

彈性圓薄板在均佈邊緣 力矩作用下的彎曲*

黃擇言

(北京地質學院理論力學教研組)

一. 引言

圓薄板在純彎曲情形下的解答，乃計算圓柱形容器底面時所必需。過去，工程上一向是用小撓度理論的結果來進行設計的。可是這種理論只有當撓度與板厚之比 $\frac{w}{h} \ll \ll 1$ ，從而中間面的應變可以忽略不計時，才比較接近實際。Timoshenko^[1]指出，如果在撓度不比板厚小的情形下但仍然比其他諸尺度為小時，例如在 $\frac{w}{h} \approx 0.5$ 時，用小撓度理論計算最大撓度與最大應力的差誤是相當大的。欲求比較精確的結果，則中間面的應變不容忽略，亦即必須用大撓度理論來求解。文獻 [1] 中考慮了中間面的應變後，根據平衡條件，得到兩個關於徑向位移 u 和橫向（即垂直板面方向）位移即撓度 w 的非線性微分方程，然後以數字積分法來求解。這種解法是相當繁冗的。

在本文中，我們首先寫出根據平衡條件而得到的關於撓度 w 和由於中間面的應變而產生的薄膜應力 N 的非線性微分方程，然後應用攝動法，以最大撓度，即中心點的撓度為攝動參數，重新處理了這一問題。我們的運算十分簡易，而且又能得到同樣準確的結果。最後，我們還列出設計公式，使它們能直接應用到工程設計問題上去。

二. 基本方程

我們考慮一半徑為 a ，厚度為 h 的圓形薄板。沿板的邊緣每單位長度上作用有均勻分佈的力矩 M_0 （圖 1）。令橫向撓度為 w ，徑向薄膜應力為 N_r ，切向薄膜應力為 N_t 。它們都是 r （離開中心的徑



圖 1.

* 1956 年 7 月 27 日收到。

向距離) 的函數, 並且滿足下列的 von Kármán 方程:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\omega}{dr} &= N_r \frac{d\omega}{dr}, \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 &= 0, \\ N_r &= \frac{d}{dr} (r N_r); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 E 是楊氏彈性模數, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 是抗撓剛度, ν 是泊松比。

相應的邊界條件是:

當 $r = a$ 時,

$$w = 0, \quad -D \left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = M_0, \quad N_r = 0; \quad \left. \right\} \quad (2)$$

當 $r = 0$ 時,

$$\frac{d\omega}{dr}, \quad N_r \text{ 有限.} \quad \left. \right\}$$

為了使方程 (1) 和邊界條件 (2) 簡化起見, 我們引入下列的無量綱新量:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r^2}{a^2}, & W &= \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\omega}{h}, & M &= \frac{6a^2(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Eh^4} M_0, \\ S &= 3(1-\nu^2) \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, & T &= 3(1-\nu^2) \frac{a^2 N_t}{Eh^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

於是, 方程 (1) 可以寫成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) &= S \frac{dW}{d\rho}, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho S) + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\rho} \right)^2 &= 0, \\ T &= S + 2\rho \frac{dS}{d\rho}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

邊界條件 (2) 可以寫成:

當 $\rho = 1$ 時,

$$W = 0, \quad (1+\nu) \frac{dW}{d\rho} + 2\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} = -M, \quad S = 0; \quad \left. \right\} \quad (5)$$

當 $\rho = 0$ 時,

$$\frac{dW}{d\rho}, \quad S \text{ 有限.} \quad \left. \right\}$$

因此，我們的問題便歸結為在邊界條件 (5) 下求解方程 (4)。

三. 方程的解法

現在，我們要以板的最大撓度，即中心點的撓度為基礎，應用攝動法，在邊界條件 (5) 下來求解方程 (4)。令

$$W_m = W_{\rho=0} = \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{w}{h} \right)_{\rho=0}. \quad (6)$$

顯然，

$$M = M(W_m), \quad W = W(W_m, \rho), \quad S = S(W_m, \rho), \quad T = T(W_m, \rho). \quad (7)$$

當 W_m 不大時，在可能的收斂範圍內，這些量都可以展開成為 W_m 的升幕級數，即

$$\left. \begin{array}{l} M = \gamma_1 W_m + \gamma_3 W_m^3 + \dots, \\ W = w_1(\rho) W_m + w_3(\rho) W_m^3 + \dots, \\ S = s_2(\rho) W_m^2 + s_4(\rho) W_m^4 + \dots, \\ T = t_2(\rho) W_m^2 + t_4(\rho) W_m^4 + \dots; \end{array} \right\} \quad (8)$$

式中的 $\gamma_1, \gamma_3, \dots$ 是待定常數； $w_1(\rho), w_3(\rho), \dots$ ； $s_2(\rho), s_4(\rho), \dots$ 以及 $t_2(\rho), t_4(\rho), \dots$ 等都是 ρ 的待定函數。將 (8) 式代入 (4), (5), (6) 諸式，並逐一收集 W_m 的同次項，我們就可得到一系列對於 $\gamma_1, w_1, s_2, t_2, \gamma_3, w_3, s_4, t_4, \dots$ 及其相應的邊界條件的線性微分方程。

對於 γ_1 和 w_1 ，我們有下列的方程和邊界條件：

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \frac{dw_1}{d\rho} \right) = 0, \\ w_1(1) = 0, \quad (1+\nu) w_1'(1) + 2w_1''(1) = -\gamma_1, \\ w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) \text{ 有限.} \end{array} \right\} \quad (9)$$

其解為

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_1 = 1 + \nu, \\ w_1 = -\rho + 1; \end{array} \right\} \quad (10)$$

這也就是小撓度理論解^[2]。

對於 s_2 和 t_2 ，我們有下列的方程和邊界條件：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho s_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{d\rho} \right)^2 &= 0, \\ t_2 &= s_2 + 2\rho \frac{ds_2}{d\rho}, \\ s_2(1) &= 0, \quad s_2(0) \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其解爲

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{4} (\rho - 1), \\ t_2 &= -\frac{1}{4} (3\rho - 1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

對於 γ_3 和 w_3 , 我們有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \frac{dw_3}{d\rho} \right) &= s_2 \frac{dw_1}{d\rho}, \\ w_3(1) &= 0, \quad (1 + \nu) w_3'(1) + 2w_3''(1) = -\gamma_3, \\ w_3(0) &= 0, \quad w_3'(0) \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其解爲

$$\left. \begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{1}{144} (17 + 5\nu), \\ w_3 &= \frac{1}{144} (2\rho^3 - 9\rho^2 + 7\rho). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

對於 s_4 和 t_4 , 我們有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho s_4) &= -\frac{dw_1}{d\rho} \frac{dw_3}{d\rho}, \\ t_4 &= s_4 + 2\rho \frac{ds_4}{d\rho}, \\ s_4(1) &= 0, \quad s_4(0) \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其解爲

$$\left. \begin{aligned} s_4 &= \frac{1}{288} (\rho^3 - 6\rho^2 + 7\rho - 2), \\ t_4 &= \frac{1}{288} (7\rho^3 - 30\rho^2 + 21\rho - 2). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我們的計算到此爲止。

假如此板的邊緣不是懸空而是簡單支持, 則由於邊界條件完全相同, 將仍得如上的結果。

四. 最大撓度設計公式

根據以上的計算，可見沿邊緣有均勻分佈力矩作用的彈性圓薄板，其最大撓度，即中心點的撓度與力矩之間的關係是：

$$M = \gamma_1 W_m + \gamma_3 W_m^3 = (1 + \nu) W_m + \frac{1}{144} (17 + 5\nu) W_m^3. \quad (17)$$

在 $\nu = 0.3$ 的特殊情形下¹⁾，中心撓度對彎曲力矩的設計公式為：

$$M = 1.3 W_m + 0.1285 W_m^3. \quad (18)$$

圖 2 表示當 $\nu = 0.3$ 時，中心撓度對彎曲力矩的曲線，這也就是工程上應用的設計曲線。

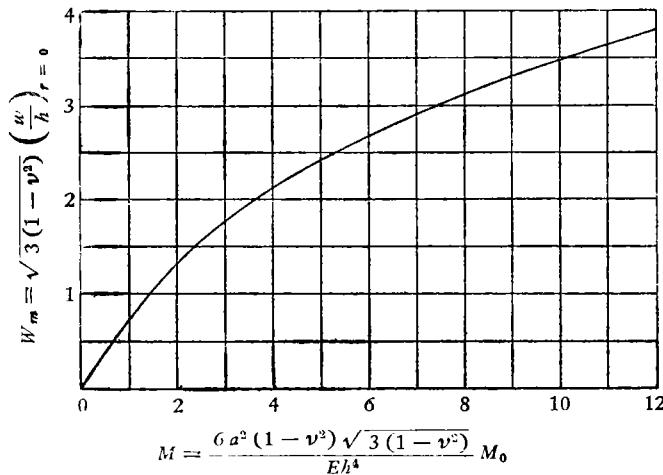


圖 2. 中心撓度對彎曲力矩的曲線 ($\nu = 0.3$)

五. 應力設計公式

現在，我們再來求出板中應力的表達式。我們知道，若 N_r 和 N_t 為徑向和切向的薄膜應力； σ'_r 和 σ'_t 為徑向和切向的拉伸應力； σ''_r 和 σ''_t 為徑向和切向的彎曲應力； z 為離開中間面的距離，則有關係式如下：

$$\left. \begin{aligned} N_r &= h \sigma'_r, \quad N_t = h \sigma'_t, \\ M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ \sigma''_r &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad \sigma''_t = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

1) 不常使用的鋼材，其泊松比 ν 即為此數。

又若令 σ_r 和 σ_t 分別表示離開中間面距離為 z 處的徑向和切向應力，則有

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma''_r, \quad \sigma_t = \sigma'_t + \sigma''_t. \quad (20)$$

利用 (3) 式，則 (19) 式可以寫成：

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{Eh^3}{3a^2(1-\nu^2)} S = h\sigma'_r, \\ N_t &= \frac{Eh^3}{3a^2(1-\nu^2)} T = h\sigma'_t, \\ M_r &= -\frac{Eh^4}{6a^2(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1+\nu) \frac{dW}{d\rho} + 2\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right], \\ M_t &= -\frac{Eh^4}{6a^2(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1+\nu) \frac{dW}{d\rho} + 2\nu\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right], \\ \sigma''_r &= \mp \frac{Eh^2}{a^2(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1+\nu) \frac{dW}{d\rho} + 2\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right] = \\ &= \pm \frac{6M_r}{h^2}, \quad (z = \pm \frac{h}{2}), \\ \sigma''_t &= \mp \frac{Eh^2}{a^2(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1+\nu) \frac{dW}{d\rho} + 2\nu\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right] = \\ &= \pm \frac{6M_t}{h^2}, \quad (z = \pm \frac{h}{2}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

今引入新的無量綱變數，

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'_r(\rho) &= \frac{3a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma'_r = \text{折合徑向拉伸應力}, \\ \Sigma'_t(\rho) &= \frac{3a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma'_t = \text{折合切向拉伸應力}, \\ \Sigma''_r(\rho) &= \frac{3a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma''_r = \text{折合徑向彎曲應力}, \\ \Sigma''_t(\rho) &= \frac{3a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma''_t = \text{折合切向彎曲應力}, \\ \Sigma_r(\rho) &= \Sigma'_r(\rho) + \Sigma''_r(\rho) = \text{折合徑向應力}, \\ \Sigma_t(\rho) &= \Sigma'_t(\rho) + \Sigma''_t(\rho) = \text{折合切向應力}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

則 (21) 式可以寫成：

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma'_r(\rho) &= S, \\
 \Sigma'_t(\rho) &= T, \\
 \Sigma''_r(\rho) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \left[(1+v) \frac{dW}{d\rho} + 2\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right], & \text{板的凸面取-號} \\
 \Sigma''_t(\rho) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \left[(1+v) \frac{dW}{d\rho} + 2v\rho \frac{d^2W}{d\rho^2} \right]. & \text{板的凹面取+號}
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

於是，我們得到下面的一些有用結果：

在邊緣，即 $\rho = 1$ ，

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma'_r(1) &= S(1) = 0, \\
 \Sigma'_t(1) &= T(1) = -\frac{1}{2} W_m^2 - \frac{1}{72} W_m^4, \\
 \Sigma''_r(1) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} [(1+v) W'(1) + 2W''(1)] = \\
 &= \pm \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \left[(1+v) W_m + \frac{1}{144} (17+5v) W_m^3 \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma''_t(1) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} [(1+v) W'(1) + 2v W''(1)] = \\
 &= \pm \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \left[(1+v) W_m + \frac{1}{144} (5+17v) W_m^3 \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\Sigma_r(1) = \Sigma'_r(1) + \Sigma''_r(1),$$

$$\Sigma_t(1) = \Sigma'_t(1) + \Sigma''_t(1);$$

在中心，即 $\rho = 0$ ，

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma'_r(0) &= S(0) = \frac{1}{4} W_m^2 - \frac{1}{144} W_m^4, \\
 \Sigma'_t(0) &= T(0) = \frac{1}{4} W_m^2 - \frac{1}{144} W_m^4, \\
 \Sigma''_r(0) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} (1+v) W'(0) = \\
 &= \pm \frac{3(1+v)}{\sqrt{3(1-v^2)}} \left(W_m - \frac{7}{144} W_m^3 \right), \\
 \Sigma''_t(0) &= \mp \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} (1+v) W'(0) =
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 &= \pm \frac{3(1+\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(W_m - \frac{7}{144} W_m^3 \right), \\
 \Sigma_r(0) &= \Sigma'_r(0) + \Sigma''_r(0), \\
 \Sigma_t(0) &= \Sigma'_t(0) + \Sigma''_t(0).
 \end{aligned}
 \quad \left. \right\}$$

因此，在 $\nu = 0.3$ 的特殊情形下，邊緣的應力分量是：

$$\begin{aligned}
 \Sigma'_r(1) &= 0, \\
 \Sigma'_t(1) &= -0.5 W_m^2 - 0.01389 W_m^4, \\
 \Sigma''_r(1) &= \pm (2.3604 W_m + 0.2333 W_m^3), \\
 \Sigma''_t(1) &= \pm (2.3604 W_m + 0.1274 W_m^3);
 \end{aligned}
 \quad \left. \right\} \quad (26)$$

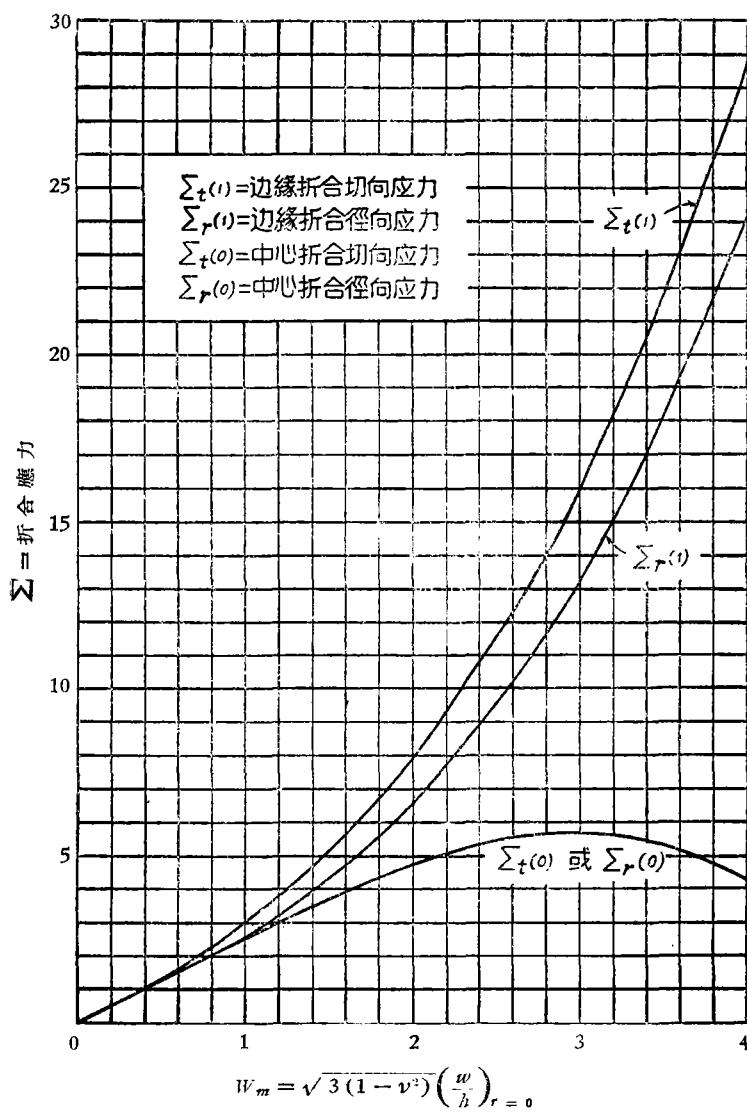
中心的應力分量是：

$$\begin{aligned}
 \Sigma'_r(0) &= 0.25 W_m^2 - 0.006944 W_m^4, \\
 \Sigma'_t(0) &= 0.25 W_m^2 - 0.006944 W_m^4, \\
 \Sigma''_r(0) &= \pm (2.3604 W_m - 0.1147 W_m^3), \\
 \Sigma''_t(0) &= \pm (2.3604 W_m - 0.1147 W_m^3).
 \end{aligned}
 \quad \left. \right\} \quad (27)$$

從而我們有應力設計公式如次：

$$\begin{aligned}
 \Sigma_r(1) &= 2.3604 W_m + 0.2333 W_m^3, \\
 \Sigma_t(1) &= 2.3604 W_m + 0.5 W_m^2 + 0.1274 W_m^3 + 0.01389 W_m^4, \\
 \Sigma_r(0) &= 2.3604 W_m + 0.25 W_m^2 - 0.1147 W_m^3 - 0.006944 W_m^4, \\
 \Sigma_t(0) &= 2.3604 W_m + 0.25 W_m^2 - 0.1147 W_m^3 - 0.006944 W_m^4.
 \end{aligned}
 \quad \left. \right\} \quad (28)$$

圖 3 表示當 $\nu = 0.3$ 時，中心撓度對折合應力的曲線。它們也是工程上應用的設計曲線。

圖 3. 中心撓度對折合應力的曲線 ($\nu = 0.3$)

六. 討論

從 (26), (27) [或 (24), (25)] 諸式可以看出, 徑向和切向的拉伸應力在板的中間部分都為正值; 在板的外邊部分切向應力變為負值, 亦即在切線方向有壓縮情形, 最大切向壓應力是在邊緣上。在板的中心, 徑向應力與切向應力大小相同。彎曲應力以在中心處為最小, 邊緣為最大。

文獻 [1] 中取 $a \approx 23h$, $(M_r)_{r=a} = M_0 = 2.93 \times 10^{-3} \frac{D}{h}$ 為例, 得到一些結果。我

們則以 $a = 23h$, $M_0 = 2.93 \times 10^{-3} \frac{D}{h}$ 為例, 將所得結果與以數字積分法所得者列一比較表如下 ($\nu = 0.3$)。由該表立即可以看出, 數字積分法所得的結果和本文用攝動法所得的結果是完全一致的, 但我們的運算却簡單得多。這又一次表明攝動法在處理圓薄板大撓度問題上的優越性: 它不僅在均佈載荷或集中載荷作用下的情形^[3]能獲得成功, 而且在純彎曲, 亦即在均佈邊緣力矩作用下的情形也能得到令人滿意的結果。

兩種方法所得結果的比較 ($\nu = 0.3$)

	$(\frac{w}{h})_{r=0}$	最大切向應力 最大彎曲應力	以小撓度理論計算中心點 的彎曲應力所產生的誤差
數字積分法所得的結果 (取 $a \approx 23h$, $M_0 = 2.93 \times 10^{-3} \frac{D}{h}$)	0.55 ¹⁾	0.18 左右	12% 左右 ²⁾
本文所得的結果 (取 $a = 23h$, $M_0 = 2.93 \times 10^{-3} \frac{D}{h}$)	0.5510	0.1824	12.73%

1) 比小撓度理論所得結果約小 9%。

2) 根據其曲線計算約為 12.7%, 故應該是“13% 左右”而非“12% 左右”。

參 考 文 獻

- [1] Timoshenko, S., Theory of Plates and Shells, pp. 329—333, McGraw-Hill, 1940.
 [2] Roark, R. J., Formulas for Stress and Strain, 3rd ed., p. 197, McGraw-Hill, 1954.
 [3] 錢偉長、葉開沅, 物理學報, 10 (1954), 209—238。

BENDING OF THIN ELASTIC CIRCULAR PLATES BY MOMENTS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE EDGE

HUANG TSE-YEN
(Peking Institute of Geology)

ABSTRACT

In this paper, the problem of the bending of thin elastic circular plates with large deflections produced by the moments uniformly distributed along the edge is treated once again by the perturbation method. Results obtained by the present method are quite the same as those given by the method of numerical integration which, however, is much more labourious. Furthermore, all our results are presented in such a form that the direct application to design problem is to be possible.