

半導體的電子生伏打效應的理論*

王 守 武

(中國科學院應用物理研究所)

一. 引 言

以高速電子注射到具有阻擋層的半導體光電池上,其效果和光線相類似,使光電池的兩極間產生電動勢。這種效應可稱為電子生伏打效應。這效應首先在 1937 年由 Becker 和 Kruppke^[1] 研究過,以後 Ehrenberg, 藍繼熹和 West^[2,3] 做了更有系統的測量。他們的測量結果表明,當電子注的能量逐漸增加時,光電池的電動勢(以下簡稱次級電動勢)最初很快地增加,達到一個極大值後又逐漸減少。相當於最大次級電動勢的電子注能量,對同一類光電池來說,往往變化很大。Ehrenberg 和藍繼熹認為,產生最大次級電動勢時,電子注打進半導體的深度應該約略等於阻擋層的厚度,因而發覺他們的結果和用測量電容方法所得到的阻擋層厚度不相符合。本文的計算結果表明,相當於最大次級電動勢的電子注打入深度並不等於阻擋層的厚度,而是約略等於被激發的少量載流者在半導體內部的擴散長度。因此,這理論是比較滿意地符合於他們的實驗結果的。

二. 必要的假設以及基本方程

為了簡單起見,我們首先假定光電池的半導體是空穴性的,阻擋層是發生在半透明金屬電極和空穴性半導體的接觸面附近¹⁾。同時,我們還忽略掉由於熱運動,電子從滿帶或金屬電極中被激發到導帶去的可能性。

在寫出基本方程之前,我們把這裏採用的符號說明如下:

我們假定在半透明金屬電極和半導體的接觸面處 $x = 0$, 半導體的厚度是 d , 因此 $x = d$ 處是半導體和另一金屬電極交界面。又令 u_+ 和 u_- 代表空穴和電子的遷移率; ϑ_+ 和 ϑ_- 代表它們的擴散係數。下面所提到的電勢和電場強度將都是它們的實際數字乘以 $\frac{e}{kT}$, 這樣可以使我們所用的,折合過的電勢成為無量綱的數字,而電場

*1955 年 10 月 29 日收到。

1) 計算的結果當然也適用於電子性半導體。

強度的量綱就變成 cm^{-1} 。現在令後面的金屬電極的電勢為零，半導體內部的電勢為 W ，前面半透明金屬電極的電勢為 V ，半導體內部的電場強度為 $Y = \frac{dW}{dx}$ 。

我們把所有各種載流者的密度都除以在沒有受電子轟擊的情況下，半導體內部距離阻擋層很遠的地方的空穴密度 ν ；這樣，我們便使折合過的代表空穴密度的 Z 和代表激發出來的自由電子的密度 N 都變成無量綱的數字。

我們以 j_+ 和 j_- 表示空穴流和電子流的密度。對它們的折合使它們的量綱變為 cm^{-1} ，其折合公式是：

$$B = j_+ / \nu \vartheta_+ \text{ 代表空穴流；}$$

$$B_- = j_- / \nu \vartheta_- \text{ 代表電子流；}$$

$$b = (j_+ - j_-) / \nu \vartheta_+ \text{ 代表總電流，}$$

在穩定情況下，它應該不隨 x 而變。

採用上面的符號，同時我們假定對激發的自由電子和空穴來講，遷移率和擴散係數間的愛因斯坦關係式依舊成立，我們得到電子和空穴的擴散方程：

$$\frac{dN}{dx} + NY + B_- = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dZ}{dx} - ZY + B = 0. \quad (2)$$

在考慮電子流的連續性方程時，我們首先假定，由電子注入半導體內的電子數目，比起被它們所激發的自由電子數目，要小得多而可以被略去，同時又假定在一定距離內被激發的自由電子數目是正比於射入電子在這距離內所消耗的能量。

設電子注在未入半導體之前的能量為 ϕ_0 電子伏，當電子進入半導體而達 x 處時，其能量為 ϕ 。按照 Thomson^[4] 和 Whiddington^[5] 所得的公式，我們假定：

$$\phi_0 - \phi^2 = \beta x, \quad \text{或} \quad \phi = \sqrt{\phi_0^2 - \beta x},$$

其中 β 是一個與半導體的密度有關的常數。因此，在 x 和 $x + dx$ 之間每個射入電子所耗損的能量應為：

$$-d\phi = \frac{\beta}{2\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} dx.$$

如果我們忽略射入電子的總數由於散射或吸收而逐漸隨 x 的增加而減少的因素，那末我們便可以假定在 dx 距離內被激發的自由電子總數正比於 $-d\phi$ 。因此，自由電子的連續性方程應為

$$\frac{dj_-}{dx} = \frac{a\beta}{2\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} - \frac{N\nu}{\tau},$$

其中 a 為一比例常數， τ 是自由電子的平均壽命。上式也可以寫成

$$\frac{dB_-}{dx} = \frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} - p^2 N, \quad (3)$$

其中

$$A = \frac{a\beta}{2\nu\vartheta_-}$$

是一個與半導體材料有關的常數，而 $\frac{1}{p} = \sqrt{\tau\vartheta_-}$ 是半導體內自由電子的擴散長度。我們必須注意，(3) 式只能當 $\phi_0^2 - \beta x > 0$ 時適用。當 $\phi_0^2 - \beta x < 0$ ，亦即 $x > x_m = \frac{\phi_0^2}{\beta}$ 時，(3) 式應改為

$$\frac{dB_-}{dx} = -p^2 N. \quad (4)$$

自由電子的平均壽命是和它與空穴的復合幾率有關。這些空穴可以是自由的或被雜質中心抓住的。如果我們考慮的是正常的阻擋層(不是反阻擋層)，那末在阻擋層內自由空穴的密度是很小，而且幾乎全部雜質中心是離子化的。因此，在這裏可以和自由電子進行復合的空穴數目是要比在阻擋層以外的地方少得多，這也就是說，阻擋層內的 p 的數值要比阻擋層外的小得多。所以我們下面將假定，在阻擋層內，(3) 或 (4) 式中最右面的一項 $-p^2 N$ 可以略去不計。這樣的近似也可以適用於阻擋層厚度比自由電子擴散長度小得多的情況下，因為這時在阻擋層內進行復合的自由電子數比起全部被激發的自由電子總數來要小得多。

關於邊界條件，我們將採取 Лашкарев^[6] 在計算光生伏打效應時所用的邊界條件。對空穴來說，我們假定在半導體和金屬電極接觸處的化學勢是連續的，因此

$$\ln Z_0 = \Delta_0 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 處}), \quad (5)$$

$$\ln Z_d = \Delta_d \quad (\text{在 } x=d \text{ 處}); \quad (6)$$

其中 Δ_0 和 Δ_d 是電勢在 $x=0$ 和 $x=d$ 處的跳躍。

對電子來說，邊界條件是

$$Q_0 N_0 + B_{-0} = 0 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 處}), \quad (7)$$

$$Q_d N_d - B_{-d} = 0 \quad (\text{在 } x=d \text{ 處}); \quad (8)$$

其中 Q 是電子的平均熱速度的垂直分量乘上接觸面對電子的透明度再除以 ϑ_- 。

現在，光電池兩電極間的電勢差應該是

$$V = \int_0^d Y dx + \Delta_0 - \Delta_d.$$

由 (2)，(5) 和 (6) 式可得：

$$V = \int_0^d \frac{B}{Z} dx = b \int_0^d \frac{dx}{Z} + \frac{u_-}{u_+} \int_0^d \frac{B_-}{Z} dx. \quad (9)$$

如果我們現在要計算的是開路時的次級電動勢，則 $b = 0$ ，因此得：

$$V = \frac{u_-}{u_+} \int_0^d \frac{B_-}{Z} dx. \quad (10)$$

假定由於電子注的轟擊所引起的空穴密度、電勢、電場等的改變都是很小，則我們可以採用直線近似法。令 w 、 y_k 和 z 代表沒有電子注轟擊時，在沒有電流的情況下，半導體內各處的電勢、電場強度和空穴密度；則根據玻耳茲曼方程我們有 $z = e^w$ 。使 $W = w + v$ ； $Y = y_k + y$ ； $Z = z + n$ 。把 v ， y ， n ， B_- 和 N 當作微小數字看待，而忽略它們的高次項，則 (1) 和 (10) 式可改寫為

$$\frac{dN}{dx} + \frac{dw}{dx} N + B_- = 0 \quad (11)$$

和

$$V = \frac{u_-}{u_+} \int_0^d \frac{B_-}{z} dx = \frac{u_-}{u_+} \int_0^d B_- e^{-w} dx. \quad (12)$$

將 (11) 式乘以 e^w 後可寫成

$$B_- e^w = - \frac{d}{dx} (N e^w). \quad (13)$$

現在我們假定半導體的厚度比電子注打入的深度、電子的擴散長度或阻擋層的厚度都要大得多，則可令 $d \rightarrow \infty$ ，而 $N_d \rightarrow 0$ ，因此 (13) 式的積分可寫為：

$$N e^w = \int_x^\infty B_- e^w dx. \quad (14)$$

方程 (3)，(4)，(11)，(12)，(14) 和邊界條件 (7) 是我們以下計算所用的基本方程。

三. 對次級電動勢的計算

我們所要計算的，主要是電子注的原先能量 ϕ_0 （以下簡稱初級電壓）與次級電動勢間的關係。在作詳細的具體計算之前，我們可以對初級電壓很大（快速電子）的極端情況先作一個粗略的估計。當初級電壓很大，也就是當電子注打入半導體的深度 $x_m \left(= \frac{\phi_0^2}{\beta} \right)$ 遠超過阻擋層的厚度時，射入電子在阻擋層內所耗損的能量是很小的。因此在阻擋層內被激發的自由電子很少，而流過阻擋層內各點的電子流也就幾乎都相等。如果我們考慮的是正常的阻擋層，則 $w < 0$ ，由 (12) 式容易看出次級電動勢是大致上正比於流過阻擋層的電子流 B_{-0} 的¹⁾。現在我們可以用下面的方法來估計 B_{-0} 。

在 x 和 $x + dx$ 之間，在單位時間內，被激發的自由電子總數是

1) 對反阻擋層來說，我們從 (12)，(14) 式和邊界條件 (7) 也可以看出次級電動勢還是大致上正比於 B_{-0} 。

$$\frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} dx.$$

這些電子在流向阻擋層的途中是有可能與空穴進行復合的。因此當它們到達阻擋層時，尚未被復合的自由電子總數大致上是正比於

$$\frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} e^{-px} dx.$$

把上式對 x 積分，它將近似地代表流過阻擋層的電子流。我們得：

$$B_{-0} \approx - \int_0^{x_m} \frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} e^{-px} dx. \quad (15)$$

令
$$\frac{\phi_0^2}{\beta} - x = x_m - x = \frac{t^2}{p},$$

則 (15) 式可改寫為：

$$B_{-0} \approx - \frac{2A}{\sqrt{p\beta}} e^{-px_m} \int_0^{\sqrt{px_m}} e^{t^2} dt = - \frac{2A}{\sqrt{p\beta}} \psi(\sqrt{px_m}); \quad (16)$$

其中函數

$$\psi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

是已經由 Карпов^[7] 計算列成表格。(16) 式表明在初級電壓很大的極端情況下，次級電動勢應該正比於 $\psi(\sqrt{px_m})$ 。這個結論和以下詳細計算中所得到的結果完全一致[見下面 (41) 式]。

從[7]中可以看到， $\psi(\sqrt{px_m})$ 的極大值是在 $\sqrt{px_m} = 0.924$ 的附近。如果自由電子的擴散長度 $\frac{1}{p}$ 比阻擋層的厚度大得多，那末當 $\sqrt{px_m} = 0.924$ 時， x_m 也已經比阻擋層的厚度大得多。在這種情況下，實際次級電動勢的極大值也就應該在 $\sqrt{px_m} = 0.924$ 時出現。這個條件相當於 $x_m = 0.854 \left(\frac{1}{p} \right)$ 。換句話說，當電子注打入半導體的深度為自由電子的擴散長度的 85% 時，次級電動勢為最大。

現在讓我們再來作比較詳細的計算，計算分兩部分進行：

(甲) 當電子注打入半導體的深度 x_m 小於阻擋層的厚度 s 時，我們的自由電子連續性方程成為：

$$\frac{dB_-}{dx} = \frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} \quad \text{當 } x < x_m, \quad (17)$$

$$\frac{dB_-}{dx} = 0 \quad \text{當 } s > x > x_m, \quad (18)$$

$$\frac{dB_-}{dx} = -p^2 N \quad \text{當 } x > s, \quad (19)$$

$$\text{由 (17) 式得} \quad B_- = -\frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} + C \quad \text{當 } x < x_m, \quad (20)$$

$$\text{由 (18) 式得} \quad B_- = C' \quad \text{當 } s > x > x_m. \quad (21)$$

把 (19) 和 (11) 兩式合併，並注意到當 $x > s$ 時， $\frac{dw}{dx} = 0$ ，我們不難得到：

$$B_- = C_1 e^{-px} + C_2 e^{+px} \quad \text{當 } x > s. \quad (22)$$

這裏 C, C', C_1 和 C_2 都是積分常數。它們是要靠 B_- 的連續性和邊界條件來決定的。我們必須注意，單從 (17) 式來看，當 $x \rightarrow x_m$ 時， $\frac{dB_-}{dx}$ 是趨向於無限大的。但是， B_- 的值在 $x = x_m$ 一點上仍然必須是連續的。這是因為 $\frac{dB_-}{dx}$ 之所以趨向於無限大，只是由於我們採用了 Thomson-Whiddington 公式並且作了一些近似的假設所致。實際上 $\frac{dB_-}{dx}$ 在 $x \rightarrow x_m$ 時只能成為很大，却不可能成為無限大。因此 B_- 在這點上必須是連續的，但是它的導數可以很大，而且滿足自由電子連續性方程的要求。

考慮了 B_- 的連續性以及當 $x \rightarrow \infty$ 時， B_- 應該趨近於零的條件，我們很容易得到：

$$C_2 = 0; \quad C = C' = C_1 e^{-ps}. \quad (23)$$

再從 (14) 式得到：

$$N_0 e^{w_0} = \int_0^\infty B_- e^{w} dx = - \int_0^{x_m} \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{w} dx + C_1 e^{-ps} \left\{ \frac{1}{p} + \int_0^s e^{w} dx \right\}.$$

將上式代入邊界條件 (7)，我們就得到：

$$C_1 = \frac{p e^{ps}}{1 + p \gamma_0 + p \int_0^s e^{w} dx} \left\{ \int_0^{x_m} \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{w} dx + \frac{2A}{\beta} \phi_0 \gamma_0 \right\};$$

其中 $\gamma_0 = \frac{e^{w_0}}{Q_0}$ 是一個常數。把這裏得到的 C_1 代入 (20), (21), (22) 和 (23) 式中，就可以把 B_- 完全確定下來。然後代入 (12) 式，就可以得到次級電動勢：

$$V = -\frac{u_-}{u_+} \left\{ \int_0^{x_m} \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{-w} dx - \frac{1 + p \int_0^s e^{-w} dx}{1 + p \gamma_0 + p \int_0^s e^{w} dx} \left[\int_0^{x_m} \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{w} dx + \frac{2A}{\beta} \phi_0 \gamma_0 \right] \right\}. \quad (24)$$

(乙) 當電子注打入半導體的深度 x_m 大於阻擋層的厚度 s 時，我們的自由電子連續性方程成為：

$$\frac{dB_-}{dx} = \frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} \quad \text{當 } x < s, \quad (25)$$

$$\frac{dB_-}{dx} = \frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}} - p^2 N \quad \text{當 } s < x < x_m, \quad (26)$$

$$\frac{dB_-}{dx} = -p^2 N \quad \text{當 } x > x_m. \quad (27)$$

上面的 (25) 和 (27) 式是和前一種情況下的 (17) 和 (19) 式完全相同, 因此我們得到:

$$B_- = -\frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} + C \quad \text{當 } x < s, \quad (28)$$

$$B_- = C_1 e^{-px} \quad \text{當 } x > x_m. \quad (29)$$

把 (26) 式和 (11) 式合併, 同時注意到 $\frac{dw}{dx} = 0$, 我們得到

$$\frac{d^2 B_-}{dx^2} - p^2 B_- = \frac{A\beta}{2} (\phi_0^2 - \beta x)^{-3/2} = \frac{A}{2\sqrt{\beta}} (x_m - x)^{-3/2}. \quad (30)$$

上式的一般解式應為

$$B_- = C'_1 e^{-px} + C'_2 e^{+px} + B'_-(x); \quad (31)$$

其中 C'_1 和 C'_2 是積分常數, 而 $B'_-(x)$ 是 (30) 式的一個特殊解. 求 B'_- 的方法可以先假定它可以寫成 $(x_m - x)$ 的指數級數, 然後再來決定級數中的係數. 這樣, 我們得到:

$$B'_- = -\frac{2A}{\sqrt{\beta}} (x_m - x)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4n+1)!} [4p(x_m - x)]^{2n}. \quad (32)$$

在這種情況下, 單靠 B_- 在 $x = x_m$ 這點上的連續性還不能決定 C'_1 , C'_2 和 C_1 之間的關係. 我們必須注意, 首先 N 在任何一點是必須連續的, 否則 B_- 將成為無限大. 由於 N 的連續性, 從 (26) 和 (27) 式我們可以看到, 在 $x = x_m$ 的兩面, $\frac{dB_-}{dx}$ 的跳躍應該是 $\frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}}$ (雖然 $\frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}}$ 本身在 $x = x_m$ 處趨向無限大). 同時由 (32) 式不難證實, 當 $x \rightarrow x_m$ 時, $\frac{dB'_-}{dx}$ 正好也趨近於 $\frac{A}{\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}}$. 因此我們可以斷定, $C'_1 e^{-px} + C'_2 e^{+px}$ 和 $C_1 e^{-px}$ 在 $x = x_m$ 這一點上不但本身應該相等, 而且它們的導數也應相等. 這也就是說:

$$C'_2 = 0; \quad C'_1 = C_1. \quad (33)$$

決定 C 和 C_1 的關係可以利用 B_- 在 $x = s$ 處的連續性. 經過一些具體計算不難得到:

$$C = C_1 e^{-ps} - \frac{2A}{\sqrt{\beta}} (x_m - s)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4n+1)!} [4p(x_m - s)]^{2n}.$$

最後，在決定 C_1 時，和前一種情況一樣，我們利用 (14) 式和邊界條件 (7)，經過和前一種情況相類似的計算，我們得到：

$$\begin{aligned}
 C_1 e^{-ps} = & \frac{p}{1+p\gamma_0+p\int_0^s e^{\omega} dx} \left\{ \int_0^s \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{\omega} dx + \frac{2A}{\beta} \phi_0 \gamma_0 \right\} \\
 & + \frac{p\gamma_0 + p\int_0^s e^{\omega} dx}{1+p\gamma_0+p\int_0^s e^{\omega} dx} \left\{ \frac{2A}{\sqrt{\beta}} (x_m - s)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(4n+1)!} [4p(x_m - s)]^{2n} \right\} \\
 & + \frac{1}{1+p\gamma_0+p\int_0^s e^{\omega} dx} \left\{ \frac{2A}{\sqrt{\beta}} (x_m - s)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(4n+3)!} [4p(x_m - s)]^{2n+1} \right\} \quad (34)
 \end{aligned}$$

從 (28), (29), (31), (32), (33) 和 (34) 式中，我們把 B_- 完全確定下來。然後代入 (12) 式，經過整理之後，我們得到：

$$\begin{aligned}
 V = & -\frac{u_-}{u_+} \left\{ \int_0^s \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{-\omega} dx - \right. \\
 & - \frac{1+p\int_0^s e^{-\omega} dx}{1+p\gamma_0+p\int_0^s e^{\omega} dx} \left[\int_0^s \frac{2A}{\beta} \sqrt{\phi_0^2 - \beta x} e^{\omega} dx + \frac{2A}{\beta} \phi_0 \gamma_0 \right] \\
 & \left. - \frac{\int_0^s e^{\omega} dx - \int_0^s e^{-\omega} dx + \gamma_0}{1+p\gamma_0+p\int_0^s e^{\omega} dx} \left[\frac{2A}{\sqrt{\beta}} (x_m - s)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} [-4p(x_m - s)]^n \right] \right\} \quad (35)
 \end{aligned}$$

用泰勒級數不難證明，上式中的無窮級數可以寫成下列形式：

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} [-4p(x_m - s)]^n &= \frac{e^{-p(x_m - s)}}{\sqrt{p(x_m - s)}} \int_0^{\sqrt{p(x_m - s)}} e^{t^2} dt - 1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{p(x_m - s)}} \psi(\sqrt{p(x_m - s)}) - 1.
 \end{aligned}$$

現在，我們再把符號改變一下，令

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = ps, \quad y = \sqrt{\frac{x_m}{s}} = \frac{1}{\sqrt{\beta s}} \phi_0, \quad \delta = \frac{\gamma_0}{s}, \\
 V_0 = \frac{2As^{3/2}}{\sqrt{\beta}} \frac{u_-}{u_+}, \quad (36)
 \end{aligned}$$

這裏 ε 是阻擋層厚度與擴散長度之比， δ 和 V_0 都是與初級電壓無關的常數， y 却直接正比於初級電壓。同時我們再把對距離 x 的積分都改成對無量綱數字 $t = \frac{x}{s}$ 的

積分,並且使

$$E = \int_0^1 e^{-w} dt = \frac{1}{s} \int_0^s e^{-w} dx, \quad (37)$$

$$F = \int_0^1 e^{w} dt = \frac{1}{s} \int_0^s e^{w} dx. \quad (38)$$

這樣, E 和 F 只和阻擋層內勢壘的形式有關, 而和初級電壓無關. 我們要計算的次級電動勢與初級電壓的關係現在就成為 V 與 y 的關係. 應用上面的一些符號, (24) 和 (35) 式可寫為:

$$V = -V_0 \left\{ \int_0^{y^2} (y^2 - t)^{\frac{1}{2}} e^{-w} dt - \frac{1 + \epsilon E}{1 + \epsilon(\delta + F)} \left[\int_0^{y^2} (y^2 - t)^{\frac{1}{2}} e^{w} dt + y\delta \right] \right\} \quad \text{當 } y < 1, \quad (39)$$

$$V = -V_0 \left\{ \int_0^1 (y^2 - t)^{\frac{1}{2}} e^{-w} dt - \frac{1 + \epsilon E}{1 + \epsilon(\delta + F)} \left[\int_0^1 (y^2 - t)^{\frac{1}{2}} e^{w} dt + y\delta \right] - \frac{E - F - \delta}{1 + \epsilon(\delta + F)} \left[\sqrt{y^2 - 1} - \frac{\psi(\sqrt{\epsilon(y^2 - 1)})}{\sqrt{\epsilon}} \right] \right\} \quad \text{當 } y > 1. \quad (40)$$

我們不難看出, 當 $y \gg 1$ 時, (40) 式變為

$$V = -\frac{V_0}{\sqrt{\epsilon}} \frac{E - F - \delta}{1 + \epsilon(\delta + F)} \psi(\sqrt{\epsilon} y). \quad (41)$$

上式中 ψ 前面的係數都是與 y 無關的常數. 因此我們可以說, 當 $y \gg 1$ 時, V 正比於 $\psi(\sqrt{\epsilon} y) = \psi(\sqrt{px_n})$. 這結果和前面的粗略估計完全一致.

四. 數字計算以及和實驗數據的比較

為了和實驗數據相比較, 我們考慮一個正常的阻擋層, 也就是說, $w < 0$. 這種情況下, 當 ϵ 不太大時, (39) 式所表示的 V 的絕對值一般都是一個 y 的單調上升函數, 而我們要和實驗數據比較的却總是在次級電動勢的極大值的附近. 因此, 下面的具體數字計算是主要對 (40) 式而作的.

假設阻擋層是蕭脫基形式的, 亦即

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x}{s} \right)^2 = w_0 (1 - t)^2.$$

又設阻擋層內勢壘的高度為 0.5 電子伏, 則 $w_0 = -20$, 我們得

$$E = 1.25 \times 10^7, \quad F = 0.198.$$

為了計算 (40) 式內的兩個積分, 當 y 比 1 大許多時, 我們可以把 $(y^2 - t)^{1/2}$ 展成級數, 得

$$(y^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}} = y - \frac{\epsilon}{2y} - \frac{\epsilon^2}{8y^3} - \frac{\epsilon^3}{16y^5} - \dots$$

如果我們只取這級數的前四項¹⁾代入 (40) 式, 則得

$$-\frac{V}{V_0} = \frac{1}{2y} D_1 + \frac{1}{8y^3} D_2 + \frac{1}{16y^5} D_3 + D_4 \psi(\sqrt{\epsilon(y^2-1)}); \quad (42)$$

其中

$$D_1 = \frac{1+\epsilon E}{1+\epsilon(\delta+F)} \left[\frac{1}{2w_0} (1 - e^{-w_0}) - \delta \right] - \frac{1}{2w_0} (e^{-w_0} - 1), \quad (43)$$

$$D_2 = \frac{1+\epsilon E}{1+\epsilon(\delta+F)} \left[\frac{1}{2w_0} (2 - e^{-w_0}) - \frac{F}{2w_0} - \delta \right] - \frac{E}{2w_0} - \frac{1}{2w_0} (e^{-w_0} - 2), \quad (44)$$

$$D_3 = \frac{1+\epsilon E}{1+\epsilon(\delta+F)} \left[\frac{1}{2w_0} (3 - e^{-w_0}) - \frac{1}{2w_0^2} (1 - e^{-w_0}) - \frac{3F}{2w_0} - \delta \right] - \frac{3E}{2w_0} - \frac{1}{2w_0} (e^{-w_0} - 3) - \frac{1}{2w_0^2} (e^{-w_0} - 1), \quad (45)$$

$$D_4 = \frac{E-F-\delta}{\sqrt{\epsilon} [1+\epsilon(\delta+F)]}. \quad (46)$$

現在假定電子的遷移率為 1—100 厘米²/秒·伏, 則 Q_0 為 10^8 — 10^6 . 如果阻擋層的厚度為 10^{-5} — 10^{-6} 厘米, 則 δ 總在 10^{-8} 和 10^{-12} 之間, 因此在具體計算中 δ 都是可以被略去不計的.

把 E , F 和 w_0 的具體數字代入 (43), (44), (45) 和 (46) 式, 並且取 ϵ 為 1, 0.3, 0.1 和 0.01 四個不同數值, 相應的 D_1 , D_2 , D_3 和 D_4 就很容易求得. 再代入 (42) 式就得到 $-V/V_0$ 的數值. 當 $y < 1.3$ 時, 我們用數字積分的方法來求 (40) 式中的兩個積分. 最後的結果表示在圖 1 中. 從這圖中可以看出, 在阻擋層厚度, 勢壘高度以及其他外來因素不變的情況下, 電子的擴散長度愈長 (ϵ 愈小), 則最大次級電動勢就愈大, 而相當於最大次級電動勢的初級電壓也愈大.

如果把圖 1 中各條曲線的比例尺改變一下, 使橫坐標代表 $\sqrt{\epsilon} y$, 縱坐標代表 $-V/D_4 V_0$. 這樣所得的結果表示在圖 2 中. 這裏還畫出了, 當 $\epsilon \rightarrow 0$ 時, $-V/D_4 V_0$ 對 $\sqrt{\epsilon} y$ 的極限關係. 這關係由 (41) 式表示. 這裏可以看到, 當 $\epsilon = 0.01$ 時, $-V/D_4 V_0$ 對 $\sqrt{\epsilon} y$ 的關係已經非常接近於這極限關係. 換句話說, 當 $\epsilon = 0.01$ 時, (41) 式已經是一個非常好的近似式. 此外, 我們從圖 2 還可以看到, 當 ϵ 從 1 變到 0 時, 曲線最高峯的橫坐標大約從 1.1 變到 0.9. 換句話說, 最高峯的橫坐標一直保持在 1

1) 當 $y = 1.3$ 時, 只取前四項所引起的誤差小於 1.5%.

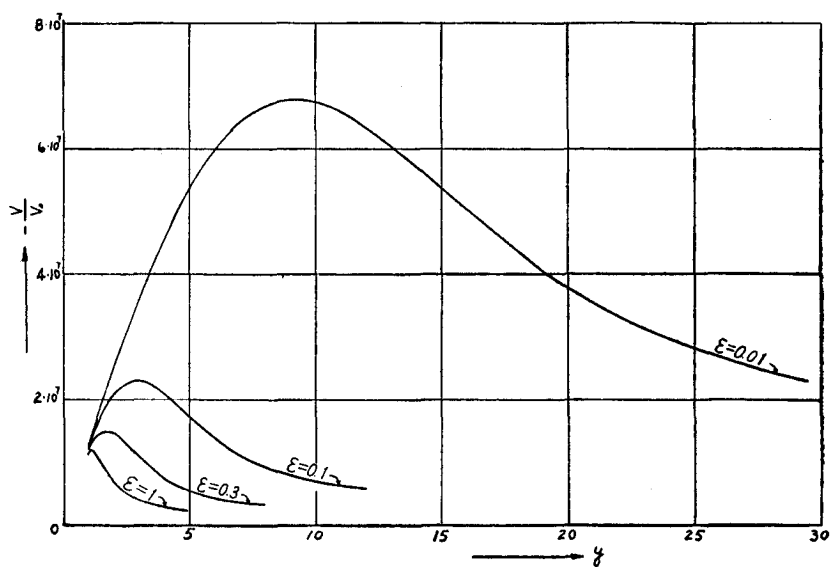


圖 1

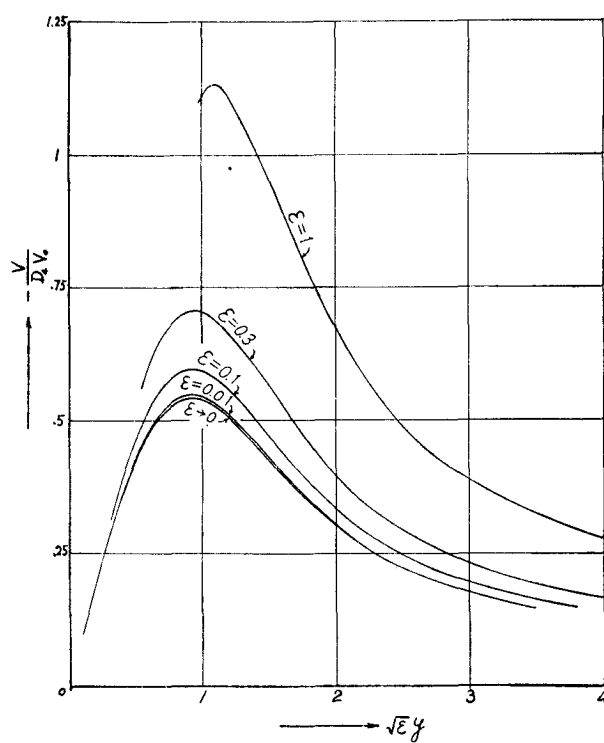


圖 2

的附近。這也就是說，次級電動勢最大時，電子注打入半導體的深度約略等於激發電子的擴散長度。

為了便於和實驗數據作比較，我們再把所得曲線的比例尺改變一下，使橫坐標代表 $y/y_{\max}$ (也就是初級電壓和相當於最大次級電動勢的初級電壓之比)，縱坐標代表 $V/V_{\max}$ (也就是次級電動勢和其極大值之比)。這裏 $\varepsilon = 0.1$ 和 $\varepsilon = 0.01$ 的曲線基本上和 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的極限曲線沒有區別，因此我們只畫上了極限曲線。實驗數據經過換算後也表示在圖 3 中，圈點代表 [2] 中所給的數據¹⁾，叉點代表藍繼熹未曾發表的數據。雖然

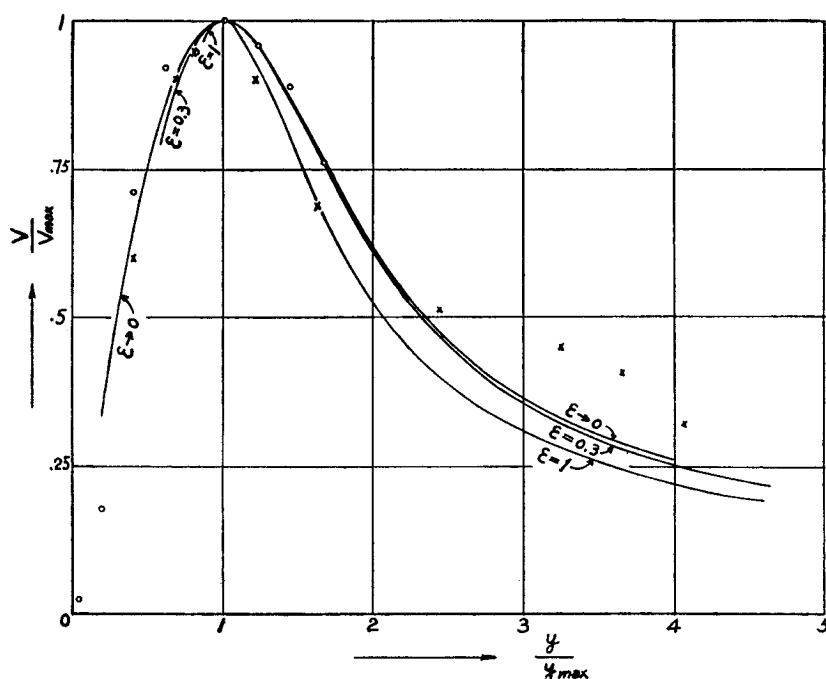


圖 3

這些實驗數據實際上量的並不是次級電動勢，而是次級電流（在光電池的兩極上接上一定的負載電阻後通過線路的電流），但是如果產生的次級電動勢相當小時，次級電流是正比於次級電動勢的。由於我們只作相對數值的比較，這些實驗數據是可以適用的。

在圖 3 中可以看到， ε 愈大，理論曲線的高峯愈尖。對實驗數據來講，圈點所代表實驗的最大次級電動勢是出現在初級電壓為 50 千伏附近，而叉點所代表實驗的最大次級電動勢却出現在初級電壓為 12 千伏附近。所用的光電池都是硒光電池。根

1) 原來數據所畫的曲線並不經過原點，這可能是因為電子注穿過半透明金屬電極需要消耗一部分能量，因此我們這裏所畫的圈點，已經作了適當的修正。

據 Terrill^[8] 的公式, 硒的 β 應該等於 1.92×10^{12} 伏²/厘米。這樣, 相當於 50 千伏初級電壓的 x_m 為 1.3×10^{-3} 厘米, 而相當於 12 千伏的 x_m 為 7.5×10^{-5} 厘米; 前者比一般硒光電池的阻擋層厚度大了兩個數量級, 而後者雖然也比一般硒光電池的阻擋層厚度大一些, 但是基本上還是屬於同一數量級。因此, 和圈點數據相應的 ϵ 約為 0.01, 而和叉點數據相應的 ϵ 則在 1 附近。從圖 3 中也可以看到, 圈點比較接近 $\epsilon \rightarrow 0$ 的曲線, 而叉點比較接近 $\epsilon = 1$ 的曲線。這表明理論是和實驗結果一致的。

從圖 3 中還可以看到, 在高峯右邊比較遠的地方, 叉點數據比相應的理論曲線高出了許多。這種現象並不是只出現在這一套數據上。把藍繼熹的其他未發表數據來和理論曲線相比, 次級電動勢在通過高峯之後的降落一般都是比理論所得的慢。這個理論和實驗的分歧可以用以下的原因來說明: 當外來高速電子在半導體的導帶和滿帶中激發出一對電子和空穴時, 在穩定的開路狀態下, 如果這些電子和空穴不能即時復合, 那末它們必須向同一方向移動, 因為總電流是零。當它們流過阻擋層的時候, 就必然使阻擋層的兩邊產生一個電勢差, 這也就是次級電動勢, 它的絕對值可以用電子流(或空穴流)乘上阻擋層的電阻來表示。因此, 通過阻擋層的次級電子流愈大, 次級電動勢也就愈大。另一方面, 電子注打入半導體的深度愈大, 產生的總的次級電子數目當然也愈大。所以在起始的時候, 次級電動勢隨着電子注打入的深度迅速增加。但是當電子注打入的深度達到自由電子的擴散長度時, 有一部分被激發的次級電子在還沒有達到阻擋層的時候已經和空穴復合了。因此通過阻擋層的電子流開始下降, 次級電動勢也就開始下降。如果電子注打入的深度大大地超過了自由電子的擴散長度, 那末大部分的次級電子都在還沒有達到阻擋層的半途中和空穴復合了, 因此次級電動勢就可以變得很小。在我們的理論計算中, 我們忽略了每一個外來電子在中途被散射而吸收的可能, 並且假定它的能之散逸都是正比於 $1/\sqrt{\phi_0^2 - \beta x}$, 換句話說, 它的能量主要是消耗在 x_m 附近。但是實際上有些電子由於散射而改變了運動的方向, 因此使它們的能量主要消耗在深度比 x_m 小得多的地方。這樣, 有一些按照我們的假設應該在 x_m 附近被激發的自由電子, 實際上却出現在深度比 x_m 小得多的地方。因此, 這些電子能流過阻擋層的幾率要比理論計算所得的大得多。這就說明了為什麼實際的次級電動勢的降落要比理論計算所得的慢。

五. 結 語

上面的計算和討論, 我們可以歸結為下列幾點:

1. 理論上, 次級電動勢的最大值應該出現在電子注打入的深度約略等於自由電子

擴散長度的時候。因此，對次級電動勢的測量可以用來決定少量載流者的擴散長度。

2. 當自由電子擴散長度比阻擋層的厚度大得多的時候，次級電動勢在理論上應該正比於 $\psi(\sqrt{\epsilon} y) = \psi(\sqrt{px_m})$ 。

3. 如果光電池的材料，阻擋層的形式和厚度以及電子注的其他外來因素都不變，則自由電子的擴散長度愈長，最大次級電動勢也愈大，而次級電動勢曲線的最高峯却愈平坦。

4. 實驗數據和理論曲線的比較大致上相符，但是次級電動勢在經過高峯之後實際的降落一般比理論的慢。

最後，作者在本文中引用了藍繼熹同志的一些未發表的數據，並且還得到他的幫助和討論，特在此向他致謝。

參 考 文 獻

- [1] Becker, A. und Kruppke, E., *Z. Phys.* **107** (1937), 474.
- [2] Ehrenberg, W., Lang, C. S. (藍繼熹) and West, R., *Proc. Phys. Soc.* **A 64** (1951), 424.
- [3] Ehrenberg, W. and Lang, C. S. (藍繼熹), *Physica*, **20** (1954), 1137.
- [4] Thomson, J. J., *Conduction of Electricity through Gases*, p. 375, Cambridge: University Press, 1906.
- [5] Whiddington, R., *Proc. Roy. Soc.* **A 86** (1912), 360.
- [6] Лашкарев, В. Е., *ЖЭТФ* **18** (1948), 917.
- [7] Карпов, К. А., *Таблицы Функции $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в Комплексной Области*, Москва: Изд. АН СССР, 1954.
- [8] Terrill, H. M., *Phys. Rev.* **22** (1923), 101.

THE THEORY OF ELECTRON VOLTAIC EFFECT IN SEMICONDUCTOR

WANG SHOU-WU

(Institute of Applied Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The electron voltaic effect of semiconductor was first studied by Becker and Kruppke (see ref. 1) and later by Ehrenberg, Lang and West (see ref. 2 & 3). They found that the e.m.f. developed on the photo element under the bombardment of electron beam increases at first rapidly with accelerating voltage, reaches a maximum and then decreases. The accelerating voltage corresponding to the maximum e.m.f. developed on the cell was found to be various from cell to cell. In this paper a detailed theory of electron voltaic effect was developed under the assumption that the primary current of the electron beam is so small that a linear approximation may be used. The Thomson-Whiddington law is used for getting the energy dissipation of the electron beam in semiconductor. The results of the present theory show that the e.m.f. developed on the cell appears a maximum, when the depth for which the incident electrons penetrate into the semiconductor is of the same order of the diffusion length of the excited electrons, rather than the thickness of the barrier layer. The numerical calculation is carried out for some typical examples and the results are discussed and compared with the experimental data.