

摩擦綫與(軋軋)壓力分佈間之相互關係*

劉 叔 儀

(北京鋼鐵學院)

短 引 及 提 要

塑壓接觸面上的點滑向何方? 這問題與壓力分佈有相互關係。本文按最小阻力條件得到一“陡綫規律”^[1], 即摩擦綫(切綫與摩擦力重合之綫族)為壓力等高綫之正交族。並由軋軋壓力分佈實驗曲面作出例示綫族。摩擦綫與壓力分佈計算理論有密切關係, 本文討論暫限於單元軋軋理論, 但基於陡綫規律, 已發展出其他三個研究結果(文獻見“結論”一段)。

軋軋力學理論出源於卡氏簡化方程^[1], 原方程解答不真實有之圓滑連續性, 壓力數值往往過高。都了解這些問題與摩擦力性質有關。存在的具體意見是: 如假定摩擦為黏性^[2-4], 或假定摩擦係數隨壓力變化^[5], 可以從數量上解決這些問題。

本文離開這些假設, 證明由摩擦綫也可以解決這些問題, 指出這些問題的起因是卡氏方程中忽略了一個摩擦力分量, 因而由卡氏原方程算出的“摩擦係數”實非摩擦係數, 並將卡氏方程寫為平均值型, 從而得到乾摩擦時的兩個連續解例算。並由平均摩擦綫及實驗壓力值算出有效摩擦力分佈。認為如有不滑動區域, 其邊界為一壓力等高綫, 按實驗, 為一圈形曲綫。

一. 塑壓中摩擦力方向變化的規律

關於此問題, 早有齊別爾的摩擦綫族^[6], 來自變形測定, 不幸被認為“或可”(probable)而未獲重視; 其後有流行於教科書中的“最短法綫規律”(見[7]), 以為滑動方向為最小阻力方向, 但不幸認為最短法綫方向為最小阻力方向。直到 1954 年, 這一理論

* 1955 年 2 月 23 日收到。

1) 校閱時註: 陡綫分析的數學關係將在另文中給出, 在此指出, 僅須假定 τ 為壓力之函數即可得出陡綫規律, 不必依賴於庫倫定律:

$$\begin{aligned}\tau &= \psi(P) \\ \nabla \tau &= \left(\frac{d\psi}{dP} \right) \nabla P \\ \vec{\tau} \parallel \nabla \tau \parallel \nabla P &\dots\dots\dots \text{陡綫規律}\end{aligned}$$

動搖，有塔爾羅夫斯基^[8]的一些正確的定性意見。作者以為最小阻力條件可以接受，但不必假定最小阻力方向為最短法綫方向，最小阻力方向是可以由實驗壓力分佈曲面與簡單數學關係來肯定的。具體說，即“陡綫規律”：點上的最小滑動阻力方向為摩擦力分佈曲面之陡綫方向，按固體摩擦關係，亦為壓力分佈曲面之陡綫方向，故接觸面上之

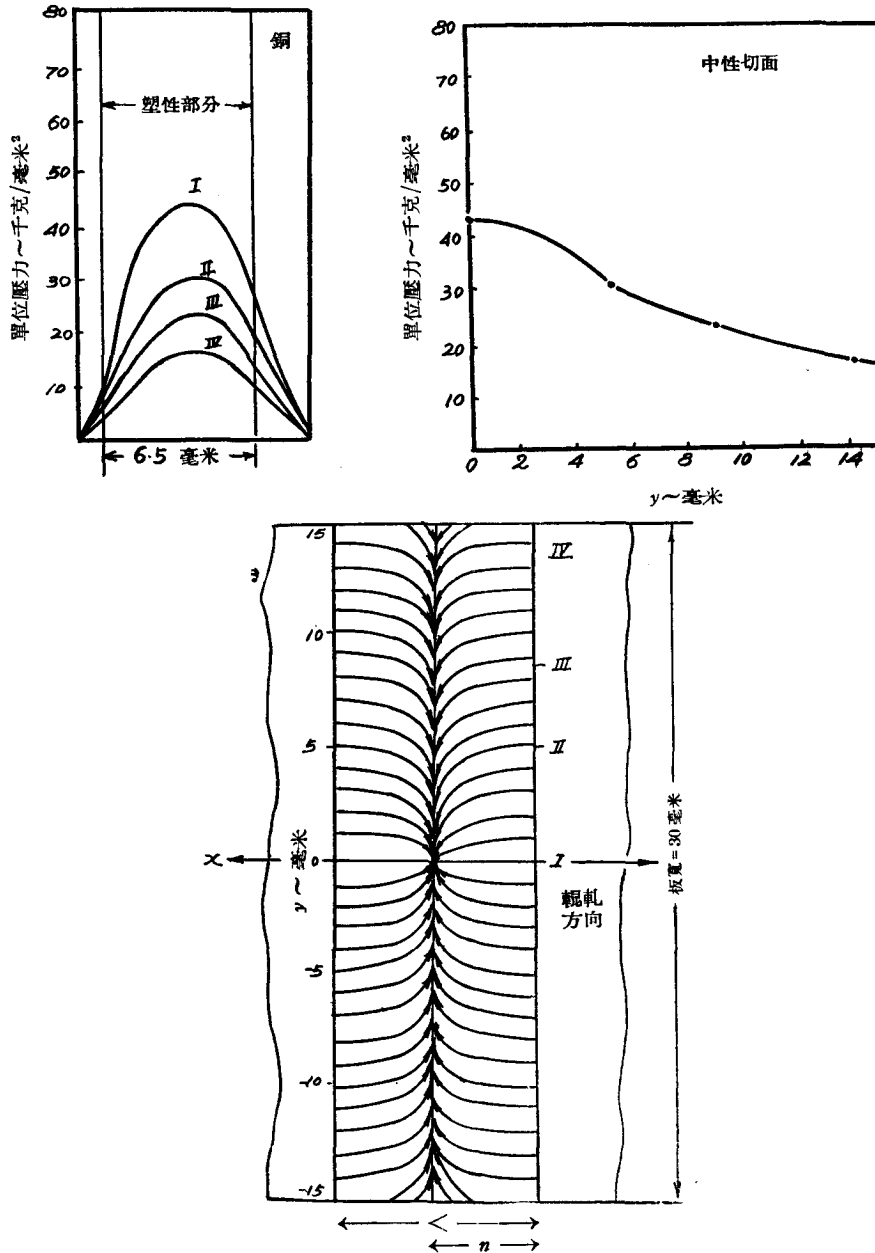


圖 1. 最小阻力摩擦綫(劉叔儀)

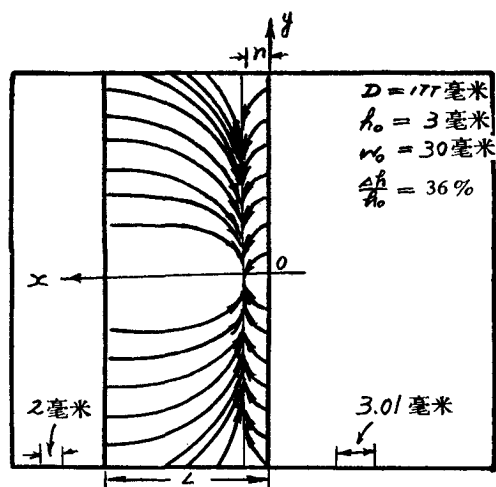
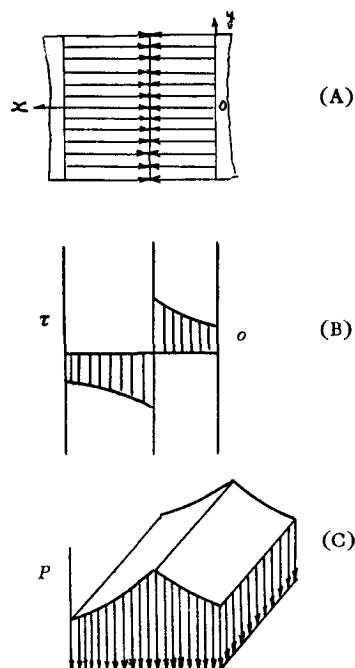
圖 2. 齊別爾由變形分析導出之摩擦綫^[9].

圖 3. 卡爾門方程之條件 (A), 摩擦力 (B) 及壓力 (C) 分佈。

摩擦綫族即壓力等高綫之正交族。這樣，由現有的壓力測定記錄可以求出摩擦綫族，例如圖 1 所示之軋軋情況，這是橫展近於零時之綫族，在作者另一文中^[9]，有高橫展時之綫族，方向變化較快。

最小阻力摩擦綫族與齊別爾的綫族性質類似（見圖 2）。這兩種綫族的重要性質是在進出口上與寬度直交，在中性切面上前後滑區域的綫族均與分界直綫相切（中心綫在外）。

二. 關於接觸弧上“摩擦係數”變化的理論及卡爾門方程

卡爾門方程之條件與後果略如圖 3 所示。此理論將表面問題簡化為單元問題，因而不能描寫實際摩擦力及壓力分佈情況。後來佈瑯^[10]據此簡化方程及中心綫上之連續實驗壓力分佈曲綫^[11]算出接觸弧上之摩擦力及“摩擦係數”分佈，如圖 4 所示。

在此理論中，摩擦力（ τ ）分佈性質正確，摩擦係數（ f ）分佈是錯的，在高壓力下 f 會是零的結論難於置信。此一錯誤根源是圖 3 中的簡化條件。將表面問題簡化為單元問題，不必如此高度簡化，考慮實際摩擦力方向仍然可以將問題簡化為單元問題，即

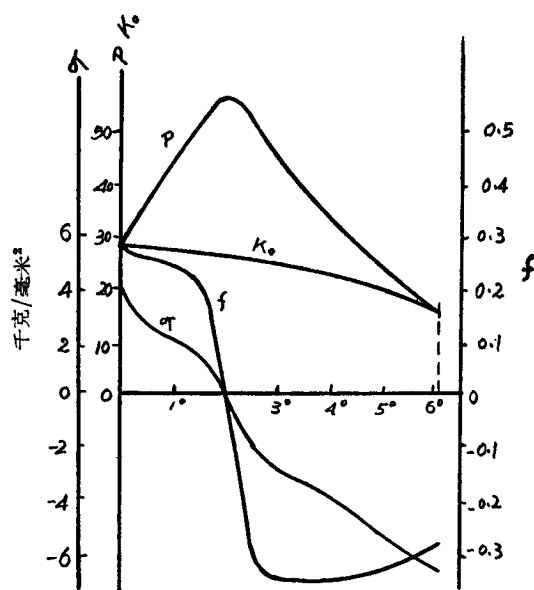


圖 4. 佈瑯的理論。

用一條平均摩擦綫。問題關鍵是， $\tau = fP$ 的關係只適用於合摩擦力，而在卡爾門方程中出現的摩擦力，實際上僅為 τ 之 x 分量（按方程來自 $\Sigma F_x = 0$ ）：

$$\tau_x = \tau \cos \varphi = (f \cos \varphi) P \quad (1)$$

其中 $\cos \varphi$ 為平均摩擦綫之方向餘弦。

卡氏條件在兩端之誤差不大，但在中部為大誤差，在中性切面上為以 0 代替 $\pi/2$ 的誤差，卡氏原方程不能得圓滑連續解並高估壓力，原因在此。佈瑯的 $\tau = fP$ 實係 $\tau_x = (f \cos \varphi) P$ ；“摩擦係數”實係 $f \cos \varphi$ ；隨壓力降低的並非 f ，而是 $f \cos \varphi$ ；在中切面為零的並非 f 而是 $\cos \varphi$ 。此處， $\tau = (f \cos \varphi) P = 0$ ，這是合理的。

實際上，可以不用卡氏方程，但按已知摩擦綫的大體性質假定一定平均摩擦綫，可以由實驗壓力曲綫算出 τ_x 及 $f \cos \varphi$ 分佈。

取後滑及前滑區域之平均摩擦綫各為通過進 (w_0) 出 (w_1) 口寬度 1/4，在中性切面 ($x=n$) 處相切觸之橢圓及拋物綫，則：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{後滑區域} & \cos \varphi = \sqrt{\frac{a^4 - a^2(L-x^2)^2}{a^4 + (b^2 - a^2)(L-x)^2}}, \\ \text{前滑區域} & \cos \varphi = \sqrt{\frac{4n(n-x)}{k^2 + 4n(n-x)}}; \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中：

$$a = L - n, \quad b = \frac{w_0}{4},$$

$$a = \frac{w_1}{4}, \quad L = \text{接觸長度}.$$

取一個高摩擦實驗情況 ($f=0.4^{[12]}$), 按 $\tau_x = f \cos \varphi P$, 得到圖 5 中之陰影曲綫. 彈性接觸與未接觸之分界條件為 $P = 0$, 因而彈性進出口上 $\tau = 0$. 假定 τ_x 分佈連續, 故曲綫有二極值, 原因是 P 與 $|\cos \varphi|$ 成反向變化. 圖中之帶點曲綫為佈瑯法

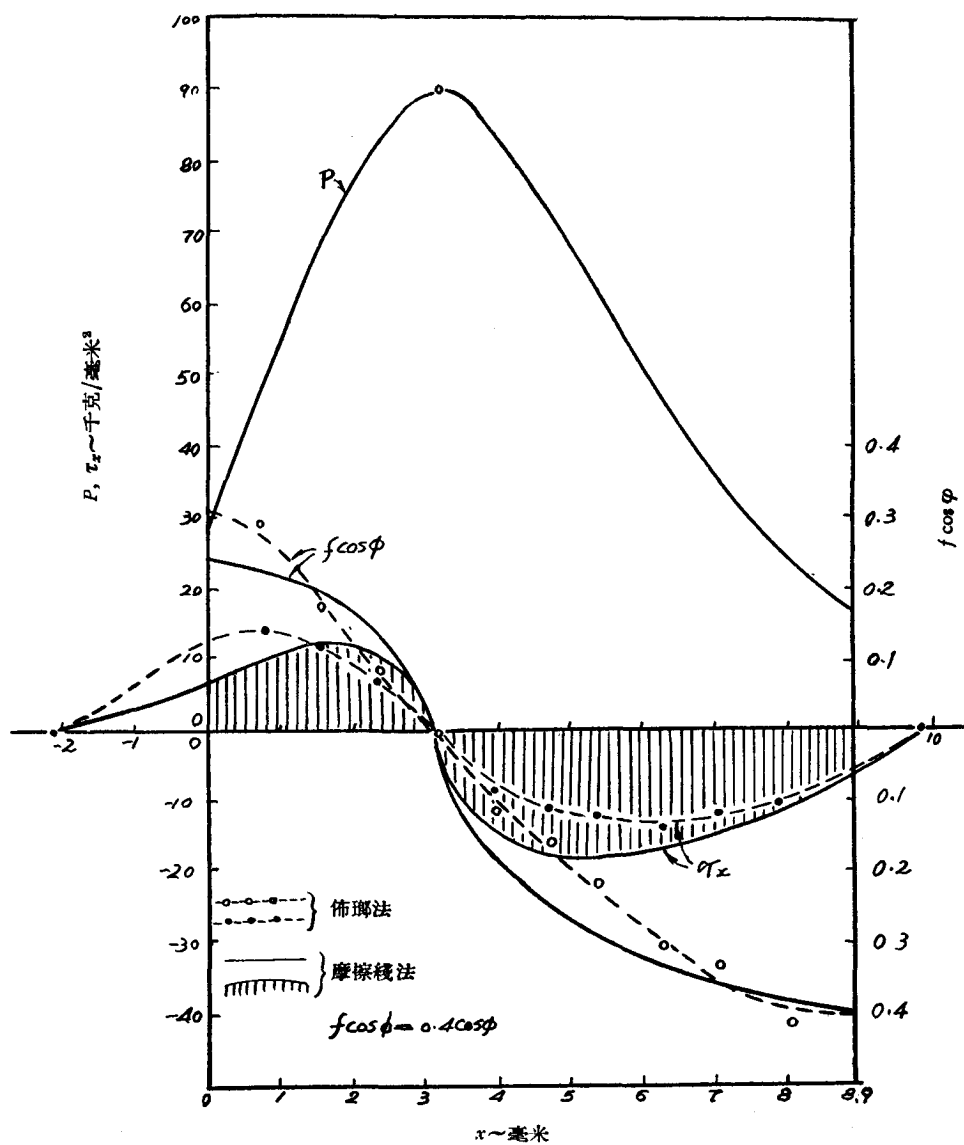


圖 5. 兩種理論出發點不同的 τ_x 及 $f \cos \varphi$ 曲綫 (鋁, 粗面軋).

在此情況下用拋物綫接觸弧所得的結果，性質略與摩擦綫法結果相同。圖中之兩 $f \cos \varphi$ 曲綫，帶點者來自佈瑯法，不帶點者來自摩擦綫法，兩者亦相差不大。

三. 摩擦綫與卡氏方程解答之性質

卡氏方程原可作：

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{P - \sigma_x}{y} \frac{dy}{dx} \mp \frac{\tau}{y} = 0 \quad (3)$$

其中 σ_x = 縱向應力， x = 縱向位置變數， $y = \frac{1}{2}$ (厚度)。

放棄圖 3 之簡化條件而代之以平均摩擦綫，則卡氏兩方程可作一個平均值型：

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{P - \sigma_x}{y} \frac{dy}{dx} + \cos \varphi \frac{\tau}{y} = 0. \quad (4)$$

在進口上， $\cos \varphi = -1$ ；

在中性切面， $\cos \varphi = 0$ ，因而壓力解答圓滑連續；

在出口上， $\cos \varphi = 1$ 。

故在乾摩擦情況下 (4) 式有連續解。全部解答理論將有另文提出，在此僅介紹兩例算。

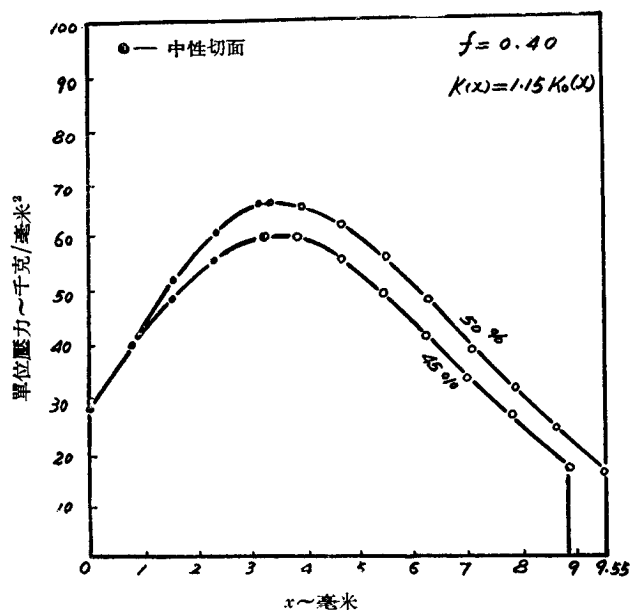


圖 6. 冷軋鋁板在不同壓縮量下之平均壓力分佈曲綫(圖點為計算點)。

$D = 180$ 毫米， $f = 0.4$ ， $h_0 = 2$ 毫米。

上部曲綫： $h_1 = 1$ 毫米， $L = 12.5$ 毫米， $L_1 = 9.55$ 毫米， $e_1 = 2$ 毫米；

下部曲綫： $h_1 = 1.10$ 毫米， $L = 12$ 毫米， $L_1 = 8.9$ 毫米， $e_1 = 2.15$ 毫米。

L = 全部接觸長度， L_1 = 塑性接觸長度， e_1 = 彈性接觸長度(出口)。

取拋物綫接觸弧，並取 $\cos \varphi$ 為 x 之兩綫性關係且滿足上列三定值，用圖積分¹⁾ 算出圖 6 條件之兩曲綫，內中壓縮為 45% 之一曲綫有表面壓力測定記錄^[11]，此曲綫最大值約為寬度上實驗值之代數平均（稍低，應為積分平均），中性切面位置亦近於實況。

另一個有關問題是，在高 f 值情況下，存在着平頂低壓力分佈實驗曲綫（如[13]），壓力變化僅稍高於 K_0 值。這類情況也是卡氏方程無能為力的，因為在高 f 值時，原式解答不論 K_0 值高低總為高峯分佈。但此情況在（4）式中是可以處理的，因為同一 f 值，由於橫展之不同而 $\cos \varphi$ 變化率不同，高 f 時之平頂壓力分佈發生於高橫展情況下，亦即 $\cos \varphi$ 變化率大的情況下。

四．關於不滑動區域

不滑動現象不一定要求金屬與軋面以牛頓關係黏着，由固體表面凸凹相阻的微觀摩擦機構同樣可以理解，高壓力下的滑動要求凸凹部分發生區域斷裂，但在三向高壓力下有斷裂不可能的情況^[14]，因而此時表面不可能有滑動發生。三向壓力的高低決定於壓力 P 與 f 值的高低，而一般認為不發生滑動的區域皆在壓力極大之附近。因此，可以認為當壓力達到一定臨界值 $P = P_c$ 時，由於無區域斷裂而不能滑動。這樣，不滑動區域為一壓力等高綫 $P = P_c$ 所決定，如圖 7 所示，在其外，摩擦綫規律仍然有效，其內表面切應力須另作處理，牛頓關係是處理法之一。

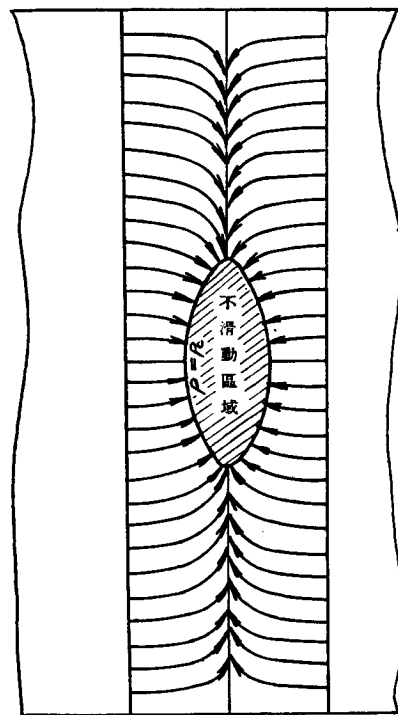


圖 7. 不滑動區域。

結 論

本文分析說明：

1. 最小阻力摩擦綫族為壓力等高綫之正交族，可由壓力分佈實驗決定之。
2. 佈瑯的“摩擦係數”實係 $f \cos \varphi$ ，而非 f 。隨壓力降低的並非 f ，而是 $f \cos \varphi$ 。
3. 單元軋軋理不必高度簡化為離實況太遠

1) 按圖 6 下之數據寫出有上列三定值之兩直綫關係作前後滑區域之 $\cos \varphi$ ，代入（4）式後方程雖為綫性，但不能積出，只能寫成定積分解，定積分中含有未定常數 n ，即中性切面位置。定 n 之方程中又有含 n 之定積分，此方程為兩區域在中性切面上之橫力差 $\Delta H(n) = 0$ 。須用圖積分求出 $\Delta H(n)$ 曲綫，其 n 軸交點決定中性切面。圖 6 中之每一曲綫，以四次圖積分決定出 n ，又一次圖積分算出壓力。

的卡爾門條件，考慮橫展仍可作出單元理論，因此本文所用卡氏方程之平均值形式((4)式)較近於事實，且已得到連續解，並能用以分析較多情況。

4. 不滑動區域的邊界，可按表面區域斷裂情況以一壓力值作劃分，為一壓力等高綫。

本文僅為一系列研究之發凡。以本文為出發點，已有三個研究結果[15—17]，在[17]中，按陡綫規律與實驗壓力曲面，算出 τ_x , τ_y 的二元分佈曲面。本文的陡綫規律微分方程為力學家們提供了一個解決壓力塑性邊界值問題的基本條件。可以期望這類問題在不久的將來會有其他新的重要發展。

參 考 文 獻

- [1] von Kármán, T., Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 5, p. 139, 1925.
- [2] Nadai, A., Jour. Appl. Mech. pp. A 54—62, ASME, 1939, 6.
- [3] Целиков, А. И., Прокатные станы, Москва, 1946.
- [4] 錢偉長、陳至遠, “壓延理論”, 物理學報, 9 (1953), 57.
- [5] 劉叔儀, “就摩擦係數與壓力之實驗關係計算壓力分佈” (1952), 鋼鐵學院學報, 1955
- [6] Siebel E. & Osenberg, E., Mitt. K. W. Inst. Eisenf. 16 (1934), 33.
- [7] Кубкин, С. И., Теория одраотки металов давлением, 1947, Москва.
- [8] Тарновский, И. Я., Формоизменение при пластической обработки металлов давлением, Металлургиздат, 1954, Москва.
———, Обработки металлов давлением (文獻集, 1954, 第 III 期) 中的第一篇文章: “К вопросу определению усилий при обработки металлов, давлением”.
- [9] 劉叔儀等, “絕性摩擦中的陡綫規律”, 鋼鐵學院學報, 1955.
- [10] Brown, G. M., 見 Underwood, Rolling of Metals, Vol. 1, 1950, London.
- [11] Leug, W. and Siebel, E., Mitteilungen aus dem Kaiser Wilhelm Instit für Eisenforschung, Düsseldorf. Vol. 15.
- [12] Orrowan, E., Proc. I. Mech. E. 150:4 (1943), 104—67.
- [13] Siebel, E. and Leug, W., 見 [10] 中參考書.
- [14] 劉叔儀, “On the realistic stress space of solids” Acta Scientia Sinica, 1954.
- [15] 劉叔儀等, “卡爾門方程在固體摩擦條件下之連續解”, 1955, 未發表.
- [16] 劉叔儀, “摩擦線理論與解答”, 1955, 未發表.
- [17] 王美英, “軋板摩擦力分布曲面”, 1955 (鋼鐵學院科學報告會, 1956, 2)

THE MUTUAL RELATION BETWEEN FRICTION-LINES AND PRESSURE DISTRIBUTION (IN ROLLING)

LIU SHU-I

(Peking Iron and Steel Institute of Technology)

Frequently, it was thought that frictional slip would occur in the direction of least resistance, which was unfortunately taken as the direction of the shortest normal to the free boundary. In this paper, the condition of least resistance is accepted, but the direction of resistance is properly determined without assumption. The result is "the rule of gradient", that is, at a given point on the contact surface, the direction of least resistance is the direction of the gradient of unit friction τ , which is related to the unit pressure P and the coefficient of friction, f , by $\tau = fP$, the gradient lines of τ and P coincide with each other. Consequently, the family of least resistance lines of friction is exactly the family of curves orthogonal to the pressure contours, and can be determined from the experimental surface distribution of pressure. One case of such friction-lines in rolling is presented, the curves bear remarkable resemblance to the under-evaluated "probable" lines of friction derived by siebel from deformation measurements.

The way to consider change in direction of τ in one-dimensional theory of rolling is to take an average friction line whose direction cosine, $\cos \varphi$, vanishes at the neutral section according to the gradient rule. By doing so, $f \cos \varphi$ corresponds to the "coefficient of friction" which vanishes at the neutral section according to Brown's theory.

The Karman's equation is written in the mean value form by taking $\tau_x = fP \cos \varphi$ instead of $\tau_x = fP$. The modified equation yields solutions smoothly continuous at the neutral section, and two such continuous solution to Karman's equation for the case of solid friction are presented, detailed investigation is left to another paper^[15].

By simple argument, it is thought that the boundary of no-slip region should be a crossed curve given by a pressure contour which is a roop according to experimental results.

The rule of gradient has already led to three consequences^[15-17], and is expected to be a very useful relation for plasticity under compression, because up to this paper the differential equation for slip direction remains unknown.