽是尋到了運動方程 $q = q(t)$, 因此無庸討論 $P_r$, $Q_r$ 的微分方程, 能否寫爲正則方程. 但在這個特殊情形下, 將理論量子化而不引入輔助條件是有困難的.

理論的一個簡易的推廣是假定 $\phi$ 中含有 $t$, 意卽

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(q, p, t) \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \rho).$$

那時我們只消將 (8) 式中 $S(q, P)$ 改爲 $S(q, P, t)$. 這個簡易的推廣不擬詳細寫出.

## 三. 應　用

對於矢量介子場，如果選用以下的拉格倫日函數

$$-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{\kappa^2}{8\pi}A_\mu A_\mu,$$

$$\left(F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},\qquad \mu=1,2,3,4\right)\tag{21}$$

那末 $A_4$ 的動量 $p_4\equiv 0$. (2) 中關於 $A_\mu$ 的式子為

$$\partial F_{\mu 4}/\partial x_\mu-\kappa^2 A_4=0.\tag{22}$$

這是沒有其他場時的情形；當其他場存在時，討論是類似的. 因為 $p_4$ 與 (22) 左方所構成的泊松括號不等於零，我們令 $p_4$ 為 $\phi_\alpha(p,q)$ 的全部. 應用以上的理論，使 $p_4=Q_1$ (同時使 $A_1, A_2, A_3, p_1, p_2, p_3$ 不變)，得

$$P_1=-A_4,$$

而 $\alpha=1$ 的 (16) 式正是 (22) 式. 所獲得的 $H'(Q_r,P_r)$ 正是原來的 (13) 式利用 (22) 式消去 $A_4$ 後的結果[2].

對於麥克斯韋場及一些其他物質場在一起的情形，當我們令電磁場的拉格倫日函數 $L$ 為

$$-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

時，我們有二個 $\phi$,

$$\phi_1=p_4,\qquad \phi_2=\partial F_{\mu 4}/\partial x_\mu+4\pi\rho i.\tag{23}$$

(式中 $\rho$ 乃物質電荷密度，$F_{44}\equiv 0$, $F_{14}$, $F_{24}$, $F_{34}$ 除一常數倍外乃是 $A_1$, $A_2$, $A_3$ 的動量.) 援用以上的理論，我們所獲得的新正則方程正是尋常在電磁場的正則方程中消去縱場後的結果. 當我們令 $L$ 為

$$-(8\pi)^{-1}(\partial A_\mu/\partial x_\nu)(\partial A_\mu/\partial x_\nu)$$

時，我們有二個 $\phi$,

$$\phi_1=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+c^{-1}(\partial\varphi/\partial t),\tag{24}$$

$$\phi_2=c^{-1}(\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}/\partial t)-\nabla^2\varphi-4\pi\rho.\tag{25}$$

援用以上的理論，我們所獲得的新正則方程，也是尋常在電磁場的正則方程中消去縱場後的結果. 因為這兩個情形是差不多的，我們只寫出後一個情形中的計算.

我們用文獻 [3] 中的符號，但作以下的改變. 場的變數及動量的傅里葉係數在變換前寫為 $a_{\mu k}$, $p_{\mu k}$ (即將 $\alpha$ 改寫為 $\mu$)，在變換後寫為 $Q_{\mu k}$, $P_{\mu k}$, 質點的坐標及動量在變換前寫為 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{g}$, 在變換後寫為 $\boldsymbol{\xi}^*$, $\boldsymbol{g}^*$. 原來的哈密頓為

$$\sum_i c\{m^{(i)2}c^2+[\boldsymbol{g}^{(i)}-e^{(i)}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^i)/c]^2\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\sum_i\int d^3\boldsymbol{k}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{(i)}a_{0k}\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)})+$$
$$+\sum_\mu \operatorname{sgn}\mu\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{k}\{2\pi c^2 p_{\mu\boldsymbol{k}}p_{\mu,-\boldsymbol{k}}+(8\pi)^{-1}k^2a_{\mu\boldsymbol{k}}a_{\mu,-\boldsymbol{k}}\}. \tag{26}$$

依照我們在此文中的符號，這個式子應寫爲 $H^{(1)}$. 我們的 $\phi$ 是

$$\phi_1(\boldsymbol{k})=k^2a_{3\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,p_{0,-\boldsymbol{k}},$$
$$\phi_2(\boldsymbol{k})=4\pi kc\,p_{3,-\boldsymbol{k}}+k^2a_{0\boldsymbol{k}}-4\pi(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum e^{(i)}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}). \tag{27}$$

不難證明

$$[\phi_1(\boldsymbol{k}),\phi_1(\boldsymbol{k}')]=[\phi_1(\boldsymbol{k}),\phi_2(\boldsymbol{k}')]=\cdots=0. \tag{28}$$

爲避免下註的混亂，我們將 $\phi_1,\phi_2$ 分別地改寫爲 $\phi_3,\phi_0$，而在此後的公式中，令 $\alpha,\beta,\cdots$ 取 3 或 0 値，$r,s,\cdots$ 取 1 或 2 値，$i,j,\cdots,\mu,\nu,\cdots$ 取 0, 1, 2, 3 値. $S$ 的微分方程爲

$$\frac{\delta S}{\delta P_{0\boldsymbol{k}}}=Q_{0\boldsymbol{k}}=4\pi kc\frac{\delta S}{\delta a_{3,-\boldsymbol{k}}}+k^2a_{0\boldsymbol{k}}-4\pi(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum e^{(i)}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}),$$
$$\frac{\delta S}{\delta P_{3\boldsymbol{k}}}=Q_{3\boldsymbol{k}}=k^2a_{3\boldsymbol{k}}+4\pi kc\frac{\delta S}{\delta a_{0,-\boldsymbol{k}}}. \tag{29}$$

由此求得一個 $S$ 如下：

$$S=\int d^3\boldsymbol{k}\{-4\pi P_{0\boldsymbol{k}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum e^{(i)}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)})-$$
$$-(k/4\pi c)\,a_{3,-\boldsymbol{k}}a_{0\boldsymbol{k}}+$$
$$+f_1[(a_{3,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{0\boldsymbol{k}}),(a_{0,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{3\boldsymbol{k}})]+$$
$$+\textstyle\sum_{r=1,2}P_{r\boldsymbol{k}}a_{r\boldsymbol{k}}\}+\sum\boldsymbol{g}^{*(i)}\boldsymbol{\xi}^{(i)}+f_2(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\boldsymbol{\xi}^{(2)},\cdots), \tag{30}$$

式中 $f_1,f_2$ 爲二個任意函數. 爲肯定起見，取

$$f_1=\frac{1}{2}(a_{3,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{0\boldsymbol{k}})^2+\frac{1}{2}(a_{0,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{3\boldsymbol{k}})^2.$$

於是，得

$$Q_{r\boldsymbol{k}}=a_{r\boldsymbol{k}},\qquad P_{r\boldsymbol{k}}=p_{r\boldsymbol{k}},\qquad (r=1,2)$$
$$Q_{0\boldsymbol{k}}=(a_{3,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{0\boldsymbol{k}})\,4\pi kc-$$
$$-4\pi(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum e^{(i)}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}),$$
$$Q_{3\boldsymbol{k}}=(a_{0,-\boldsymbol{k}}+4\pi kc\,P_{3\boldsymbol{k}})\,4\pi kc,$$
$$\boldsymbol{\xi}^i=\boldsymbol{\xi}^{*i},$$

$$g^i = g^{*i} + \int d^3\boldsymbol{k}\, 4\pi(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\, i\boldsymbol{k}\, P_{0\boldsymbol{k}}\, e^{(i)} \exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) + \partial f^{(2)}/\partial\boldsymbol{\xi}^{(i)},$$

$$p_{3\boldsymbol{k}} = \cdots, \qquad p_{0\boldsymbol{k}} = \cdots. \tag{31}$$

由此可以直接證明：如果將 $H^{(1)}(q, p, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{g})$ 寫爲 $K(Q, P, \boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{g}^*)$，下面二式

$$\delta K/\delta P_{0\boldsymbol{k}} = 0, \qquad \delta K/\delta P_{3\boldsymbol{k}} = 0 \tag{32}$$

在 $Q_{0\boldsymbol{k}} = Q_{3\boldsymbol{k}} = 0$ 時恆等爲零．因此我們只消在 $K$ 中令 $Q_{0\boldsymbol{k}} = Q_{3\boldsymbol{k}} = 0$，便獲得了新哈密頓 $H'$.

爲使得這裏的結果完全與文獻［3］中的結果一致，我們令

$$f_2(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \cdots) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\int d^3\boldsymbol{k}\,(2\pi)^{-3}\,\frac{e^{(i)}e^{(j)}}{k^2c^2}\exp[-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}^{(i)} + \boldsymbol{\xi}^{(j)})], \tag{33}$$

如此便不難證明

$$\boldsymbol{g}^{*i} = \boldsymbol{g}^i - \frac{e^{(i)}}{c}\boldsymbol{A}_{\rm long}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}). \tag{34}$$

事實上，因 $Q_{0\boldsymbol{k}} = 0$,

$$P_{0\boldsymbol{k}} = -\frac{1}{4\pi kc}a_{3,-\boldsymbol{k}} + \frac{1}{4\pi k^2c^2}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum e^{(j)}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(j)}),$$

代入 (31) 式，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^{*i} = \boldsymbol{g}^i &- \frac{e^{(i)}}{c}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d^3\boldsymbol{k}\,\frac{\boldsymbol{k}}{k}\,ia_{3\boldsymbol{k}}\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) - \\ &-(2\pi)^{-3}\frac{i}{c^2}\int d^3\boldsymbol{k}\,\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\sum_j e^{(i)}e^{(j)}\exp[-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}^{(i)} + \boldsymbol{\xi}^{(j)})] - \\ &-\partial f_2/\partial\boldsymbol{\xi}^i;\end{aligned}$$

以 (33) 式代入上式最末一項，便得了所需的證明．

文獻［3］的哈密頓 (10) 式，事實上卽是在本文 (26) 式中令 $Q_{0\boldsymbol{k}} = Q_{3\boldsymbol{k}} = 0$，再令 $\boldsymbol{g}^i$ 爲

$$\boldsymbol{g}^{*i} + (e^i/c)\boldsymbol{A}_{\rm long}(\boldsymbol{\xi}^i)$$

而獲得的，因此與此間的最後結果完全一致．

這個方法的應用，顯然是存在的．例如在自旋爲 2 的粒子的場方程中[4]，Pauli 與 Fierz 曾證明有十個輔助條件．（當然用本文的理論去消除這些輔助條件可能因爲它們不滿足 (6) 式而有困難．）詳細情形不擬在此討論．餘下的問題乃是如何改進這裏的方法——卽減弱方法成立的條件，但一時似乎不易解決．

## 參　考　文　獻

[1] Dirac, P. A. M., *Proc. Camb. Phil, Soc.* **29** (1933), 289; *Canadian J. of Math.* **2** (1950), 129.
[2] Chang T. S., (張宗燧), *Proc. Camb. Phil, Soc.* **43** (1947), 196.
[3] 張宗燧,物理學報 **11** (1955), 453.
[4] Pauli and Fierz, *Proc. Roy. Soc.* **173** (1939), 211.
Fierz, *Hel. Acta,* **12** (1939), 3.

# REDUCTION OF CANONICAL EQUATIONS

CHANG TSUNG-SUI

*(Normal University of Peking)*

ABSTRACT

This short paper discusses the following problem in analytical mechanics. If on account of the defining equations

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots N) \tag{1}$$

($q$ being the generalized coordinates, $L$ the Lagrangian and ($\dot{q} = dq/dt$), there exist between $p$, $q$ certain relations

$$\phi_\alpha(p, q) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m) \tag{2}$$

may we find certain new variables $P, Q$ independent of the relations (2) and satisfying canonical equations with a suitably choosen Hamiltonian? In this paper, we prove that this is indeed possible provided that the different Poisson Brackets between the various $\phi_\alpha$ vanish. At the same time we prove that if

$$\vartheta_\mu(p, q) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n) \tag{3}$$

are integrals of motion whose mutual Poisson Brackets and whose Poisson Brackets with $\phi_\alpha$ all vanish, then we may choose new variables $P, Q$ simultaneously independent of (2), (3) and satisfying certain canonical equations. In (3), functions $\psi_\mu$ of $p$, $q$ which vanish on account of the equations of motion and the initial conditions $\psi_\mu = 0$ are included and the above mentioned $P, Q$ exist for motions under the initial conditions $\psi_\mu = 0$. The number of variables is reduced to $N—n—m$.

Application of this method to Maxwell field and the field of vector mesons, however, does not lead to new results. In particular, the application to Maxwell field leads to the usual elimination of the longitudinal waves. It is scarcely necessary to point out that such a method will be useful in removing certain supplemantary conditions in quantized field theories.