物理學報
第 12 卷第 5 期 1956 年 9 月

泥沙在靜水中的沉澱運動

(II) 沉速在時間過程裏的變化*

蔡樹棠
(中國科學院力學研究所)

一. 引言

在工程上一般碰到泥沙在水中運動的時候，都應用斯托克斯公式來計算泥沙所受到的阻力[1,2]. 但是斯托克斯公式是一個圓球在無窮的粘性流體中作匀速運動時的阻力定律，對於很多砂子同時下沉作非匀速運動時，斯托克斯公式顯然不能應用. 本文根據了流體力學在小瑞諾數情況下的理論來討論比較稀薄的泥沙在靜水中的非匀速的沉澱問題.

我們仍用圓球近似地代表單個泥沙顆粒，並應用圓球在流體中作不定常運動的阻力公式. 在泥沙在靜水中的沉澱運動問題中，我們得出一個微分方程和一個積分微分方程. 從這兩個運動方程的解，我們得到這樣的結果：當泥沙在重力作用之下開始下沉不久（t 比較小），則泥沙與水的相對速度是和時間 t 成正比；當 t 趨於無窮大時，泥沙按斯托克斯阻力定律下沉；在時間很大而不是無窮大，則現有公式與斯托克斯公式之間的差別是和 $1/t^{\frac{1}{2}}$ 成正比，由此可知泥沙趨近於依斯托克斯定律下沉的速度極限是比較緩慢的，並不像一般所想像的那麼快.

二. 泥沙在靜水中的沉澱運動

A. 泥沙在靜水中沉澱時的運動方程

關於兩種氣體混合在一起時的運動問題，周培源教授曾在 1947 年發表過一篇論文[3]. 最近蘇聯的巴倫卜拉脫[4]曾用類似的方程來討論泥沙的運動. 我們現在用他們的理論方法來討論泥沙在靜水中的沉澱問題.

我們這樣採取坐標軸線：使 z 軸垂直於地面，取向上方向爲正方向，使坐標面 $z=0$ 和水面相合. 我們把泥沙和水的運動看作是連續介質運動. 設 ρ 是單位體積裏泥沙

*1956 年 3 月 22 日收到.

所佔的體積，$1-\rho$ 是單位體積裏水所佔的體積，v 是泥沙的平均速度，u 是水的平均速度．那麼在單位時間裏砂子經過單位面積下沉的體積是 $-\rho v$，水經過單位面積上升的體積是 $u(1-\rho)$．由於我們討論的問題是靜水中的沉澱，所以下沉的體積必須和上升的體積相等，這樣我們就得到

$$-\rho v = u(1-\rho) \quad \text{或} \quad \rho v + u(1-\rho) = 0. \tag{1}$$

引進相對速度 w，

$$w = u - v, \tag{2}$$

方程 (1) 就可以寫成

$$u = \rho w. \tag{3}$$

我們可以很清楚地看出，水的上升速度是和濃度的一次方成正比的．

假使我們討論的問題含砂濃度不是非常大，那麼砂子顆粒之間的相互作用可以略去．這時作用在泥沙上的作用力除了重力以外，還有水對砂子的作用力．假使我們用 f 來代表水對砂子的作用力，我們就可以寫出泥沙的方程：

$$d_2 \rho \frac{Dv}{dt} = f - d_2 \rho g; \tag{4}$$

式中 d_2 是砂子的密度．

我們現在來給出水對砂子的作用力 f．和前文[5]中一樣，當含砂濃度不是太大的時候，我們可以略去水的上升運動．我們知道圓球在靜止流體中作不定常運動時的阻力可以用布西淫斯克[6]公式表出．我們用 R' 表示按布西淫斯克公式得出的作用在單個圓球上的作用力，那麼 R' 的表示式是

$$R' = \frac{4}{3}\pi a^3 d_1 g + \frac{2}{3}\pi a^3 d_1 \frac{Dw}{dt} + 6\pi a\mu w + \frac{6\pi a^2\mu}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\frac{Dw}{dt}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau;$$

式中 d_1 是水的密度，a 是球的半徑，μ 是水的粘性係數．

從前文中知道，在很多砂子同時下沉的時候，摩擦阻力由於其他砂子的存在，要比單個時候的摩擦阻力要大一些．按照前文所給出的結果，我們可以把 w 項的係數加大 β 倍，

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\rho}{\frac{\pi}{6}}}}; \tag{5}$$

另外，$\frac{Dw}{dt}$ 項和積分項的係數應該如何修正，很難討論，不過這對我們最後的結論來說並不要緊，所以暫且使它們保持不變．經過修正以後，我們得到很多砂子同時下沉

時每個砂子上所受的阻力 R. R 的形式如下：

$$R=\frac{4}{3}\pi a^3 d_1 g+\frac{3}{2}\pi a^3 d_1\frac{Dw}{dt}+6\pi a\mu\beta w+\frac{6\pi a^2\mu}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{Dw}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{6}$$

設單位體積裏有砂子 n 顆，我們就有

$$\rho=\frac{4}{3}\pi a^3 n, \tag{7}$$

而 n 顆砂子上所受的總的作用力是

$$f=nR=\rho\left[d_1 g+\frac{1}{2}d_1\frac{Dw}{dt}+\frac{9\mu}{2a^2}\left\{\beta w+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{Dw}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right\}\right]. \tag{8}$$

把 f 代入方程 (4)，並且由於水和泥沙的速度都很小，所以把速度的非線性項略去，就得到

$$d_2\rho\frac{\partial V}{\partial t}=-(d_2-d_1)g\rho+\frac{1}{2}\rho d_1\frac{\partial w}{dt}+\frac{9}{2}\frac{\rho\mu}{a^2}\left\{\beta w+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{\partial w}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right\}.$$

在等式兩端除去因子 ρ 以後，再略去式中 ρ 的一次項，並把相同項集合在一起，得到

$$\left(d_2+\frac{1}{2}d_1\right)\frac{\partial w}{\partial t}=(d_2-d_1)g-\frac{9\mu}{2a^2}\left\{\beta w+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{\partial w}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right\}. \tag{9}$$

另外，我們可以寫出砂子的連續方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v)=0.$$

用 w 代替 $-v$，並且略去式中 ρ 的高次項，然後再和 (9) 式合併就得到最後的兩個方程：

$$\left(d_2+\frac{1}{2}d_1\right)\frac{\partial w}{\partial t}=(d_2-d_1)g-\frac{9\mu}{2a^2}\left\{\beta w+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{\partial w}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right\}, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(\rho W). \tag{10b}$$

B. 泥沙在靜水中沉澱方程的解

我們現在來討論方程 (10) 的解. 我們給出的初始條件是：

當 $t=0$　　$\rho=\rho_0=\text{const.}$　　$w=0$.

我們很容易證明在時間的過程裏，ρ 保持常數，w 僅僅是時間 t 的函數 [詳見附錄].

現在我們來確定 w 對 t 的函數關係. 我們令

$$\frac{(d_2-d_1)\,g}{d_2+\dfrac{1}{2}\,d_1}=G,\quad \frac{\dfrac{9}{2}\,\dfrac{\mu}{a^2}\,\beta}{d_2+\dfrac{1}{2}\,d_1}=A,\quad \frac{\dfrac{9}{2}\,\dfrac{\mu}{a^2}\,\dfrac{a}{\sqrt{\pi\nu}}}{d_2+\dfrac{1}{2}\,d_1}=B. \tag{11}$$

由於 ρ 是常數，G, A, 和 B 都是常數，所以方程（10a）就簡化成

$$\dot{w}(t)=G-Aw-B\int_0^t\frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau; \tag{12}$$

式中 w 上的一點表示 w 對 t 的微分.

我們現在要解方程（12）. 我們用 $\dfrac{1}{\sqrt{x-t}}$ 乘方程（12）的兩端，然後對 t 從 $t=0$ 積分到 $t=x$；再掉換其中二重積分的積分次序，得到

$$\int_0^x\frac{\dot{w}(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}=2G\sqrt{x}-A\int_0^x\frac{w(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}-B\pi w(x). \tag{13}$$

再用同樣的方法，用 $\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$ 乘（13）式的兩端，然後從 0 積分到 y. 更換其中二重積分的次序，去掉共同的因子 π，我們得到

$$w(y)=G\,y-B\int_0^y\frac{w(x)\,dx}{\sqrt{y-x}}-A\int_0^y w(x)\,dx. \tag{14}$$

在（12），（13）和（14）中更換變數，就得到這個微分積分方程的三種不同形式. 從這三個方程中消去

$$\int_0^t\frac{\dot{w}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\quad 和\quad \int_0^t\frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

經過化簡以後，就得到

$$\dot{w}(t)+(2A-B^2\pi)\,w(t)+A^2\int_0^t w(\tau)\,d\tau=G-2GB\sqrt{t}+AG\,t. \tag{15}$$

把（15）式微分一次，得到

$$\ddot{w}(t)+(2A-B^2\pi)\,\dot{w}(t)+A^2\,w=AG-\frac{GB}{\sqrt{t}}. \tag{16}$$

設輔助方程

$$m^2+(2A-B^2\pi)\,m+A^2=0,$$

m 的根爲 $-\alpha$ 和 $-\bar{\alpha}$（$\bar{\alpha}$ 是 α 的共軛複數）. 那麼方程（16）中 w 的解是

$$w=\frac{G}{A}+P_1\,e^{-\alpha t}+P_2\,e^{-\bar{\alpha}t}-GBe^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\alpha-\bar{\alpha})\tau_1}\,d\tau_1\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\,e^{\bar{\alpha}\tau_2}\,d\tau_2. \tag{17}$$

式中 P_1 和 P_2 是待定常數.

當 $t=0$ 時，我們有初始條件

$$w=0,\quad 即\quad \frac{G}{A}+P_1+P_2=0. \tag{18}$$

再從方程 (12)，當 $t=0$ 時，

$$\dot{w}=G\quad 卽\quad -P_1\alpha-P_2\bar{\alpha}=G. \tag{19}$$

解 (18) 和 (19) 得到

$$P_1=\frac{G\left(1-\frac{\bar{\alpha}}{A}\right)}{\bar{\alpha}-\alpha},\qquad P_2=\frac{G\left(1-\frac{\alpha}{A}\right)}{\alpha-\bar{\alpha}}. \tag{20}$$

把 (17) 式中的二重積分經過變更積分次序化爲單積分之後，我們就得到 w 的解如下：

$$w=\frac{G}{A}+\frac{G\left(1-\frac{\bar{\alpha}}{A}\right)}{\bar{\alpha}-\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{G\left(1-\frac{\alpha}{A}\right)}{\alpha-\bar{\alpha}}e^{-\bar{\alpha}t}-$$

$$-\frac{GB}{\alpha-\bar{\alpha}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\bar{\alpha}\tau}-e^{-\alpha\tau}\right]d\tau. \tag{21}$$

我們現在來計算 α 和 $\bar{\alpha}$ 的値. 我們令

$$\frac{d_2}{d_1}=k. \tag{22}$$

那麼 (12) 式中的 G, A, 和 B 成爲：

$$G=\frac{(k-1)g}{k+\frac{1}{2}},\quad A=\frac{\frac{9}{2}\frac{\nu}{a^2}\beta}{k+\frac{1}{2}},\quad B=\frac{\frac{9}{2}\frac{\nu}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}}{k+\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

經過了簡單的計算，得到

$$\alpha=A-\frac{B^2\pi}{2}+i\sqrt{A^2-\left(A-\frac{B^2\pi}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{9}{8}\frac{\nu}{a^2}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\left[4\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta-9+3i\sqrt{8\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta-9}\right]. \tag{24}$$

我們令

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{\frac{9}{8}\frac{\nu}{a^2}\left[4\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta-9\right]}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2},\\ \alpha_2&=\frac{\frac{27}{8}\frac{\nu}{a^2}\sqrt{8\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta-9}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

那麽

$$\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2, \qquad \bar{\alpha} = \alpha_1 - i\,\alpha_2. \tag{26}$$

把 (26) 式代入 (21)，最後得到

$$w = w_\infty \left[1 + e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{A-\alpha_1}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t - \cos\alpha_2 t\right) - \frac{AB}{\alpha_2}\int_0^t \frac{e^{-\alpha_1\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\sin\alpha_2\tau\, d\tau\right]; \tag{27}$$

式中 w_∞ 的定義是

$$w_\infty = \frac{G}{A} = 2\,(k-1)\,a^2 g \Big/ 9\,\beta\nu. \tag{28}$$

爲了計算方便起見，w 可寫成

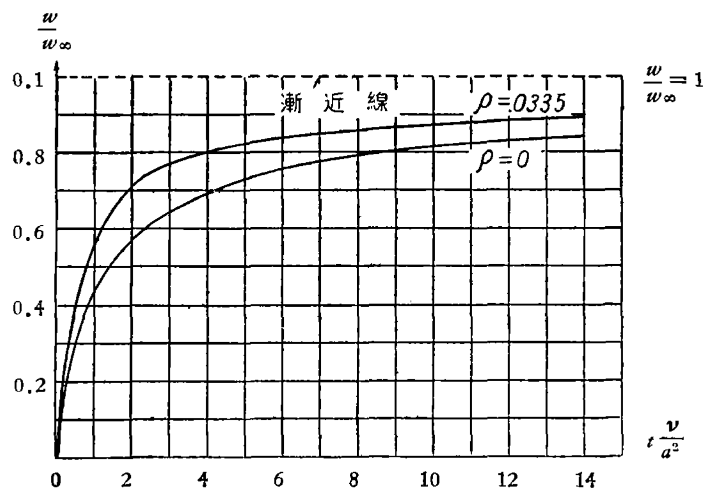
$$w = w_\infty \left[1 + e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{A-\alpha_1}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t - \cos\alpha_2 t\right) - \right.$$
$$\left. - 2AB\int_0^t \sqrt{t-\tau}\; e^{-\alpha_1\tau}\left(\cos\alpha_2\tau - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sin\alpha_2\tau\right)d\tau\right]. \tag{29}$$

這個公式有下列近似式：

$$\left.\begin{aligned} &\text{當}\quad t\to 0\quad\text{時，}\quad w \approx \frac{(k-1)}{k+\frac{1}{2}}\,gt;\\ &\text{當}\quad t\to\infty\quad\text{時，}\quad w \approx w_\infty\left[1 - \frac{B}{A}\,t^{-\frac{1}{2}}\right] \approx\\ &\qquad \approx w_\infty\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\beta}\left(t\,\frac{\nu}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

知道相對速度 w 以後，我們可以找到砂子的沉速 v，

$$v = -\,(1-\rho)\,w; \tag{31}$$



式中的負號表示砂子的速度是向下的. 同樣我們也可以找到水的上升速度 u,

$$u = \rho w\,; \tag{32}$$

水的速度是向上的,所以它是正號.

在上面的圖中,我們給出了 $\frac{w}{w_\infty}$ 在時間過程裏的變化曲線, 圖中曲線族所對應的 k 值爲 2.7 .

四. 討　　論

從我們得到的結果可以看出,在我們的問題裏有一個特性時間 $\frac{a^2}{\nu}$. 當 t 比 $\frac{a^2}{\nu}$ 大得很多的時候, w 的數値滿足下面的關係式:

$$\frac{w_\infty - w}{w_\infty} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\beta}\left(t\frac{\nu}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

這個式子是按照 $t^{-\frac{1}{2}}$ 趨近於零的, 這和一般人所想像的按照指數形式趨近於零大不相同. 假使我們要 w 達到 $0.99\,w_\infty$, 我們就有

$$0.01 \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\beta}\left(t\frac{\nu}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

也就是

$$\frac{t}{\frac{a^2}{\nu}} \approx 3\times 10^3 .$$

所以 $w_\infty - w$ 趨近於零是非常慢的.

最後我衷心地感謝我的老師周培源教授給了我這個問題, 並且在研究過程中,他給了我親切的指導和熱心的帮助. 同時我也深深地感謝吳新謀同志在工作過程中對我的熱心帮助.

附　　錄

我們現有的方程是

$$\left(d_2 + \frac{1}{2}d_1\right)\frac{\partial w}{\partial t} = (d_2 - d_1)\,g - \frac{9\mu}{2a^2}\left\{\beta w + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{\frac{\partial w}{\partial \tau}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right\}, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w). \tag{10b}$$

現在的初始條件是

當 $t = 0$,　　　$\rho = \rho_0 = \text{const}$,　$w = 0$.

我們今用數學歸納法證明在時間的過程裏

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad w = w(t).$$

先假設:

$$當\quad n \geqslant k > 0 \qquad \left(\frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}\right)_{t=0} = 0, \tag{A. a}$$

$$當\quad n-1 \geqslant k \geqslant 0 \qquad \left(\frac{\partial^{k+1} w}{\partial z\, \partial t^k}\right)_{t=0} = 0; \tag{A. b}$$

然後證明:

$$\left(\frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}}\right)_{t=0} = 0 \quad 和 \quad \left(\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n}\right)_{t=0} = 0.$$

首先我們討論函數

$$\phi = \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \tag{B}$$

的微分. 式中 $\psi(\tau)$ 是某一函數，它在零點的數值 $\psi(0) = 0$. 用部分積分法，得到

$$\phi = -2\sqrt{t-\tau}\,\Big|_0^t + 2\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\, d\tau = 2\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\, d\tau.$$

因此把 ϕ 對 t 微分,得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \int_0^t \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau. \tag{C}$$

把 (10a) 對 z 微分,我們得到

$$\left(d_2 + \frac{1}{2} d_1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t} = -\frac{9\mu}{2a^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\beta w) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}}\int_0^t \frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial \tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\right\}. \tag{D}$$

利用初始時的假設 (A. b)，和公式 (C)，我們把 (D) 式對 t 微分 $n-1$ 次,就得到

$$\left(d_2 + \frac{1}{2} d_1\right)\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n} = -\frac{9\mu}{2a^2}\left\{\frac{\partial^n}{\partial z\, \partial t^{n-1}}(\beta w) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}}\int_0^t \frac{\dfrac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial \tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\right\}.$$

當 $t = 0$ 時,由萊本尼茲公式得到

$$\left(d_2 + \frac{1}{2} d_1\right)\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n} = -\frac{9\mu}{2a^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\partial^k \beta}{\partial t^k}\,\frac{\partial^{n+k} w}{\partial t^{n-k}}\right)_{t=0}\binom{n}{k},$$

式中 $\binom{n}{k}$ 表示二項式展開式中的係數. 因爲 β 是 ρ 的函數，所以 β 對時間的偏導數可以用 ρ 對時間的偏導數表出. 再利用 (A. a) 就得到

$$\left(d_2 + \frac{1}{2} d_1\right)\left(\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n}\right)_{t=0} = -\frac{9\mu}{2a^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta\,\frac{\partial^{n-1} w}{\partial t^{n-1}}\right)_{t=0}.$$

利用初始條件並假定 (A. b)，得到

$$\left(d_2 + \frac{1}{2} d_1\right)\left(\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n}\right)_{t=0} = 0,$$

即
$$\left(\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n}\right)_{t=0} = 0 . \tag{E}$$

我們再把 (10.b) 對 t 微分 n 次,就得到

$$\frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\rho w] .$$

當 $t = 0$ 時,利用假設 (A.a) 和初始條件,得到

$$\left(\frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}}\right)_{t=0} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^k \rho}{\partial t^k}\frac{\partial^{n-k} w}{\partial t^{n-k}}\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho \frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right]_{t=0} = \rho\left(\frac{\partial^{n+1} w}{\partial z\, \partial t^n}\right)_{t=0} .$$

再利用 (E) 式,則得

$$\left(\frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}}\right)_{t=0} = 0 , \tag{F}$$

所以式子 (A) 在 $k = n$ 時成立了以後，就可以得出 $k = n + 1$ 在時也成立. 我們現在來看當 $n = 2$ 時的情況. 從初始條件,我們有

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \qquad w = 0.$$

因此從方程 (10.b) 我們有

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 ;$$

從初始條件,我們有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 ;$$

從方程 (D)，我們有

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t}\right)_{t=0} = 0 .$$

再把 (10.b) 對 t 微分,使 $t = 0$，就得到

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right)_{t=0} = 0 .$$

因此我們的假設 (A) 在 $n = 2$ 時是對的,於是對所有整數也都是對的. ρ 在時間過程裏既然不變,而在初始時候又是均勻的,因此在整個時間過程裏

$$\rho = \rho_0 = \text{const} .$$

而 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 在初始時爲零,在時間過程裏又並不改變,所以

$$\frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0 ,$$

也就是 w 僅僅是時間的函數.

參 考 文 獻

[1] 羅姆他捷著,饒鴻雁譯，砂土和粘土的物理力學性的試驗法,第 40 頁 (1953).
[2] 范家驊，南京水利實驗處研究試驗報告彙編，1954 年專題研究部分第 166 頁.
[3] 周培源，中國物理學報，7(1947)，96—101.
[4] Г. И. Баренблатт, *ПММ*, 17(1953), 261—274.
[5] 蔡樹棠,泥沙在靜水中的沉澱運動，(I) 含砂濃度對沉速的影響,物理學報，12(1956)，402—408.
[6] J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, 2(1901); Б. В. Русанов, *ДАН*, 90(1953), 41—44.

SEDIMENTATION MOTION OF SAND PARTICLES IN STILL WATER (II)

THE EFFECT OF TIME FACTOR

Tsai Shu-tang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In dealing with practical engineering problems of sand particle sedimentation in water, Stokes' formula of resistance has been used usually to render the velocity of sedimentation of the particles. But Stokes' law of resistance is obtained for the sphere moving with uniform velocity in an infinite fluid. When a large number of sand particles falls simultaneouly under gravity with non-uniform velocity, Stokes' formula obviously can no longer represent the state of interaction between the sand and water in general. In the present paper we consider the sedimentation motion of sand particles of dilute concentration in still water, based upon the treatment of a mixture of two fluids according to Chou and Barenblatt. At first we consider the sand particle as a sphere moving uniformly in an infinite fluid and use the force of resistance upon the sphere as the interaction between sand and water. Then correction is introduced into this interaction term by considering the sand particles to be close to each other according to the result of another paper of the auther. Under the condition of slow relative motion of sand and water, the quadratic terms of velocities are neglected both in the calculation of the force of interaction and in the equations of motion.

The problem of sedimentation of sand particles under gravity in still water is solved under the foregoing approximation and based upon the general equations of motion established. A formula for the relative velocity between sand and water is obtained. Approximate expressions of this relative velocity are given at the beginning of motion when t is small and also for the motion after a long time when t is large. The limiting velocity of sand in water for large t agrees with that given by Stokes' law of resistance. Our present calculation shows, however, that the difference between the actual velocity of sand and this limiting velocity varies inversely as $t^{\frac{1}{2}}$. Hence the velocity of sand approaches this limit much more slowly than the usually assumed exponential function of time.