

# 矩形波導一個不連續性的等效電路\*

林 爲 幹

(華南工學院電訊工程學系)

## 一. 引 言

在矩形波導中,如截面尺寸改變,則其傳輸特性亦將發生變化。如何計及此種變化呢?我們可將此矩形波導用一等效傳輸綫代表,而截面改變所引起的效應則在傳輸綫中加以適當的串聯的四端網絡(包括理想變壓器)來表示出來。求得此網絡的方法中比較流行的有變分法<sup>[1]</sup>和諸場分量匹配法<sup>[2]</sup>,後一個方法比較簡單,易於了解和掌握,曾經被人用來解決過平行板波導的不連續性<sup>[3]</sup>和波導濾波器<sup>[4]</sup>等問題。本文目的是要用這一個方法來解決如下的一个重要問題:

一矩形波導,寬度為  $a$ , 在  $z = 0$  處(圖 1) 有一導電階形不連續: 當  $z < 0$  時波導高度為  $b$  而當  $z > 0$  時波導高度為  $d$ ; 矩形波導的尺寸僅可傳播  $TE_{01}$  主波, 傳播是沿正  $z$  方向。要求:

- (1) 建立此波導系統的等效傳輸綫;
- (2) 求出當  $z = 0$  兩邊的傳輸綫特性阻抗都標準化以後諸阻抗的標準化值和所需的變壓比;
- (3) 算出一個數字例子;
- (4) 給出一個比較簡單的近似表示式;
- (5) 將所得到的結果討論, 並說明當我們從平行板波導的結果推出矩形波導的結果時應該注意比例常數及綫性變換的正確取法。

## 二. 等 效 傳 輸 綫

試取如圖 1 所示的波導,我們將把此波導各部分中所能允許存在的電磁場分量都寫出來,然後將它們通過匹配來處理。

在  $B$  區內,在  $z = 0$  處

\* 1956 年 3 月 2 日收到。

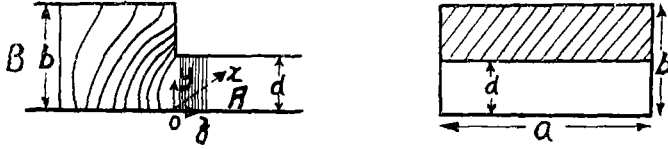


圖 1

$$H_{zB} = \begin{cases} H_{zA} & 0 < y < d, \\ 0 & d < y < b; \end{cases} \quad (1)$$

$$E_{yB} = \begin{cases} E_{yA} = f(y) & 0 < y < d, \\ 0 & d < y < b. \end{cases} \quad (2)$$

其中下標的第一個字母代表電磁場分量的取向，第二個字母則代表此場屬於那一個區的。這兩個條件是根據電磁場的切綫分量的連續性及完全導體表面磁場的法綫分量和電場的切綫分量不存在性寫出來的。由這兩個條件及圖 1 的電場分佈草圖可見在  $z = 0$  不連續面上，我們要有高階的 TE 波(磁波)和 TM 波(電波)，亦即是說，此不連續面激起 TE 和 TM 高階波。但沿  $x$  方向既無不連續性，故我們可取  $\sin \frac{\pi x}{a}$  及  $\cos \frac{\pi x}{a}$  作為對  $x$  的函數相依關係，一如  $TE_{10}$  主波的  $x$  相依關係一樣。 $f(y)$  是代表振幅的未知函數。

設此不連續面與其他連續面及兩端相距甚遠，則對一切受衰減的高階波來說都沒有反射現象存在，因為我們已經假設了只有  $TE_{10}$  波能夠傳播。所以，對這波導系統在  $A$  區內我們所需要的高階波是下列所有的 TE 波和 TM 波的疊加(只有  $e^{-\gamma_{mA}z}$  一項出現!):

TM 波,  $H_z \equiv 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} E_{zAm} &= A'_m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA}z}, \\ E_{xA_m} &= -\frac{A'_m}{k_{cmA}^2} \gamma_{mA} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA}z}, \\ E_{yAm} &= -\frac{A'_m}{k_{cmA}^2} \gamma_{mA} \frac{m\pi}{d} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA}z}, \\ H_{xA_m} &= -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma_{mA}} E_y = Y_{mA} E_{yAm}, \\ H_{yAm} &= \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_{mA}} E_x = -Y_{mA} E_{xA_m}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

TE 波,  $E_z \equiv 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} H_{xAm} &= A_m'' \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA} z}, \\ H_{xA m} &= \frac{A_m''}{k_{cmA}^2} \gamma_{mA} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA} z}, \\ H_{yAm} &= \frac{A_m''}{k_{cmA}^2} \gamma_{mA} \frac{m\pi}{d} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA} z}, \\ E_{xA m} &= \frac{A_m''}{k_{cmA}^2} j\omega\mu \frac{m\pi}{d} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA} z}, \\ E_{yAm} &= -\frac{A_m''}{k_{cmA}^2} j\omega\mu \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{d} e^{-\gamma_{mA} z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

對  $A$  區來說,

$$\begin{aligned} k_{cmA}^2 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 \\ \gamma_{mA}^2 &= k_{cmA}^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} Y_{mA} &= -j\omega\epsilon / \gamma_{mA} \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (b)$$

同樣地,在  $B$  區中,我們可以寫出我們所需要的高階波: 用  $b$  代替  $d$ ;  $-\gamma_{nB}$  代替  $\gamma_{mA}$ ;  $Y_{nB} = j\omega\mu / \gamma_{nB}$  代替  $Y_{mA}$ , 其中

$$\gamma_{nB}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

此處  $\mu$  及  $\epsilon$  代表波導中介質的導磁係數及介電常數,  $\omega$  和  $\lambda$  則分別代表角頻率及運行波長;  $A_m'$  及  $A_m''$  代表電磁場的振幅,它們間又存在有一定關係,這一個關係可由下面的事實求出。既然

$$E_x = 0, \quad d < y < b,$$

如果我們假設處處都有  $E_x \equiv 0$ , 則所有的邊界條件仍然滿足,故由 (3) 及 (4), 令電場的  $x$  方向分量之和等於零,即得到

$$\frac{A_m''}{A_m'} = \frac{\gamma_{mA}}{j\omega\mu} \frac{d}{ma}. \quad (c)$$

對於主波 ( $TE_{10}$ ), 我們取如下的形式以表示入射波及可能出現的反射波: (實際上在  $B$  區反射波存在,而在  $A$  區反射波可假設為不存在)。

$$\left. \begin{aligned} E_{yA0} &= (A_0' e^{-\gamma_0 z} + A_0'' e^{\gamma_0 z}) \sin \frac{\pi x}{a}, \\ H_{xA0} &= Y_{0A} (A_0' e^{-\gamma_0 z} - A_0'' e^{\gamma_0 z}) \sin \frac{\pi x}{a}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$\gamma_0 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

有了以上 (3), (4) 及 (5) 的電磁場諸分量以後, 我們即可在  $z = 0$  處進行電磁場諸分量的匹配。但先作如下的整理:

在  $z = 0$ , 對  $A$  區來說, 總電場分量的表示式是

$$E_{yA}|_{z=0} = A_0 \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\frac{A'_m}{k_{cm}^2} \gamma_{mA} \left( \frac{m\pi}{d} + \frac{A''_m}{A'_m} \frac{j\omega\mu}{\gamma_{mA}} \frac{\pi}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{d} \right\}.$$

將 (c) 式的關係代入, 即得

$$E_{yA}|_{z=0} = \left\{ A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{-A'_m}{k_{cm}^2} \gamma_{mA} \frac{m\pi}{d} \left( 1 + \frac{d^2}{m^2 a^2} \right) \right] \cos \frac{m\pi y}{d} \right\} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

其中  $A_0 = A'_0 + A''_0$ , 如令

$$A_m = -\frac{A'_m \gamma_m}{k_{cm}^2} \frac{m\pi}{d} \left( 1 + \frac{d^2}{m^2 a^2} \right),$$

最後得到

$$E_{yA}|_{z=0} = \left\{ A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi y}{d} \right\} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (6)$$

對總磁場來說, 如令  $Y'_{0A} A_0 = Y_{0A} (A'_0 - A''_0)$ ,

$$\begin{aligned} H_{xA}|_{z=0} &= \left[ Y'_{0A} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -Y_{mA} \frac{A'_m}{k_{cm}^2} \gamma_m \frac{m\pi}{d} + \frac{A''_m}{k_{cm}^2} \gamma_m \frac{\pi}{a} \right\} \cos \frac{m\pi y}{d} \right] \sin \frac{\pi x}{a} = \\ &= \left[ Y'_{0A} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mA} \left\{ -\frac{A'_m}{k_{cm}^2} \gamma_m \frac{m\pi}{d} \left( 1 + \frac{d^2}{m^2 a^2} \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1 - \frac{d^2}{m^2 a^2} \frac{\gamma_m}{j\omega\mu}}{1 + \frac{d^2}{m^2 a^2}} \right] \cos \frac{m\pi y}{d} \sin \frac{\pi x}{a}, \end{aligned}$$

代入 (b) 式的關係即得

$$H_{xA}|_{z=0} = \left[ Y'_{0A} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m Y_{mA} \frac{1 - \frac{d^2}{m^2 a^2} \frac{\gamma_{mA}^2}{k^2}}{1 + \frac{d^2}{m^2 a^2}} \cos \frac{m\pi y}{d} \right] \sin \frac{\pi x}{a}.$$

同樣地, 對於  $B$  區, 我們有

$$E_{yB}|_{z=0} = \left[ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (7)$$

$$H_{xB}|_{z=0} = \left[ Y'_{0B} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{nB} B_n \frac{1 - \frac{b^2}{n^2 a^2} \frac{\gamma_{nB}^2}{k^2}}{1 + \frac{b^2}{n^2 a^2}} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}.$$

如令

$$Y'_{mA} = \frac{1 - \frac{d^2}{m^2 a^2} \frac{\gamma_{mA}^2}{k^2}}{1 + \frac{d^2}{m^2 a^2}} Y_{mA} \quad (d)$$

和

$$Y'_{nB} = \frac{1 - \frac{b^2}{n^2 a^2} \frac{\gamma_{nB}^2}{k^2}}{1 + \frac{b^2}{n^2 a^2}} Y_{nB}, \quad (e)$$

則最後,我們得到  $z=0$  處  $A$  區和  $B$  區的電磁場的切綫分量: 對  $A$  區, (6) 式和下式:

$$H_{xA}|_{z=0} = \left[ A_0 Y'_{0A} + \sum_{m=1}^{\infty} Y'_{mA} A_m \cos \frac{m\pi y}{d} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \quad (8)$$

對  $B$  區, (7) 式和下式:

$$H_{xB}|_{z=0} = \left[ B_0 Y'_{0B} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y'_{nB} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \quad (9)$$

由一開始就給定的邊界條件 (2), 我們可以找出  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_m$  和  $B_n$  間的關係, 即我們現在開始進行諸電磁場分量的匹配. 由 (2) 及 (7), 我們有

$$B_0 = \frac{1}{b} \int_0^b f(y) dy = \frac{1}{b} \int_0^d f(y) dy = \frac{d}{b} A_0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy = \\ &= \frac{2A_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi d}{b} + \frac{2nd^2}{\pi b^2} \sin \frac{n\pi d}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m A_m}{m^2 \left\{ \frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}}. \end{aligned} \quad (11)$$

再在  $z=0$  處,  $H_{xA} = H_{xB}$ , 故由 (7) 及 (9), 我們得到:  $0 < y < d$ ,

$$A_0 Y'_{0A} + \sum_{m=1}^{\infty} Y'_{mA} A_m \cos \frac{m\pi y}{d} = B_0 Y'_{0B} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y'_{nB} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (f)$$

如取此方程 (f) 兩邊的平均值, 即得到:

$$Y'_{0A} A_0 = Y'_{0B} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi d} Y'_{nB} B_n \sin \frac{n\pi d}{b}. \quad (12)$$

如再對 (f) 兩邊乘以  $\cos \frac{m\pi y}{d}$  然後取 0 至  $d$  的積分, 即得到

$$Y'_{mA} A_m = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} Y'_{nB} B_n \frac{nd^2}{m^2\pi b} \frac{(-1)^m \sin \frac{n\pi d}{b}}{\frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1}. \quad (13)$$

以上我們建立了所有電磁場分量的振幅間的關係, 以下我們討論一下如何建立我們的等效傳輸綫.

由 (10),  $dA_0 = bB_0$ , 故我們定義主波的電壓如下:

$$V_{A0} = \int_0^d (E_y)_{\max} dy = A_0 d.$$

又由功率的表示式:

$$P = \frac{1}{2} VI = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^d Z_{10} H_{x0}^2 dx dy = \frac{ad}{4} Y_{A0} A_0^2,$$

其中我們取

$$E_y = A_0 \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_x = \frac{A_0}{Z_{10}} \sin \frac{\pi x}{a},$$

可見我們可以取

$$I_{A0} = \frac{a}{2} Y_{A0} A_0 = \frac{a}{2} (H_x)_{\max}$$

作為我們的電流; 同樣地, 如對  $B$  區我們取

$$V_{B0} = B_0 d,$$

則最後我們得到電壓, 電流的表示式如下: (以  $Y'_{A0}$  及  $Y'_{B0}$  代替  $Y_{A0}$  及  $Y_{B0}$  以計及反射現象):

$$\left. \begin{aligned} I_{A0} &= \frac{a}{2} (H_{xA0})_{\max} = \frac{a}{2} Y'_{A0} A_0, \\ I_{B0} &= \frac{a}{2} (H_{xB0})_{\max} = \frac{a}{2} Y'_{B0} B_0, \\ V_{A0} &= A_0 d, \quad V_{B0} = B_0 d: \quad V_{A0} = V_{B0}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由 (14) 式我們又可定義  $A$  區和  $B$  區的等效特性阻抗如下:

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= \frac{V_{B0}}{I_{B0}} = \frac{2b}{a} / Y_{A0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{2b}{a} \frac{\lambda_g}{\lambda}, \\ Z_{02} &= \frac{V_{A0}}{I_{A0}} = \frac{2d}{a} / Y_{B0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{2d}{a} \frac{\lambda_g}{\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中  $\lambda_g$  稱為波導波長:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \quad \lambda_c = 2a.$$

由 (14) 式  $V_{A0} = V_{B0}$  可見，在不連續面上兩邊的電壓是連續的，而兩邊的電流則是不連續的，所以我們的波導系統可以圖 2 的等效傳輸綫代表，其中導納  $Y$  代表電流不連續的效應。我們下一步的工作是去定出這個  $Y$  的值。

由圖 2 可見，

$$I_{A0} - I_{B0} = Y V_{A0},$$

亦即

$$Y = \frac{I_{A0} - I_{B0}}{V_{A0}} = \frac{a}{2d A_0} (Y'_{A0} A_0 - Y'_{B0} B_0).$$

利用 (12) 式的關係， $Y$  可以寫成如下的形式：

$$Y = \frac{a}{2d} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi d A_0} Y'_{nb} B_n \sin \frac{n\pi d}{b} \right];$$

以 (11) 式的  $B_n$  的值代入，即得到

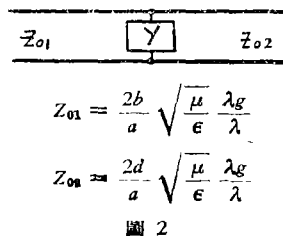
$$Y = \frac{a}{2d} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi d} Y'_{nb} \frac{2}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi d}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n\pi d} Y'_{nb} \sin^2 \frac{n\pi d}{b} \frac{2nd^2}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{A_m}{A_0} (-1)^m}{m^2 \left\{ \frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}} \right].$$

這裏的  $Y$  如果真正代表一個實際電路元件，則它必須與這個傳輸系統兩端的情況和電壓電流的改變情況無關。從這個式子中我們可見到第一個和式已經是與兩端的情況及電壓無關，現在把它記作  $Y'$ ，

$$Y' = \frac{a}{2d} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b}{(n\pi)^2 d} \frac{j\omega\epsilon}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}} \left\{ \frac{1 - \frac{b^2 \gamma_{nb}^2}{n^2 a^2 k^2}}{1 + \frac{b^2}{n^2 a^2}} \right\} \sin^2 \frac{n\pi d}{b} \right].$$

代入 (a)，(d) 和 (e) 諸式的關係，即得到

$$Y' = a \frac{j\omega\epsilon}{\pi^3} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi d}{b}}{\frac{d^2}{b^2} n^3 \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}} \left\{ \frac{1 - \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{1 + \frac{a^2 k^2}{\pi^2}} \right\} \right] =$$



$$= j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi d}{b}}{n^3 \left(\frac{d}{b}\right)^2 K'_{Bn}},$$

其中

$$K'_{Bn} = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}{\left(\frac{n \pi}{b}\right)^2}} \div \left[ \frac{1 - \frac{\frac{a^2 k^2}{\pi^2}}{1 + \frac{b^2}{n^2 a^2}}}{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}{\left(\frac{n \pi}{b}\right)^2}} \right]$$

或

$$K'_{Bn} = \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{n \lambda_g}\right)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \right\}^{-1} = \frac{\lambda_g^2}{\lambda^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{n \lambda_g}\right)^2}.$$

當  $n \rightarrow \infty$  時,

$$K'_{Bn} \rightarrow \lambda_g^2 / \lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad q = (\lambda / \lambda_g)^2.$$

最後我們得到

$$Y' = j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} T'_{0B}(d/b); \quad (16)$$

其中

$$T'_{0B}(\alpha) = q S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K'_{nB}} - q \right) \frac{\sin^2 n \pi \alpha}{n^3 \alpha^2} \rightarrow q S_0(\alpha).$$

這裏的  $S_0(\alpha)$  是一個已經列表<sup>[3]</sup>的收斂級數, 其中, 當  $n \rightarrow \infty$  時,  $K'_{nB} \rightarrow 1/q$ , 而在大多數情形中  $K'_{nB}$  非常迅速地趨於  $1/q$ ,  $1/q = \lambda_g^2 / \lambda^2$ .

如以  $Y''$  記  $Y$  表示式中的第二個和號, 則  $Y''$  具有如下的形式:

$$\begin{aligned} Y'' &= j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \pi}{n} \frac{d}{b} \frac{1 - \frac{b^2 \gamma_{Bn}^2}{n^2 a^2 b^2}}{1 + \frac{b^2}{n^2 a^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}{\left(\frac{n \pi}{b}\right)^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{A_m}{A_0}}{m^2 \left\{ \frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}} \right] = \\ &= j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \pi}{K'_{Bn} n} \frac{d}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{A_m}{A_0}}{m^2 \left\{ \frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}} \right]. \end{aligned}$$



如令

$$T'_{Bm}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{K'_{nB} n \left\{ \frac{n^2}{m^2} \alpha^2 - 1 \right\}} =$$

$$= q S_m(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K'_{nB}} - q \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \{ n^2 \alpha^2 / m^2 - 1 \}},$$

其中  $S_m(\alpha)$  也是已列表的級數<sup>[3]</sup>；當  $n \rightarrow \infty$  時  $K'_{nB} \rightarrow 1/q$ ，故當  $n \rightarrow \infty$  時  $T'_{Bm}(\alpha) \rightarrow q S_m(\alpha)$ ，最後我們可以寫成

$$Y'' = j\omega \frac{a\epsilon}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m C_m}{m^2} T'_{mB} \left( \frac{d}{b} \right); \quad (17)$$

其中

$$C_m = A_m/A_0.$$

爲了要使  $C_m = A_m/A_0$  不在 (17) 中出現，即爲了要使  $Y''$  與電壓無關，試從 (13) 式中任取一第  $P$  項來研究一下：

$$Y'_{Ap} A_p = \frac{2d(-1)^p}{p^2 \pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n Y'_{Bn} B_n}{\frac{n^2 a^2}{p^2 b^2} - 1} \sin \frac{n\pi d}{b}.$$

將 (10) 式中的  $B_n$  值代入上式中，得

$$Y'_{Ap} A_p = \frac{2(-1)^p d}{p^2 \pi^3} j\omega \epsilon A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi d}{b}}{n K'_{nB} \left\{ \frac{n^2 a^2}{p^2 b^2} - 1 \right\}} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{d^2 n^2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{A_m}{A_0}}{m^2 \left\{ \frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}} \right]. \quad (18)$$

在上式中，第一項就是  $T_{Bp}(d/b)$ 。對第二項，我們變更求和的次序：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{A_m}{A_0}}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (d^2/b^2) \sin^2 \frac{n\pi d}{b}}{n K'_{nB} \left\{ \frac{n^2 d^2}{p^2 b^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{n^2 d^2}{m^2 b^2} - 1 \right\}}. \quad (19)$$

如對 (19) 式進行部分分數分解，則 (19) 式即轉變爲下式，但應注意到當  $p = m$  時分解式不成立，故要回到 (19) 式令  $p = m$  以取得下式的最後一項，

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{\infty} \frac{(-1)^m p^2 \frac{A_m}{A_0}}{p^2 - m^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n K'_{nB} \left( \frac{n^2 a^2}{p^2 b^2} - 1 \right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n K'_{nB} \left( \frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} - 1 \right)} \right] +$$

$$+ \frac{(-1)^p A_p}{A_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left(\frac{d}{b}\right)^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 K'_{nB} \left\{ \frac{n^2 a^2}{p^2 b^2} - 1 \right\}^2},$$

令

$$\begin{aligned} V'_{pB}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 K'_{nB} \left\{ \frac{n^2 a^2}{p^2 b^2} - 1 \right\}^2} = \\ &= q U_p(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k'_{nB}} - q \right) \frac{n\alpha^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 \left( \frac{n^2 a^2}{p^2} - 1 \right)} \end{aligned}$$

其中  $U_p(\alpha)$  也是列表的級數<sup>[3]</sup>,

$$U_p(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\alpha^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 \left( \frac{n^2 a^2}{p^2} - 1 \right)} \cong 0.97 \frac{b\pi^2}{4}.$$

現在,我們可以把 (18) 寫成如下的形式:

$$\begin{aligned} (-1)^{p+1} \left[ \frac{\pi^2}{4p K'_{pA}} + \frac{V_{pB}(\alpha)}{p^2} \right] \frac{A_p}{A_0} &= \frac{1}{p^2} T'_{pB}(\alpha) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \frac{A_m}{A_0}}{p^2 - m^2} [T'_{pB}(\alpha) - T'_{mB}(\alpha)]. \end{aligned}$$

對於每一個  $p$ , 我們有這樣的一個方程, 而  $p$  又在無窮個  $m$  中取值, 因此我們就有了一個無窮多個方程的聯立方程系。如以矩陣形式表示這個方程系, 則我們有

$$[g_{pm}] \left[ \frac{A_m}{A_0} \right] = [h_p];$$

其中

$$\begin{aligned} g_{pm} &= (-1)^m \frac{T'_{pB}(\alpha) - T'_{mB}(\alpha)}{p^2 - m^2}, \\ g_{pp} &= (-1)^p \left[ \frac{V'_{pB}(\alpha)}{p^2} + \frac{\pi^2}{4p K'_{pA}} \right], \\ h_p &= -\frac{1}{p^2} T'_{pB}(\alpha). \end{aligned}$$

從形式上來看,  $A_m/A_0$  的值可以由 (19) 式解出, 即以  $d/b$  及  $\lambda/\lambda_g$  的值表出, 而與電壓值無關。因此我們建立圖 2 的等效傳輸綫電路。實際我們自然只須保留 (19) 中若干方程從而解出有限的若干個  $A_m/A_0$  值。

最後的結果是

$$Y = j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} \left[ T'_{0B}(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m C_m}{m^2} T'_{mB}(\alpha) \right];$$

其中

$$\alpha = d/b, \quad C_m = A_m/A_0,$$

$$\begin{aligned} T'_{0B}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{K'_{nB} n^3 \alpha^2} = \\ &= q \left[ S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{q K'_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^3 \alpha^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_{mB}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{K'_{mB} n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)} = \\ &= q \left[ S_m(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{q K'_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)} \right], \end{aligned}$$

$$K'_{nB} = \frac{\left( 1 + \frac{b^2}{n^2 a^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1 - \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2}{n^2 (a/b)^2}}}{\left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{b^2}{n^2 a^2} \right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1 - \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2}{n^2 (a/b)^2}}}{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2} = \frac{\lambda_g^2}{\lambda^2} \sqrt{1 - \left( \frac{2b}{n\lambda_g} \right)^2}.$$

如令

$$K_{nB} = q K'_{nB} = \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} K'_{nB} = \sqrt{1 - \left( \frac{2b}{n\lambda_g} \right)^2} / n^2, \quad (20)$$

則可見當  $n \rightarrow \infty$ ,  $K_{nB}$  迅速地趨於 1. 故最後結果又可寫成

$$Y = j \omega \frac{a \epsilon}{\pi^3} \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m C_m}{m^2} T_{mB}(\alpha) \right]; \quad (21)$$

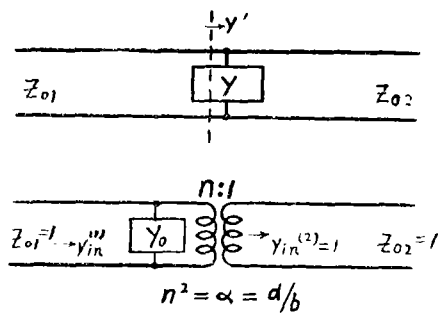
其中

$$\begin{aligned} T_{0B}(\alpha) &= S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^3 \alpha^2}, \quad S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^2 \alpha^2}, \\ T_{mB}(\alpha) &= S_m(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)}, \quad S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

### 三. 標準化等效傳輸綫

如圖 3 所示, 如果我們把等效傳輸綫標準化, 即把圖(3)上, 圖化為下圖的傳輸綫, 則我們需要求出變壓比  $n$  和  $Y$  的標準化值  $Y_0$ .

試取第一個波導，顯然，在第一個波導離開不連續面  $l_1$  處我們有如下的標準化輸入導納  $y_{in}^{(1)}$ ：



$$y_{in}^{(1)} = \frac{Y_{in}}{Y_{01}} = \frac{\frac{Y'}{Y_{01}} + j \tan \beta l_1}{1 + j \frac{Y'}{Y_{01}} \tan \beta l_1} = \frac{\frac{Y + Y_{02}}{Y_{01}} + j \tan \beta l_1}{1 + j \frac{Y + Y_{02}}{Y_{01}} \tan \beta l_1} = \frac{\left[ Y/Y_{01} + 1 / \left( \sqrt{\frac{Y_{01}}{Y_{02}}} \right)^2 \right] + j \tan \beta l_1}{1 + j \left[ Y/Y_{01} + 1 / \left( \sqrt{\frac{Y_{01}}{Y_{02}}} \right)^2 \right] \tan \beta l_1} = \frac{(Y_0 + 1/n^2) + j \tan \beta l_1}{1 + j (Y_0 + 1/n^2) \tan \beta l_1};$$

圖 3

其中  $Y_{in}^{(1)}$  是輸入導納，而  $Y_{01}$  及  $Y_{02}$  則分別是 (15) 式中  $Z_{01}$  及  $Z_{02}$  的倒數。由此式我們可使

$$n = \sqrt{Y_{01}/Y_{02}} = \sqrt{d/b},$$

或

$$n^2 = \alpha = d/b,$$

和標準化導納

$$Y_0 = Y/Y_{01} = Z_{01} Y,$$

$$\text{或 } Y_0 = j \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{2a}{\pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\lambda}{\lambda_g^2} \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} C_m T_{mB}(\alpha) \right],$$

$$\text{或 } B_0 = \frac{Y_0}{j} = \frac{4b}{\lambda_g} \frac{1}{\pi^2} \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} C_m T_{mB}(\alpha) \right]; \quad (22)$$

其中  $C_m$  可由下面的方程系解出：

$$\left. \begin{aligned} [g_{pm}] [C_m] &= [h_p], \\ g_{mp} &= (-1)^m \frac{T_{pB}(\alpha) - T_{mB}(\alpha)}{p^2 - m^2}, \\ g_{pp} &= (-1)^m \left[ \frac{V_{pB}(\alpha)}{p^2} + \frac{\pi^2}{4p K_{pA}} \right], \\ h_p &= -\frac{1}{p^2} T_{pB}(\alpha); \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_{pB}(\alpha) &= U_p(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{Bn}} - 1 \right) \frac{n\alpha^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 \left( \frac{n^2 \alpha^2}{p^2} - 1 \right)^2}, \\
 U_p(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^2 \sin^2 n\pi\alpha}{p^2 \left( \frac{n^2 \alpha^2}{p^2} - 1 \right)^2} \cong 0.97 p\pi^2/4, \\
 T_{0B}(\alpha) &= S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{Bn}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^3 \alpha^2}; \quad S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n^3 \alpha^2}, \\
 T_{mB}(\alpha) &= S_m(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)}; \quad S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\alpha}{n \left( \frac{n^2 \alpha^2}{m^2} - 1 \right)}.
 \end{aligned} \tag{c}$$

#### 四. 舉 例

設已知

$$a = 0.9'', \quad b = 0.4'', \quad d = 0.2'', \quad \lambda = 3.2 \text{ cm} = 1.26'', \quad \alpha = d/b = 0.5.$$

故

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} = \frac{1.26}{\sqrt{1 - 0.49}} = 1.77'' = 4.5 \text{ cm}.$$

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{4b}{\lambda_g} \cdot \frac{1}{\pi^2} \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2} C_m T_{mB}(\alpha) \right] = \\
 &= 0.0915 \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2} C_m T_{mB}(\alpha) \right],
 \end{aligned}$$

由 (20),

$$\begin{aligned}
 K_{nB} &= \sqrt{1 + \frac{1 - \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2}{n^2 \left( \frac{a}{b} \right)^2}} = \\
 &= \sqrt{1 - \left( \frac{2b}{\lambda_g} \right)^2} / n^2 = \sqrt{1 - \frac{0.206}{n^2}}.
 \end{aligned}$$

同樣地,

$$K_{mA} = \sqrt{1 - (2d/\lambda_g)^2} / m^2 = \sqrt{1 - 0.0515/m^2}.$$

故

$$\begin{aligned}
 K_{1B} &= 0.8911, & K_{3B} &= 0.9884, & K_{5B} &= 0.996, \\
 K_{1A} &= 0.9742, & K_{2A} &= 0.993, & K_{3A} &= 1.00.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{0B}(\alpha) &= S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{K_{nB}} - 1 \right) \frac{\sin^2 n\pi/2}{n^2/4} = \\
 &= 4.207 + (-12)(4) + (0.01) \frac{4}{9} = 4.732
 \end{aligned}$$

由 (c) 我們可以計算諸  $T_{mB}$  及  $V_{pB}$  :

$T_{1B}$	$T_{2B}$	$T_{3B}$	$T_{4B}$
-1.163	-1.444	-1.638	-1.796

例如,

$$T_{1B} = -1.0 + (0.12) \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)} + (0.01) \frac{1}{3\left(\frac{9}{4} - 1\right)} =$$

$$= -1.0 - 0.160 - 0.00266 = -1.163.$$

$V_{1B}$	$V_{2B}$	$V_{3B}$	$V_{4B}$
2.286	4.699	7.12	9.54

例如

$$V_{1B} = 2.23 + 0.12 \frac{1}{4\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} + (0.01) \frac{3}{4\left(\frac{9}{4} - 1\right)^2} = 2.286.$$

而,  $V_{3B} \cong U_3$ ,  $V_{4B} \cong U_4$ .

由 (d) 式, 我們用以解出  $C_m$  的方程系是如下:

$$\begin{vmatrix} -4.816 & -0.094 & 0.0594 & -0.0422 \\ 0.094 & 2.417 & 0.0388 & -0.0294 \\ 0.0594 & -0.0388 & -1.712 & -0.0226 \\ 0.0422 & -0.0294 & 0.0226 & 1.213 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.163 \\ 0.361 \\ 0.182 \\ 0.1122 \end{vmatrix}$$

第一次近似解:  $C_1 = \frac{1.163}{-4.816} = -0.242,$

$$C_2 = \frac{0.361 + 0.0227}{2.417} = 0.159,$$

$$C_3 = \frac{0.182 + 0.0062 + 0.0143}{-1.712} = -0.118,$$

$$C_4 = \frac{0.1122 + 0.0102 + 0.0047 + 0.0023}{1.213} = 0.105.$$

第二次近似解:  $C_1 = \frac{1.163 + 0.094 \times 0.159 + 0.0594 \times 0.118 + 0.0422 \times 0.105}{-4.816} = -0.247,$

$$C_2 = \frac{0.361 + 0.094 \times 0.247 + 0.0388 \times 0.118 - 0.0294 \times 0.105}{2.417} = 0.164,$$

$$C_3 = -0.120,$$

$$C_4 = 0.107.$$

$m$	1	2	3	4
$C_m = \frac{A_m}{A_0}$	-0.247	0.164	-0.120	0.107
$T_{mB}$	-1.163	-1.444	-1.638	-1.796

如取此第二次近似解作為答案,則得到

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0.0915 (4.732 - 0.288 - 1/4 \times 0.237 - 1/9 \times 0.197 - 1/16 \times 0.192) \\ &= 0.3982 \end{aligned}$$

## II. 較簡單的近似法

以下我們提出一個比較簡單的計算  $B_0$  的方法.

試從我們得到的結果,核對一下普通手冊上用施瓦茨變換得來的結果的準確度.

下面是這個結果<sup>[5]</sup>(不加高頻更正項):

$$B'_0 = \frac{4b}{\lambda_g} \left[ \ln \frac{1-\alpha^2}{4\alpha} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^{1/2(\alpha+1/\alpha)} \right]. \quad (23)$$

代入我們的例子的數值,

$$B'_0 = 0.356.$$

可見這個靜電近似方法所得到的答案具有如下的誤差

$$\% \text{ 誤差} = \frac{3982-3560}{3982} = 10.6\%.$$

如果我們忽略了所有的  $A_m$  值,  $m \geq 1$ , 則

$$B''_0 = 0.0915 \times 4.732 = 0.433.$$

而誤差則是

$$\frac{B_0 - B''_0}{B_0} \times 100 = \frac{398 - 433}{398} \times 100 = -8.8\%.$$

這個結果仍然比靜電近似所得到的結果好,這一點又提供我們一個近似方法: 我們可以把第二個較小的波導中的高階波忽略,即是說我們可以設

$$f(y) = \begin{cases} A_0 & 0 < y < d, \\ 0 & d < y < b. \end{cases}$$

因而 (22) 式取如下的大大簡化了的形式 ( $C_m \equiv 0$ ):

$$B_0 = \frac{4b}{\lambda_g} \frac{1}{\pi^2} T_{0B}(\alpha). \quad (24)$$

這樣的一個忽略了較小波導中的高階波的方法早已有人用過<sup>[6]</sup>，但是沒有提出令人信服的理論根據，而只是從直觀物理現象出發提出這樣的一個假定。在這裏，我們可以看到我們如何從嚴格的結果得出這樣一個近似，而其準確度也可以估計！如取 (23) 及 (24) 的平均值作為最後的答案，則可以保持較高的準確度，因為 (23) 往往給出正值的誤差而 (24) 式則給出負值的誤差。這樣做法，計算手續也很簡單。

當  $\alpha \ll 1$ ,  $T_{0B}(\alpha) \cong S_0(\alpha)$ ；但我們又已知<sup>[3]</sup>，當  $\alpha \rightarrow 0$  時，

$$S_0(\alpha) \cong \pi^2 \left[ \ln \frac{1}{\alpha} - 0.388 \right].$$

如果此處我們還有  $K_{nb} = K_{mA} \cong 1$ （例如當我們在較小的波導中， $(d/\lambda_g)^2 \ll 1$ ，我們即得到這個情形），則 (24) 變為更為簡單：

$$B_0 = \frac{4b}{\lambda_g} \left[ \ln \frac{1}{\alpha} - 0.338 \right] = \frac{4b}{\lambda_g} \ln \frac{eb}{4d}; \quad \alpha = d/b.$$

其中  $e = 2.73$  是自然對數的基。這一個結果亦可由 (23) 式取  $\alpha \rightarrow 0$  時的極限得到，如注意到

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\alpha+1/\alpha}{2}} = e,$$

即又得到

$$B'_0 \cong \frac{4b}{\lambda_g} \ln \frac{1}{4\alpha} e = \frac{4b}{\lambda_g} \ln \frac{eb}{4d}.$$

## 六. 結果的討論

從 (21) 的結果可見在我們討論的矩形波導中，代表不連續效應的  $Y$ ，可以從相當的平行板波導每單位寬度的結果<sup>[3]</sup> 乘以  $a/2$ （寬度之半），再乘以  $(\lambda/\lambda_g)^2$  一因子得到。構成這樣的一個事實的理由可以解釋如下：第一，從 (14) 式，我們取  $a/2$  及磁場強度之積作為電流，故從平行板導波器的單位寬度導納以求寬度為  $a$  的矩形波導中的相當的量時，我們用  $a/2$  而不是用  $a$  去乘這單位寬度的值。第二，在前面第二節的分析中我們取  $\sin \pi x/a$  或  $\cos \pi x/a$  作為  $x$  方面的變化，並得出正確的結果，因而在下面的波動方程中，

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \varphi = 0.$$

對矩形波導，如計及  $\partial^2/\partial x^2 = -(\pi/a)^2$ ，上式即變為

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \varphi = 0.$$



但  $\lambda_c = 2a$ ,  $1/\lambda_c^2 + 1/\lambda_g^2 = 1/\lambda^2$ , 故上式可寫成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 \varphi = 0. \quad (25)$$

但在平行板波導中,可設一切電磁現象沿  $x$  方向無變化,故波動方程變為

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varphi = 0. \quad (26)$$

如果我們比較 (25) 式及 (26) 式,即可以看到它們不同的地方只是一個有自由空間波長  $\lambda$  出現而另一個有波導波長  $\lambda_g$  出現. 試將 (25) 式寫成如下的形式:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} y\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} z\right)^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right] \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 \varphi \right\} = 0, \quad (25')$$

此 (25') 式與 (26) 式的形式相同, 故此式的解, 亦即 (25) 式的解, 可以從 (26) 的解乘以  $(\lambda/\lambda_g)^2$  一因子和把所有的綫性長度乘以  $\lambda/\lambda_g$  一因子而得到. 也就是說, 矩形波導中的物理量可以從平行板波導中的相當物理量乘以  $(\lambda/\lambda_g)^2$  和把所有的長度  $l$  改為  $(\lambda/\lambda_g) l$  而得到. 例如在平行波導中, 主波電磁場是

$$E_y = A_0 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z}, \quad H_x = \frac{1}{j \omega \mu} \frac{\partial E_z}{\partial z} \left( = -A_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z} \right),$$

則在矩形波導系中主波應具有如下的電磁場橫分量:

$$E_y = A_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_g} z} \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$H_x = A_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{j \omega \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_g} z} \right) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\lambda}{\lambda_g} \left( A_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} \right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_g} z} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

現在回到 (21) 式, 首先我們不要忘記在矩形波導中我們取  $A_0 d$  作為電壓以計算導納, 而在平行板波導中我們亦將取  $A_0 d$  作為電壓<sup>[3]</sup>, 故在計算這兩個波導系統的導納中, 不同的是電流的值, 而電流的值與磁場值成正比. 在直角坐標中, 每一磁場分量均滿足波動方程, 故這兩個波導系統中磁場振幅的比應該是  $(\lambda/\lambda_g)^2$ , 如上面所說明的. 最後, 當電壓相同時, 導納與電流亦即磁場成正比, 故即見到 (21) 的值可由平行板波導系中的相當值乘以  $(\lambda/\lambda_g)^2$  和  $a/2$  兩因子得到.

再看 (22) 式的標準化導納值, 平行板波導系中的相當值經過適當變換後是<sup>[3]</sup>

$$B_0 = \frac{4b}{\lambda} \frac{1}{\pi^2} \left[ T_{0B}(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} C_m T_{mB}(\alpha) \right].$$

如果我們把  $b$  代以  $(\lambda/\lambda_g) b$ , 固定參數  $\lambda$ , 我們即得到 (22) 式. 這裏的理由

也很簡單，因為 (22) 式指的是標準化值，故與電流的絕對振幅無關，我們需要的只是如 (25') 所示的綫性尺寸的變換。

本文的最後結果 (22) 可以從平行板的結果用  $\lambda_g$  代替  $\lambda$  而得到一事早已為人們所熟知，但 (21) 式的得到則不能從平行板的結果簡單地用  $\lambda_g$  替代  $\lambda$  所能够得到，如上面所討論的。故我們在本文中所做的工作，即從電磁場分量存在的可能性出發，循着正當的步驟得到最後的結果，一方面證實了 (22) 式可以直接從平行板的結果推出來，另一方面又提醒我們要從基本波動方程 (25') 出發來求其他的物理量的變換。

## 後 記

本文的計算都是多年以前做的，現在把它們整理出來發表希望對國內波導的研究工作和教學工作有所裨益。本文經華南工學院馮秉銓教授校閱，對他所提出的寶貴意見謹此致謝；本文又經華南工學院徐秉錚副教授校閱，對他也表示謝意。

## 參 考 文 獻

- [1] Miles, J. W., "The Equivalent circuit for a plane discontinuity in a cylindrical wave guide," *Proc. I.R.E.* **34**, (1946), 728.
- [2] Hahn, W. C., "A new method for the calculation of cavity resonators", *J. Appl. Phys.* **12**, (1941), 62.
- [3] Whinnery, J. R. and Jamieson, H. W., "Equivalent circuits for discontinuities in transmissions lines," *Proc. I.R.E.* **32**, (1944), 98.
- [4] Chon, S. B., "Analysis of a wide-band waveguide fitter," *Proc. I.R.E.*, **37**, (1949), 651.
- [5] Montgomery, Principles of microwave circuits, MIT Radiation Laboratory Series Vol. 8, § 6. 16, p. 188.
- [6] Schelkunoff, Electromagnetic Waves, § 12, 3, p. 490.

# THE EQUIVALENT CIRCUIT FOR A DISCONTINUITY IN A RECTANGULAR WAVE GUIDE

LIN WEI-GUAN

(Department of Communication Engineering, South China Polytechnical Institute)

## ABSTRACT

In a rectangular wave guide of width  $a$ , there is a conducting step at  $z=0$  so that the height is  $b$  when  $z<0$  and is  $d$  when  $z>0$ . The dimensions are such that only  $TE_{01}$  mode is propagating. Analysis of such a discontinuity is made by establishing an equivalent transmission line circuit with appropriately inserted networks. The effect of the discontinuity is expressed in terms of normalized shunt admittance. It is demonstrated that in order to make use of the established results of parallel plate wave guides, care must be taken in choosing proper proportional constants and linear transformations. A numerical example is given. Finally a simpler approximation is given and its accuracy discussed.