物 理 學 報
第 12 卷 第 6 期 1956 年 11 月

從力學相對性原理推導特殊相對論力學*

徐 惠 敏
(華東紡織工學院)

RELATIVISTIC MECHANICS (SPECIAL) IS DERIVED FROM THE RELATIVITY PRINCIPLE OF MECHANICS

HSU HWEI-MING
(East China Institute of Textile Industry)

討論力學相對性原理,一般稱爲伽利略相對性原理,滿足伽利略相對性原理的時空變換式稱爲伽利略變換式. 有人分析伽利略變換式,認爲其中有未經證實的關於時間與空間的絕對性的假定. 其實我們得到伽利略變換式時是否一定要時空絕對性的假定,是要看我們用怎樣的角度來看問題的:如果我們肯定牛頓力學的全部原則都是確切無疑的(例如質量是不隨速度而改變),那末要滿足力學相對性原理的時空坐標變換,必定是伽利略變換,根本不必引入時空絕對性的假定. 但是如果我們暫不把牛頓力學全部肯定而僅從牛頓第一定律出發來討論相對性原理,那末就必須採用關於時空絕對性的假定,才能得到伽利略變換式.

在本文中,不把牛頓力學的原則全部肯定,也不作時空絕對性的假定,而只採用某些基本假定作推導的基礎,結果得到一種新的變換式. 根據這種變換式也可樹立特殊相對論力學.

我們的假定是:(1) 在任何相對作勻速直線運動的坐標系中,力學規律都是一樣的. (2) 牛頓第一定律.

根據這兩個假定可知:任何一個坐標系,如果它對某一慣性系作勻速直線運動,它必定也是一個慣性系.

以下推導:

爲了使問題的解答簡便起見,假定二個慣性系 K 與 K' 的空間坐標軸的取向是各

* 1956 年 6 月 16 日收到.

軸平行． 在 $t=0$ 時，令 $t'=0$ 並使此時二個坐標系的原點 O 與 O' 重合． K' 系對 K 系的速度是 u，沿着 X 軸正向，也卽 O' 點對 K 系的速度是 u．

對時空的性質，我們尙需肯定某些基本原則：（1°）K 系與 K' 系的時空坐標是一一對應的． （2°）時空中沒有特別的點，卽 K 系中的有限值的點不可能對應 K' 系的無限遠點． 那末由於變換要滿足力學的慣性原理，必是無分式的綫性變換．

下面只分析 x，t 與 x'，t' 的變換式：

我們先討論 O' 點的時空坐標值：在時間 t 時，K系觀察認爲 O' 點到了 $x=ut$ 處，卽 $x-ut=0$；而 K' 系的觀察者認爲 O' 點的坐標總是 $x'=0$． 所以，x' 與 x、t 之間可能的數學聯系是：

$$x'=a\cdot(x-ut)$$

其中 a 不可能再是 x，t 的函數，僅可能是相對速度 u 的函數．

用同樣的方法來討論 O 點的時空坐標值，得

$$x=b\cdot(x'+ut')$$

a 值的物理意義，就是 K 系觀察對它有速度 u 運動的一根尺的長度沿運動方向的長度變更率． 而 b 值的意義，就是 K' 系觀察對 K' 系有 u 速運動的一根尺沿運動方向的長度變更率． 根據前面的基本假定：K 與 K' 的力學原理是一樣的，而長度是力學的基本量之一，尺的長度隨速度而變的情形當然在 K 與 K' 應該一樣，所以必需 $a\equiv b$．

a 是 u 的函數，我們以 $1/\theta(u)$ 來代替它，得

$$x=\frac{x'+ut'}{\theta(u)}, \tag{1}$$

$$x'=\frac{x-ut}{\theta(-u)}. \tag{2}$$

假定

$$\theta(u)=\theta(-u) \tag{3}$$

卽可寫出 t 與 t' 的轉換式：

$$t=\frac{t'+[1-\theta^2(u)]\dfrac{x'}{u}}{\theta(u)} \tag{4}$$

這裏把 $\theta=\theta(u)$ 引入，是爲了數學分析上的完善，如果令 $\theta\equiv 1$，倒是引入了一種未經證實的假定． 我們得到方程 (1) 至 (4) 僅是採用前面的二個基本假定以及對時空的某些基本特性加以肯定． 以下探討中仍如此．

設有一質點 O_M，它對 K 系的速度是 v（沿 X 軸方向），則 O_M 對於 K' 系的速度 v' 可據（1）式與（4）式計算，得：

$$v' = \frac{v-u}{1-[1-\theta^2(u)]\,\frac{v}{u}}\,. \tag{5}$$

現在設想再引入一個坐標系 M．M 系的原點是 O_M，它的空間各軸也與 K 系的各軸平行．令 O_M，O 爲觀察者，觀察 O' 的速度．已知 M 系對 K 系的速度是 v，在 M 系觀察 O' 的速度是 $-v'$．用得到第（5）式的一樣的方法討論，應當有下關係式成立：

$$-v' = \frac{u-v}{1-[1-\theta^2(v)]\,\frac{u}{v}}\,. \tag{6}$$

比較（5）式與（6）式，得：

$$\left[1-\theta^2(u)\right]\frac{v}{u} = \left[1-\theta^2(v)\right]\frac{u}{v}\,;$$

其中 u, v 各是獨立變數．已知 $\theta(0)=1$，所以在 u, v 各不等於零時討論這個函數方程，得到的結論是：

$$\theta = \sqrt{1-ku^2}\,.$$

由數學上我們知道 k 一定是一個不變的值，它的數值究竟多少，單由前面的二個基本假定是得不到的．k 的數值，必需由實驗來決定．我們不能事先斷定 k 是否恆等於 0，如果 $k=0$，就得到伽利略變換式；如 $k\neq 0$，就是新變換式（與洛侖茲變換式形式上相似）．從新變換式出發，我們利用推導特殊相對論力學的一般方法，也可得到一些特殊相對論力學的結果，僅是把 k 代以 $\frac{1}{C^2}$．例如質量隨速度而變更的公式是：

$$m(v) = m_0 / \sqrt{1-kv^2}\,.$$

在經典力學的實驗中，發現伽利略的變換式是可以應用的．這正是說明了 k 的數值一定小於某一個數量級，經典力學的實驗條件只能測定 $k \doteq 0$．如在粒子的速度已很大時還沒有發現運動質量與靜止質量的差別，我們方可懷疑 k 或是零值．當然，現在的高速粒子實驗顯示了 $k\neq 0$．k 的數值，也可由

$$k = [1 - m_0^2/m(v)^2]/v^2$$

這個式子的實驗數據來確定．單從理論上看來，k 是一個負數也可以，在實驗肯定了

$m(v) > m_0$ 後，始可決定 $k > 0$，決定了 k 後，我們據此變換式分析，可得時間空間相對性的結論． 這一部分將與特殊相對論得到的結果類似，此處不擬多談．

這樣的特殊相對論力學的理論基礎，是脫離"光速是常數"這個假定而建立的，無法把它與光速發生關係，所以討論只能限制於力學的範圍內． 但這個限制或許也是一種好處，因爲從推導步驟看來，要滿足力學相對性原理與牛頓第一定律的，只有這一種變換式． 如果以後我們對於光速的假定有所懷疑，我們却仍可肯定特殊相對論力學的正確性． 從本文的觀點出發，把光子與電學的理論暫置勿論，我們或可懷疑$\frac{1}{k} > C^2$，由此對於光子的靜止質量就不是一無所有了．