

# 塑壓摩擦線理論與平面壓力分佈 問題之總解答\*

劉叔儀

(中國科學院冶金陶瓷研究所)

## 短引及摘要

作者新近分析了塑壓摩擦線之陡線規律<sup>[1,2]</sup>，即按最小滑動阻力條件，塑壓接觸面上之質點滑動方向為摩擦力之陡度方向<sup>[1]</sup>：

$$\nabla \tau = f \nabla P; \quad (1)$$

其中  $\tau$  為單位摩擦力， $f$  為摩擦係數， $P$  為單位壓力。因而摩擦線族之微分方程為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)} &= \frac{dx}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \\ \frac{dy}{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)} &= \frac{dx}{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

或

對於曲面，以弧長代替  $x, y$ 。按此，摩擦線族為等壓線之正交族，可由實驗壓力曲面作出，例如圖 1 為輾軋摩擦線族之平面投影，有齊別爾<sup>[3]</sup> 實驗線族之基本性質。

命曲線坐標系  $(u, v)$  為此正交系，摩擦線為：

$$\left. \begin{aligned} v(x, y) &= \text{常數}, \\ u(x, y) &= \text{常數}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

等壓線為

陡線規律又謂

在一條摩擦線上

$$\left. \begin{aligned} P &= P(u), \\ P &= P(s). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

\* 1955 年 5 月 28 日收到。

1) 作者註：由於目前作者的研究進展，有些情況必要註明，請見文尾及文中之“校後註”。作者的定量陡線規律關係，不懂 (1), (2) 兩式。

其中  $s$  為摩擦線弧長，由不滑動點或線量起。

爲方便起見，定義穿過邊界內一切等壓線之摩擦線爲“全摩擦線”。當全摩擦線上之壓力分佈爲已知時，按陡線規律，整個壓力分佈曲面確定，因爲全部等壓線之壓力值已給出。因此，有可能將表面壓力分佈的問題，化爲  $u$  或  $s$  之常微分方程，全摩擦線端點上之一點初值確定一特解曲面。

本文限於平面問題，目的有二：第一是由力學關係作出 (2) 式，並於特殊情況下解之；第二是按上述理論，將整個平面壓力分佈問題總起來解，求出爲未定函數之定型函數在任意平面幾何條件下之壓力解。

用下列兩簡化條件：

1) 當  $f \neq 0$  時，最大切應力方向仍距滑移線不遠，按此，忽略小角度，算作  $P$  約爲第一主應力  $P_1$ ，其他二主應力  $P_2, P_3$  約在  $xy$  平面內；按此，主應變  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  有上述方向或方位。

2) 在平面問題中， $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  變化爲

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \text{常數} = \text{壓縮應變} > 0; \\ \epsilon_2 = \epsilon_2(x, y) \leq 0 \quad \text{延伸}; \\ \epsilon_3 = \epsilon_3(x, y) \leq 0 \quad \text{延伸}. \end{array} \right.$$

但在一般平面塑壓中，少有嚴重平面變形集中現象，同時塑性應變分佈的理論目前還不清楚，因此算作問題中涉及的應變函數爲平均常數。

得到下列結果：

作出平面摩擦線微分方程，得到兩個特解，一個是圓板的半徑族（此解答已知爲絕對正確），另一個橢圓板，所得  $(u, v)$  系有圖 1 之基本特性，即摩擦線收斂於一奇點。因而，此解原則上亦正確。

平面壓力分佈的總解答爲未定函數之定型函數，包括一正指數項與一負曲線積分項，包括現有圓板<sup>[5]</sup>、方板<sup>[4]</sup> 及長板解<sup>[6]</sup> 為特況，並得出圓環公式類於圓板，還首次得出橢圓板的壓力分佈曲面，除開中心爲奇點而外，其餘部分連續、邊部凹、中部凸、有由其他實驗曲面所期待的性質。

總解答的另一特性是，它不但包括上述特解爲孤立特況，同時也包括這些特解爲複雜板上的區域分佈，只要某區域有同樣幾何條件而且區域間能連續相接。這一性質對鍛工實際的較廣用途是明顯的，但本文興趣在於理論，將另作文獻爲鍛工服務。

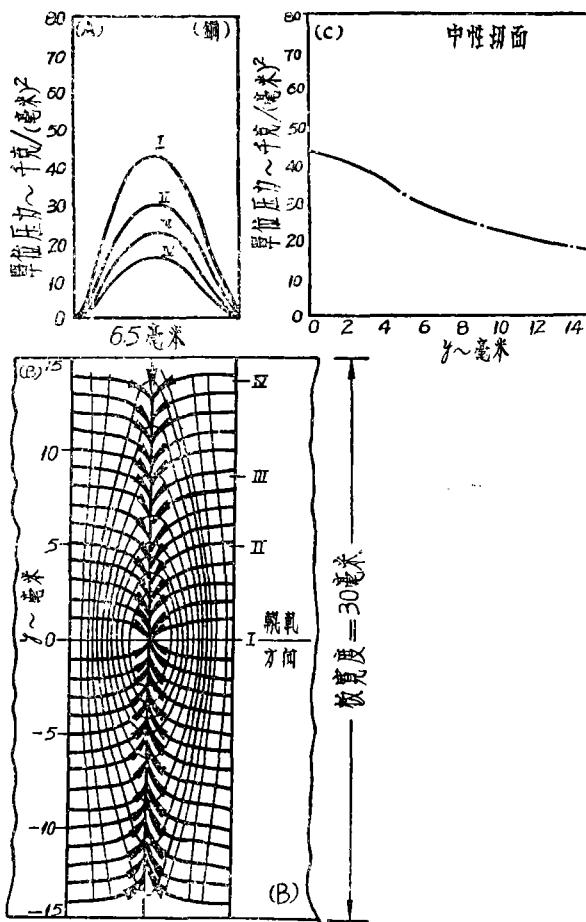


圖 1. (A)、(C) 壓力曲面, (B) 最小阻力摩擦線

## 一. 力 學 關 係

常取  $(x, y)$  軸方向為摩擦分量  $\tau_x, \tau_y$  之反方向, 在摩擦線上考慮平衡關係 (圖 2), 則有平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{2\tau_x}{h} &= 0, \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{2\tau_y}{h} &= 0, \\ \tau_x &= f P \cos \phi, \\ \tau_y &= f P \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

可以用聖維南關係的變形型:

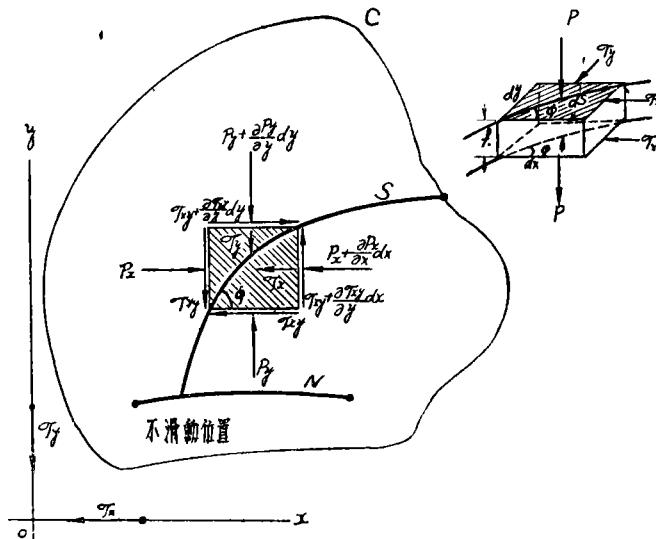


圖 2. 摩擦線上的平衡條件

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{D} \left[ P_1 - \frac{1}{2} (P_2 + P_3) \right], \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{D} \left[ P_2 - \frac{1}{2} (P_3 + P_1) \right], \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{D} \left[ P_3 - \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \right], \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

( $D$  稱為塑性係數 (實非常數)), 加上<sup>[4]</sup> 一個屈服條件:

畸變能條件:

$$(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2 = 2K^2, \quad (3)$$

其中  $K$  = 屈服點; 或最大切應力條件:

$$P_1 - P_3 = K; \quad (4)$$

定出  $D$  為:

$$\left. \begin{aligned} \text{按 (3)} \quad D &= \frac{\sqrt{2} K}{\gamma_0}, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \text{八面切應變}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{按 (4)} \quad D = \frac{3K}{2(\epsilon_1 - \epsilon_3)}. \quad (6)$$

在文獻中（如[4]）可查到（5）式，或相差一常係數之形式。從（2）中消去  $D$ ，有下列兩組平行關係：

$$\left. \begin{array}{l} P_1 - P_2 = K f_1(\epsilon), \\ P_2 - P_3 = K f_2(\epsilon), \\ P_1 - P_3 = K f_3(\epsilon), \\ f_2(\epsilon) = f_3(\epsilon) - f_1(\epsilon). \end{array} \right\} \quad (7)$$

如用畸變能條件，則

$$\left. \begin{array}{l} f_1(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\gamma_0}, \\ f_2(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\gamma_0}, \\ f_3(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{\gamma_0}; \end{array} \right\} \quad (8)$$

如用最大切應力條件，則

$$\left. \begin{array}{l} f_1(\epsilon) = \frac{2\epsilon_1 + \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3}, \\ f_2(\epsilon) = 1 - f_1(\epsilon), \\ f_3(\epsilon) = 1. \end{array} \right\} \quad (9)$$

按引言中之簡化條件（1），有下列轉換關係：

$$\left. \begin{array}{l} P = P_z \simeq P_1, \\ P_x \simeq P_2 \cos^2 \theta + P_3 \sin^2 \theta, \\ P_y \simeq P_2 \sin^2 \theta + P_3 \cos^2 \theta, \\ \tau_{xy} \simeq \frac{1}{2} (P_2 - P_3) \sin 2\theta; \end{array} \right\} \quad (10)$$

$\theta$  為正  $x$  軸與第 2 主軸間之夾角，正值。

由（7），（10）化為：

$$\left. \begin{array}{l} P = P_1, \\ P_x = P - K [f_1(\epsilon) \cos^2 \theta + f_3(\epsilon) \sin^2 \theta], \\ P_y = P - K [f_2(\epsilon) \sin^2 \theta + f_3(\epsilon) \cos^2 \theta], \\ \tau_{xy} = \frac{K}{2} f_2(\epsilon) \sin 2\theta. \end{array} \right\} \quad (11)$$

按引言中之簡化條件（2），有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} - K f_2(\epsilon) \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + K f_2(\epsilon) \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= K f_2(\epsilon) \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= K f_2(\epsilon) \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

代入 (1), 則平衡方程化為:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{2fP}{h} \cos \phi + K f_2(\epsilon) \left( \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{2fP}{h} \sin \phi + K f_2(\epsilon) \left( \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以下理論建立在陡線規律與 (13) 式上。

## 二. 摩擦線與等壓線之微分方程

按陡線規律:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)}{\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)}. \quad (14)$$

由 (13), (14) 約出摩擦線微分方程為:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}} = \frac{(\mathbf{a}_2 \cdot \nabla \theta)}{(\mathbf{a}_1 \cdot \nabla \theta)}; \quad (15)$$

其中  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  為兩正交單位矢量,  $\mathbf{a}_1$  距正  $x$  軸  $2\theta$ . 因而等壓線之微分方程為:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}} = -\frac{(\mathbf{a}_1 \cdot \nabla \theta)}{(\mathbf{a}_2 \cdot \nabla \theta)}. \quad (16)$$

當  $\theta = \theta(x, y)$  為已知時, (15), (16) 原則上可解. 當主軸固定時,  $\nabla \theta = 0$ , (15), (16) 成不定型. 這是一般用平行直摩擦線的情況. 以後, 在簡化實際問題中, 我們定義一不定型為零, 以保留直線族的實用方便.

### 三. 橢圓板及圓板之摩擦線與等壓線解

在橢圓板情況下， $\theta$  如圖 3 所示，為同心橢圓族<sup>1)</sup>切線與  $x$  軸間之正值夾角，在第一象限內：

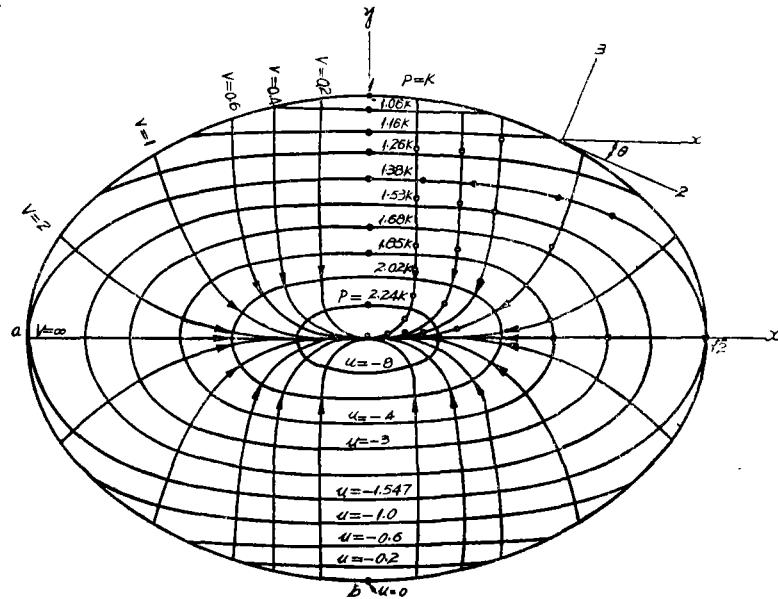


圖 3. 橢圓板之理論摩擦線與壓力等高線 ( $m=0.5$ )

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left| \frac{dy}{dx} \right| = \tan^{-1} \frac{mx}{y}, \\ m &= \left( \frac{b}{a} \right)^2, \quad b = \text{短徑}, \quad a = \text{長徑}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

則：

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{mx}{\sqrt{y^2 + m^2 x^2}}, \\ \cos \theta &= \frac{y}{\sqrt{y^2 + m^2 x^2}}. \end{aligned} \right.$$

因而有所需關係：

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\theta &= -\frac{2mxy}{y^2 + m^2 x^2}, \\ \cos 2\theta &= \frac{y^2 - m^2 x^2}{y^2 + m^2 x^2}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{my}{y^2 + m^2 x^2}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{mx}{y^2 + m^2 x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

1) 校時註：用共焦橢圓族，作者已經得到了另一結果，即橢圓板的摩擦線也是放射直線族，有另文分析<sup>[11]</sup>。

代入 (15), (16) 後, 摩擦線方程為:

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{y}{x} \right) \frac{y^2 + (2m - m^2)x^2}{(2m - 1)y^2 + m^2x^2}; \quad (19)$$

等壓線方程為:

$$\frac{dy}{dx} = - \left( \frac{x}{y} \right) \frac{(2m - 1)y^2 + m^2x^2}{y^2 + (2m - m^2)x^2}. \quad (20)$$

對於圓板,  $m = 1$ , (19), (20) 化為

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (19a)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y}. \quad (20a)$$

給出可靠結果:

$$\left. \begin{array}{l} \text{摩擦線為半徑族 } (v = \text{常數}): \quad v = \frac{y}{x}; \\ \text{等壓線為同心圓族 } (u = \text{常數}): \quad u = x^2 + y^2. \end{array} \right\} \quad (21)$$

(19), (20) 皆為齊次, 置

$$v = \frac{y}{x}. \quad (22)$$

由部分分數得到摩擦線族為 ( $v$  或  $v_0 = \text{常數}$ ):

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = \frac{x \frac{(v^2 + m)^{\frac{1}{2}}}{m}}{v^{\frac{2(1-m)}{m}}} \\ v = \frac{x \frac{(y^2 + mx^2)^{\frac{1-m}{2}}}{y^m}}{v^{\frac{1}{2(1-m)}}}, \\ v_0 = v^{\frac{1}{2(1-m)}}; \end{array} \right\} \quad (23)$$

或

$$\left. \begin{array}{l} v = \log [w^4 + \alpha w^2 + m^2] x^4 + \beta [\tan^{-1}(\beta w + \gamma) - \tan^{-1}(\beta w - \gamma)], \\ u = \log [y^4 + \alpha y^2 x^2 + m^2 x^4] + \beta \left[ \tan^{-1} \frac{\beta y + \gamma x}{x} - \tan^{-1} \frac{\beta y - \gamma x}{x} \right]; \end{array} \right\} \quad (24)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 4m - m^2 - 1, \\ k = \frac{2(m+1)}{\sqrt{6m - (1+m^2)}}, \\ \beta = \frac{2}{\sqrt{6m - (1+m^2)}}, \\ \gamma = \frac{(m-1)}{\sqrt{6m - (1+m^2)}}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

當  $m = 1$  時, (23), (24) 還原為 (21). 以下簡述  $(v, u)$  系的一些特性.

在 (23) 中,  $x$  可視為  $w$  之函數:

$$\left. \begin{array}{l} x = v_0 - \frac{w^{\frac{m}{2(1-m)}}}{(w^2 + m)^{\frac{1}{4}}}, \\ y = wv (x > 0, y > 0). \end{array} \right\} \quad (23a)$$

摩擦線不轉回的條件是:

$$\frac{dx}{dw} \geq 0.$$

由 (23a),

$$\left( \frac{2m-1}{1-m} \right) w + \frac{m^2}{1-m} \cdot \frac{1}{w} \geq 0, \quad (26)$$

須得

$$\frac{2m-1}{1-m} \geq 0, \quad \text{或} \quad m \geq \frac{1}{2}, \quad (27)$$

在第一象限中才沒有摩擦線轉回的現象. 圖 3 為  $m = \frac{1}{2}$  之下限情況, 有圖 1 之全部基本性質.

當  $m < \frac{1}{2}$  時, 第一象限被下列射線分為兩部分:

$$\left. \begin{array}{l} w = \frac{y}{x} = \frac{m}{\sqrt{1-2m}}, \\ m < \frac{1}{2}. \end{array} \right\} \quad (28)$$

當

$$w \leq \frac{m}{\sqrt{1-2m}}$$

時, 摩擦線仍有圖 1 之全部基本性質. 當

$$w > \frac{m}{\sqrt{1-2m}}$$

時，有摩擦線轉回現象，如圖 4 中  $m = 0.4$  的情況。由於此類線族不相交，故轉動只發生於近處，各線在遠處趨於  $y$  方向。這些性質意味橢圓愈條長，短軸向變形愈較長軸向變形大，當  $m$  向 1 增加時，摩擦線曲度漸減，最後在  $m = 1$  時變為直線。這符合於橢圓的連續塑性變形終於圓的一般概念<sup>[4]</sup>，雖然  $m < \frac{1}{2}$  時的回轉現象仍待細緻實驗證實，但當  $m$  不遠低於  $\frac{1}{2}$  時，回轉很慢，解答仍有圖 1 之基本性質。 $m = 0$  無物理意義。

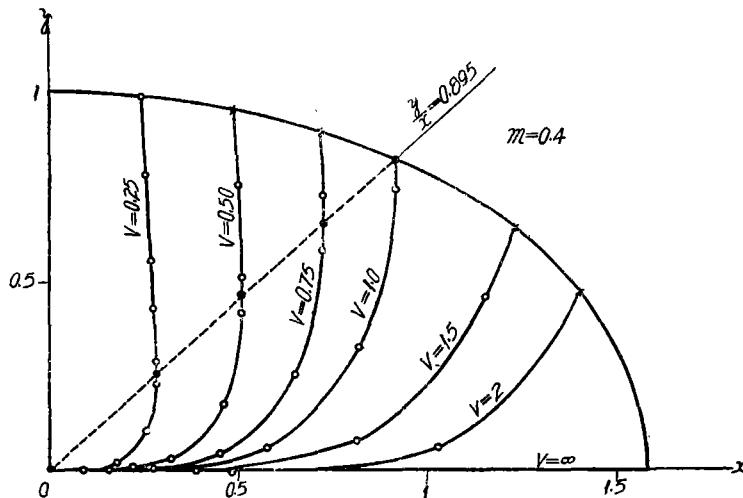


圖 4. 圓板之理論摩擦線 ( $m=0.4$ )

等壓線常與一矩形之邊切於坐標軸，此矩形之對角線為下列射線：

$$\frac{y}{x} = \sqrt{m} e^{\frac{k}{2} \tan^{-1} \gamma}. \quad (29)$$

u 在兩坐標軸上之值為：

$y$  軸上：

$$\text{或} \quad \left. \begin{array}{l} u = 4 \log y, \\ y = e^{\frac{u}{4}}; \end{array} \right\} \quad (24a)$$

$x$  軸上：

$$\text{或} \quad \left. \begin{array}{l} u = 4 \log \sqrt{m} x + 2k \tan^{-1} \gamma, \\ x = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{\frac{u}{4} [u - 2k \tan^{-1} \gamma]}. \end{array} \right\} \quad (24b)$$

由 (29), (24a), (24b) 及  $(u, v)$  系之正交性，可描出等壓線。

#### 四. 平面壓力分佈的總解答

在全摩擦線上考慮問題。按陡線規律下式成立：

$$\frac{dP}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}, \quad (30)$$

$s(N) = 0$ ,  $N$  為不滑動點或線。

由 (15) 式可得：

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = |\nabla \theta| \sin \phi, \\ \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = |\nabla \theta| \cos \phi. \end{array} \right\} \quad (31)$$

代入 (13) 式後有：

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \left[ K f_2(\varepsilon) |\nabla \theta| - \frac{2f P}{h} \right] \cos \phi, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \left[ K f_2(\varepsilon) |\nabla \theta| - \frac{2f P}{h} \right] \sin \phi. \end{array} \right\} \quad (32)$$

代入 (30) 有：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[ K f_2(\varepsilon) |\nabla \theta| - \frac{2f P}{h} \right]^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = \\ &= K f_2(\varepsilon) |\nabla \theta| - \frac{2f P}{h}, \end{aligned}$$

或作

$$\frac{dP}{ds} + \left( \frac{2f}{h} \right) P = K f_2(\varepsilon) |\nabla \theta|. \quad (33)$$

(33) 式為  $s$  之常線性方程。內中之  $\theta$  函數及積分因數  $e^{\frac{2f}{h}s}$  在全摩擦線  $s$  上確定 (奇點在外)，故解答函數  $P$  存在。 (33) 式與平面幾何條件無關，與運算坐標系無關 ( $s$ ,  $|\nabla \theta|$  可用任何坐標表示)，僅與不滑動位置  $N$  有關，因為此處為  $s$  之始， $s(N) = 0$ 。因此，(33) 為平面問題之總微分方程。按此，全摩擦線外端點之一點初值 ( $s = s_0$ ,  $P_0 = P(s_0)$ ) 確定全摩擦線上之壓力分佈空間曲線，按陡線規律，此一空間曲線，又確定一特解曲面，因為它確定板上一切壓力等高線之壓力值。故全摩擦線外端點上的一點初值確定一平面壓力分佈的特解曲面。對於平面問題，這樣的簡單關係看去似乎異樣，但這是陡線規律的後果，它將平面問題化為一個常微分方程問題。

不須知  $s$  及  $\theta$  的函數形式，(33) 可積分，由此，平面塑性壓力分佈的總解答為：

$$P = P_0 e^{-\frac{2f}{h} [s_0 - s]} - K f_2(\varepsilon) e^{-\frac{2f}{h} s} \int_s^{s_0} e^{-\frac{2f}{h} s} |\nabla \theta| ds. \quad (34)$$

$P_0, s_0$  為  $P, s$ , 在全摩擦線外端點之值, 積分在全摩擦線上作。

如全摩擦線為單一, 則解答單一; 如有一條以上的全摩擦線, 必須各全摩擦線上的積分恆等, 解答單一性才成立。例如圓板的情況。

基於以上分析, 我們提出下列概括結論:

在本文兩個簡化條件與陡線規律的基礎上:

(I) 平面塑性壓力分佈可表示為未定函數  $s, \theta(s)$  (在全摩擦線上)

的定型函數, 總解答為一正指數項與一負定積分項之代數和, 如

(34) 式;

(II) 全摩擦線單一時, 解答單一; 有一條以上全摩擦線時, 解答單一條件是各全摩擦線上的解答恆等。

(I), (II) 例如圖 5 中橢圓板的情況。

} (35)

## 五. 橢圓板上的壓力分佈解

由圖 3,  $y$  軸為全摩擦線。  $P_0$  值不明, 取  $P_0 = P(b) = K$ 。

由 (24), 有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2\alpha xy^2 + 4m^2 x^3}{y^4 + \alpha x^2 y^2 + m^2 x^4} - k\beta y \left[ \frac{1}{x^2 + (\beta y + \gamma x)^2} - \frac{1}{x^2 + (\beta y - \gamma x)^2} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{4y^3 + 2\alpha x^2 y}{y^4 + \alpha x^2 y^2 + m^2 x^4} + k\beta x \left[ \frac{1}{x^2 + (\beta y + \gamma x)^2} - \frac{1}{x^2 + (\beta y - \gamma x)^2} \right], \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{4}{y}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

尺度因數  $H_u$  及  $y$  軸上之坐標幾何關係為<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} H_u &= \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}} = \frac{y}{4}, \\ du &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{4}{y} dy, \\ ds &= H_u du = \left( \frac{y}{4} \right) \left( \frac{4}{y} dy \right) = dy, \\ s &= \int_0^y dy = y, \quad s_0 = b. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

1) 校時註: 這樣作, 是說明一般算法。 $s = y$  的關係是一眼看得出的。

總解 (34) 中之積分化爲：

$$\left. \begin{aligned} \int_s^{s_0} e^{\frac{2f}{h} s} |\nabla \theta| ds &= \int_y^b e^{\frac{2f}{h} y} \left( \frac{m}{y} \right) dy = \\ &= m \left[ \log \frac{b}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^n \right]}{n \cdot n!} \right], \\ B &= \frac{2fb}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

將 (37), (38) 代入總解得到 ( $P_0 = K$ )

$$\frac{P}{K} = e^{B(1-\frac{y}{b})} - m f_2(\epsilon) \frac{\log \frac{b}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^n \right]}{n \cdot n!}}{e^{B(y/b)}}. \quad (39)$$

在  $y$  軸上：

$$y = e^{\frac{u}{4}};$$

代入 (39) 得到壓力分佈公式爲：

$$\frac{P}{K} = \exp \left[ \frac{2f}{h} (b - e^{\frac{u}{4}}) \right] - m f_2(\epsilon) \frac{\log b - \frac{u}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[b^n - (e^{\frac{u}{4}})^n] \frac{2f}{h}}{n \cdot n!}}{\exp \left[ \frac{2f}{h} e^{\frac{u}{4}} \right]}, \quad (40)$$

$u$  見 (24) 式。

內中之級數收斂不算慢，在以下例算中前 5 項足夠近似。取  $B = 1$ ,  $m = 0.5$ .  $f_2(\epsilon)$  仍待實驗決定。但橢圓變形之特性是  $b$  軸上延伸較  $a$  軸上的大。取可以還原爲圓情況的一個比例關係：

$$e = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} = \left( \frac{a}{b} \right) = \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{2},$$

則按畸變能條件，有

$$f_2(\epsilon) = \sqrt{1 + \frac{2}{(2+e)^2 + (1+2e)^2}} \simeq 0.114.$$

算出結果如圖 5 所示。壓力分佈曲面見圖 3 中各等壓線之壓力值。原點爲一奇點， $P \rightarrow -\infty$ ，起於解答 (39) 中之對數項。在原點附近（圖上繪不出） $P$  達到極大，曲面翻繩向下趨於  $-\infty$ ，此小區域可理解爲不滑動區域。在實用上，由於此域甚小，

壓力值主要項為指數項，可將曲線連過空缺，甚致略去定積分項。

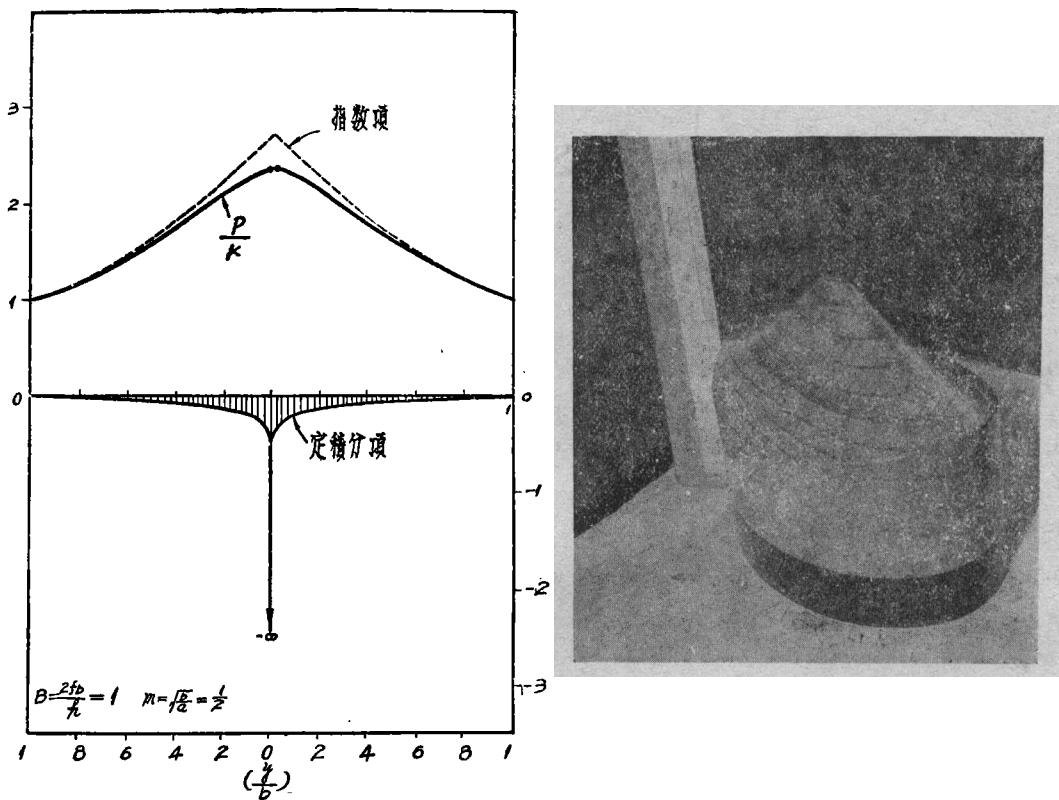


圖 5. 椭圓板短軸上之理論壓力分佈

這種解答曲面性質，是由其他實驗結果所可預期的。

## 六. 總解答的一類簡單特解

當一複雜板上的某區域或某孤立板滿足下列條件之一時：

$$\text{或} \quad \begin{cases} 1) \quad \epsilon_2 = \epsilon_3: \quad f_2(\epsilon) = 0, \\ 2) \quad \text{主軸固定:} \quad \nabla \theta = 0; \end{cases} \quad (41)$$

則區域壓力分佈或有此條件之孤立板上的壓力分佈僅為：

$$P = P_0 e^{\frac{2f}{h} [x_0 - x]}. \quad (42)$$

這類簡單特解有方便實際用途，下節討論。在此，只指出已有方板<sup>[4]</sup>、圓板<sup>[5]</sup>及長板<sup>[6]</sup>三孤立特況為特解 (42) 之特況，此外，(42) 還包括圓環壓力解在內（本文）。此類簡化方及長方解的條件是 (41) 中的第 2) 條件，圓及圓環為 (41) 中之第 1) 條

件。在圓環情況下，不滑動位置  $N$  為圓環之中心環線。將各情況之  $s$  函數代入 (42) 後，有：

$$P = P_0 e^{\frac{2f}{h} [s_0 - s]} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} P(a) e^{\frac{2f}{h} (a-r)}; \quad \text{圓板}, \quad s = sr, \quad s_0 = a = \text{半徑.} \\ P(a) e^{\frac{2f}{h} (a-r)}, \quad \left. \begin{array}{l} s = r - \frac{1}{2} (a+b), \\ b = \text{內徑.} \end{array} \right. \\ r \geq \frac{1}{2} (a+b); \quad \left. \begin{array}{l} s_0 = a - \frac{1}{2} (a+b); \\ s = \frac{1}{2} (a+b) - r, \end{array} \right. \\ P(a) e^{\frac{2f}{h} (r-b)}, \quad \left. \begin{array}{l} s_0 = \frac{1}{2} (a-b). \end{array} \right. \\ b \leq r \leq \frac{a+b}{2}; \end{array} \right\} \text{圓環} \\ \left. \begin{array}{l} P(a) e^{\frac{2f}{h} (a-x)}, \quad \left. \begin{array}{l} s = x, \quad s_0 = a = \text{半邊長;} \\ s = y, \quad s_0 = a. \end{array} \right. \\ P(a) e^{\frac{2f}{h} (a-y)}; \end{array} \right\} \text{四域方板} \\ P(a) e^{\frac{2f}{h} (a-x)}; \quad \text{長方板}, \quad s = x, \quad s_0 = a = \text{半寬度.} \end{array} \right\} (43)$$

在末一情況，按畸變能條件， $P(a) = 1.15 K$ ；在其他情況下， $P(a) = K$ 。

## 七. 實用壓力計算法簡述

橢圓板壓力的主要項仍為指數項，為實用方便，可以略去定積分項，則歸入 (43) 型，只是摩擦線為曲線族。又在長板中，不用畸變能條件而用最大切應力條件，則下列五已知特解可以用簡單方式接上而不須過渡區域：

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{橢圓板 (本文): } P \simeq K e^{\frac{2f}{h} [s_0 - s]} \text{ ——用於件端;} \\ 2) \text{圓環 (本文) ——用作各種角度之連續轉彎;} \\ 3) \text{圓板 (現存) ——用於件端;} \\ 4) \text{長板 (現存): } P = K e^{\frac{2f}{h} [s_0 - s]} \text{ ——用於中部或件端;} \\ 5) \text{方板 (現存) ——部分用作不連續直角轉彎.} \end{array} \right\} (44)$$

總解不但包括此五特解或其他解為孤立特況，也包括各特解為一板上之區域解。因此，知道的特解愈多，能計算的複雜板（塊）範圍愈廣。過去有三解，本文添上兩解，內中圓環解可作連續轉彎之用。同時，計算只以不滑動線為基準，無坐標限制。因此，

此五解按 (44) 式中之用法，可以處理的情況就不太少。這裏不去數情況，將另作文獻為鍛工服務，只舉圖 6 中的兩例來結束本文，兩例中之壓力曲面只有一葉（區域邊界為公共摩擦線時是如此），為 (44) 式全部給定。

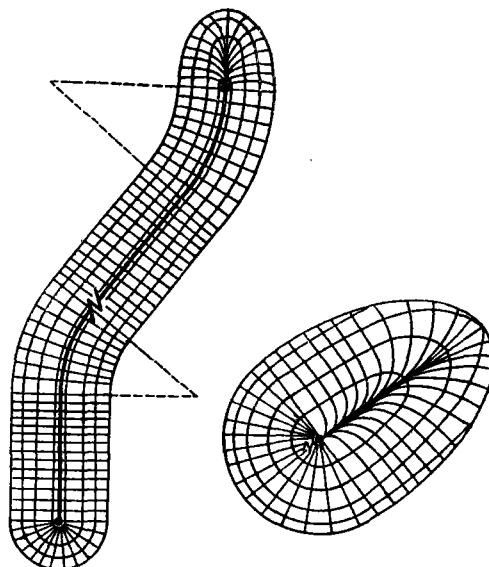


圖 6. 連續壓力分佈計算法 (壓力曲面為單葉)

## 結 論

本文簡化條件不算多，也是塑性問題中常用的。因為所得結果能還原為已知解答與絕對正確的情況（即圓板摩擦線），而且橢圓板的連續壓力曲面是本文初次得到，性質符合理論（奇點上性質）與實驗的預期。所以作者相信本文理論基本正確。

但作者更有興趣的是本文結果可以為工業服務和在教學上可以用本文原理及簡化方法，在較短的時間內，將現存公式及較廣泛的概念教給學生。這些，留到另一篇技術文獻中去詳細介紹。本文公式除經典力學公式與現存特解外，概為原始。方法亦為原始。

本文方法推廣到曲接觸面的可能性存在。

誌謝：承中國科學院數學研究所秦元勳同志與北京鋼鐵學院數學教研組主任劉景芳教授閱讀文稿，提供寶貴意見；承力學研究所林鴻蓀同志對文中所用兩簡化條件表示認真的意見；承北京鋼鐵學院力學教研組王美英同志代為校核公式推算與手稿。

作者謹對這三位數學家同志與王美英同志致由衷謝意。

## 參 考 文 獻

- [1] 劉叔儀，“摩擦線與（輥軋）壓力分佈間之相互關係”，物理學報 12:1 (1956), 41—49.

- [2] 劉叔儀等，“摩壓摩擦中之陡線規律”，鋼鐵學院學報第一輯，1955。
- [3] Siebel, E. & Oscenberg, E., *Mitt. K. W. Inst.* 15 (1934).
- [4] 見塑性學或壓力加工原理教科書，如 С. И. Кубкин. Теория обработки металлов давлением, 1947, Москва.
- [5] Swift, 見 Underwood, Rolling of Metals, Vol. 1950, 第 112 頁。
- [6] A. Nadai, *Il. Appl. Mech.* 1939.
- [7] 劉叔儀，機械工程學報，4 (1956), 159—167.
- [8] 劉叔儀，鋼鐵學院學報，第 2 輯，1956. (兩篇)。
- [9] 劉叔儀，“最小摩阻場”，1956, 5 (尚未發表)。
- [10] 劉叔儀，“平塑壓接觸面上的長程滑線與短程滑線”，1956, 5 (尚未發表)。
- [11] 劉叔儀，“橢圓板塑壓摩擦線另解”，中國科學院，冶金陶瓷研究所研究結果(未發表)，1956. 10. 31.

### 校 後 註

- (1) 作者的一系列研究(本文與 [7]—[11]) 始於 1954 年底，當時文獻資料不全。本文較全面的新稿於 1956 年 11 月在中國金屬學會全國代表大會上報告。
- (2) 1955 年，中國科學院數學研究所秦元勳同志會建議作者用共焦橢圓族計算摩擦線，當時由於工作重點轉移，未能即時考慮。1956 年 11 月，作者在中國科學院冶金陶瓷研究所重新考慮了秦同志的意見。經過冗長計算後得出一個很簡單結果，謂橢圓板的摩擦線也是半徑族<sup>[11]</sup>：

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{y}{x} \right) \frac{y^4 + 2(a^2 + x^2)y^2 + (x^2 - a^2)^2}{y^4 + 2(a^2 + x^2)y^2 + (a^2 - x^2)^2} = \frac{y}{x},$$

(a 在此為焦距)分析以後將另發表。

(3) 本文開拓出一個新方法與一個一輪廓，工作在逐一填進中。

## TWO DIMENSIONAL THEORY OF PLASTIC FRICTION-LINES AND A TOTAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF SURFACE PRESSURE DISTRIBUTION

LIU SHU-I

(Institute of Metallurgy and Ceramics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

This paper is one of the research developments on friction-lines and pressure distribution conducted here. With the “rule of gradient” as a foundation, the author attempted to solve the problem of friction-lines and pressure distribution for the two-dimensional case as a whole. The methods and results are as follows:

The differential equations of equilibrium

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{2\tau_x}{h} &= 0, \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{2\tau_y}{h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$\tau_x = fP \cos \phi, \tau_y = fP \sin \phi;$   
 $f$ —Coef. of friction