

調頻訊號的一些特性*

林爲幹

(華南工學院電訊工程學系)

一. 引言

在調頻制中調頻電流的方程爲

$$i = I_{m_0} \sin \left(2\pi f_0 t + \frac{\Delta f_0}{F} \sin 2\pi F t \right);$$

或者, 將此式展成包含載頻及旁頻的形式如下:

$$i = I_{m_0} \left\{ J_0 \left(\frac{\Delta f_0}{F} \right) \sin 2\pi f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\Delta f_0}{F} \right) \left[\sin 2\pi (f_0 + nF) t + (-1)^n \sin 2\pi (f_0 - nF) t \right] \right\}, \quad (1)$$

其中 f_0 是載頻, F 是調制頻率, Δf_0 是調制頻率偏移, 決定於調制訊號的振幅而與調制頻率 F 無關, $J_n(x)$ 是第一種第 n 階的貝塞耳函數. 如取下面的記號:

$$M_f = \frac{\Delta f_0}{F}, \quad (2)$$

則由 (1) 式可見調頻訊號電流的特性完全決定於 $J_n(M_f)$ 作為 n 和 M_f 的函數的特性. 以下我們將從 $J_n(x)$ 的特性出發, 找出調頻制電流的一些有用的特性.

下列的展式是衆所週知的:

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \theta} &= \cos(x \sin \theta) + j \sin(x \sin \theta) = \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta + 2j \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)\theta; \end{aligned} \quad (3)$$

如將 (3) 的實數和虛數部分分開, 然後分別乘以 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$, 再取自 0 至 π 的積分, 則由正弦函數的正交性, 可以得到

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta \quad \text{如 } n = 0, 2, 4 \dots, \quad (4)$$

*1955 年 9 月 10 日收到.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\theta \sin(x \sin \theta) d\theta \quad \text{如 } n = 1, 3, 5 \dots; \quad (5)$$

如將 (4) 及 (5) 兩式相加，即得到

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad \text{如 } n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots. \quad (6)$$

由 (6) 式可見，

$$J_n(x) \leq 1 = J_0(0). \quad (6a)$$

即是說，調制中所有的旁頻振幅都比無調制時的載頻振幅小。又由 (4) 及 (5) 兩式，我們可以認為 $J_{2p}(x)$ 和 $J_{2p+1}(x)$ (p 是整數) 分別是 $\cos(x \sin \theta)$ 和 $\sin(x \sin \theta)$ 作為 θ 的函數時的傅里葉級數的係數。因為任一有界可積函數的傅里葉係數隨着 n 趨於無限大而趨於零，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0, \quad (7)$$

可知調頻制中旁頻的振幅最終是要衰減至零值的。又如衆所週知的，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = 0, \quad (8)$$

故可見在 $J_n(M_f)$ 式中， M_f (調頻指數) 可以取任意值： M_f 可以比 1 大，亦可以比 1 小。其實，由貝塞耳函數的漸近式

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}v\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (9)$$

即貝塞耳函數的“衰減正弦形式”特性， v 為任意實數，可見當 M_f 增加時，所有的旁頻振幅 $J_v(M_f)$ 都減小。以下我們將這些概念進行更精確的分析。

二. 調頻訊號的頻譜分佈

我們以前已經指出^[1]：當 $n = M_f$ 時 $J_n(n)$ 代表一個臨界旁頻的振幅，在此臨界旁頻之外的旁頻的振幅迅速地降低，故調頻訊號的主要能量集中在臨界旁頻之內，如圖 1

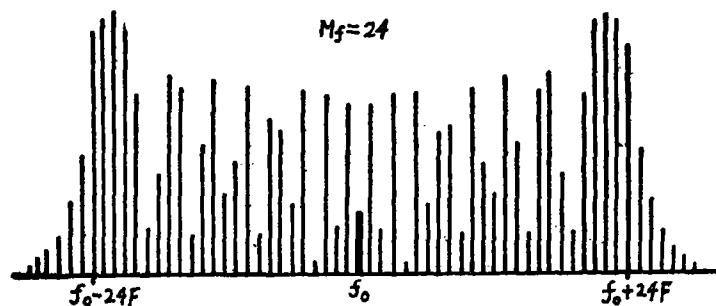


圖 1. 調頻訊號頻譜振幅絕對值的分佈

的一個調頻訊號頻譜振幅絕對值分佈圖所示。由此圖又可見訊號的能量是離開載頻向兩旁集中。我們自然要問：最大旁頻在什麼地方出現？它的值有多大？利用貝塞耳函數的近似表示法^[2]，可以解決這一個問題。令

$$J_v(x) = w/\sqrt{x},$$

又令

$$q^2 = v^2 - \frac{1}{4}, \quad q = \sqrt{v^2 - \frac{1}{4}}, \quad v \geq \frac{1}{2}, \quad (10)$$

則

$$w(x) = \frac{Ae^{\pm i\phi}}{\sqrt[4]{1 - (q/x)^2}}, \quad \Phi = \int^x \sqrt{1 - (q/x)^2} dx \quad (11)$$

在臨界旁頻之內， $x \geq q$ ，故令

$$q = x \cos \beta, \quad (12)$$

則

$$\Phi = q(\tan \beta - \beta). \quad (13)$$

將 (12) 及 (13) 式代入 (11) 式的前一個，如 x 趨於無限大，則 (11) 式應與 (9) 式相當，即是說，當 $x \rightarrow \infty$ 時， $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ；而

$$q = x \cos \beta$$

保持有限值時，(11) 式即應轉變為 (9) 式，由此即可定出常數 A 。最後，

$$\left. \begin{aligned} J_v(x) \pm j N_v(x) &\sim \frac{\cos \vartheta \pm j \sin \vartheta}{\sqrt{\frac{\pi q}{2} \tan \beta}}; \\ \vartheta &= q(\tan \beta - \beta) - \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} (q - v) \pi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

此 (14) 式即是我們所需要的貝塞耳函數近似式：

$$J_v(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi q}{2} \tan \beta}} \cos \vartheta.$$

此式早經通過應用 Kelvin 的駐相位法求出^[3]，我們這裏將介紹另一種求法^[2]（見附錄）。

近似地，我們可以認為 $J_v(x)$ 的最大值發生於

$$\cos \vartheta = 1 \text{ 即 } \vartheta = 0, \pi, 2\pi; \quad (15)$$

而 $J_v(x)$ 的最大值是

$$\left\{ J_v(x) \right\}_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi q}{2} \tan \beta_{\max}}}. \quad (16)$$

為了要從 (15) 式中解出 v 的值，假設 q 和 x 相差不大，即 β 的值不大，故可取 $\tan \beta$ 的展式以得到

$$\tan \beta - \beta = \beta^3/3,$$

由 (14) 式即可解出 β :

$$\beta = \left(\frac{3}{q} \right)^{1/3} \left[9 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (q - v) \pi \right]^{1/3}.$$

又當 β 不大時, 由 (12) 式取餘弦函數級數展式的前兩項, 即得到

$$\beta^2 = 2 \left(1 - \frac{q}{x} \right).$$

比較這兩個式子, 即可解出

$$x = q + \frac{1}{2} \sqrt[3]{9 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (v - q) \pi}^2 \sqrt[3]{q}.$$

此時, 設 $\tan x \cong x$, 由 (16) 式得 $J_v(x)$ 的最大值

$$\begin{aligned} \left\{ J_v(x) \right\}_{\max} &\cong \frac{1}{\sqrt{\pi q/2}} \beta_{\max}^{-1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \left(\frac{3}{q} \right)^{-1/6} \left[9 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (q - v) \pi \right]^{-1/6}. \end{aligned}$$

由這最後一個式子可見最大的最大 $J_v(x)$ 值發生於 $\vartheta=0$ 時; 又當 v 相當大時, 可設

$$q = v,$$

故最大的最大旁頻發生於

$$x = v + \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{3/2} \sqrt[3]{v}.$$

如以 $J_{v_{\max}}(x)$ 代表 $x = M_f$ 固定時的最大的最大旁頻振幅, 則

$$\begin{aligned} J_{v_{\max}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi v_{\max}}} \left(\frac{3}{v_{\max}} \right)^{-1/6} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-1/6} = 0.674 v_{\max}^{-1/3} = \\ &= 0.674 \left[x - 0.886 x^{1/3} \right]^{-1/3}. \end{aligned} \quad (17)$$

為了確定此最大旁頻的位置, 即是說, 為了要求出此 v_{\max} 的值, 令

$$v = x - \delta = x \left(1 - \frac{\delta}{x} \right), \quad \frac{\delta}{x} \ll 1,$$

並代入下列表示式中:

$$x = v + b \sqrt[3]{v}, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{3\pi}{4} \right)^2} = 0.866,$$

將 $(1 + \delta/x)^{1/3}$ 用二項式定理展開, 略去 $(\delta/x)^2$ 以上的項, 即可解出 δ , 從而得出

$$\begin{aligned} v_{\max} &= x - bx^{1/3}, \\ v_{\max} &= x - 0.886 x^{1/3}. \end{aligned} \quad (18)$$

在圖 2 中我們把 (18) 式繪成曲線, 如果用一條直線逼近這曲線, 則我們得到這

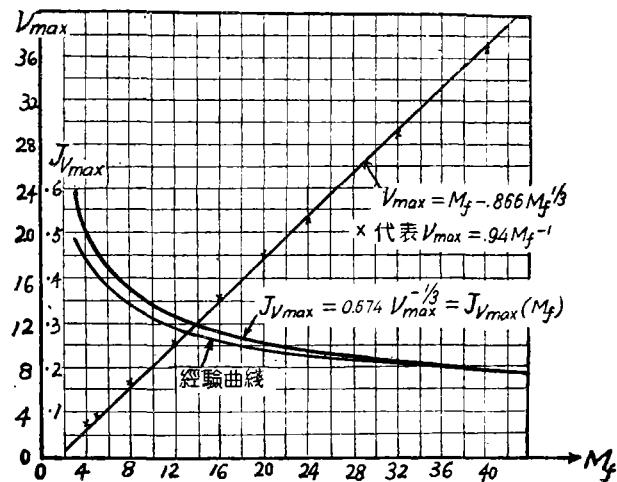


圖 2. 最大的最大旁頻振幅的值和它的位置

條直線的方程為

$$v_{\max} = 0.94 M_f - 1.$$

這也就是在文獻 [10] 中已經出現過的一個直接用查表的方法得出來的經驗公式。在同一圖上還繪有最大的最大旁頻振幅的值 ((17) 式)，在這條曲線之下我們作出一條經驗曲線：從貝塞耳函數表中直接讀出來的當 x 固定時最大的最大 $J_n(x)$ 值（例如當 $x = 20$ ，從表中可見當 $n = 18$ 時 $J_n(x)$ 取最大值 0.2511）。由這兩條曲線，可見當 x 相當大時它們是相當接近的。

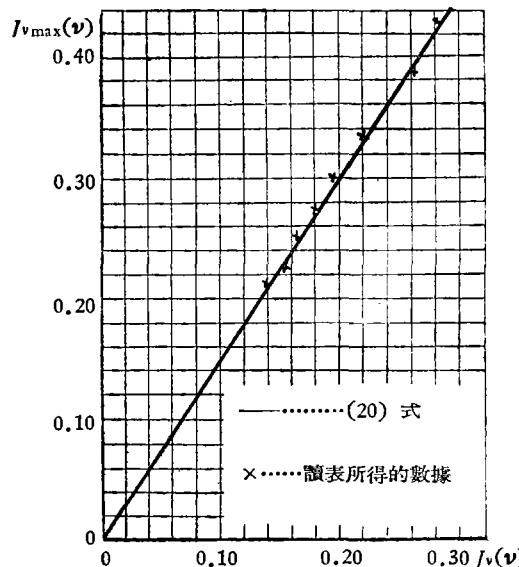


圖 3. 最大的最大旁頻振幅與臨界旁頻振幅間的關係

從 (18) 式我們可以找出最大的最大旁頻與臨界旁頻的距離：

$$v_{\text{臨}} - v_{\max} = 0.866 x^{1/3}. \quad (19)$$

其次臨界旁頻振幅對最大旁頻振幅的比值也可以求出，譬如說，我們已知臨界旁頻的振幅是^[11]

$$J_v(v) = 0.4473 v^{-1/3},$$

如取此式與 (17) 式的比值，即得到臨界旁頻振幅與最大的最大旁頻振幅之間的直線關係如下：

$$J_{V_{\max}}(v) = 1.511 J_v(v) \quad (20)$$

在圖 3 上我們繪出這一關係曲線，在這曲線上我們還標出直接從貝塞耳函數表中讀

出來的數據。

從圖 1 可以看到除了 (17) 式所給出的最大的最大旁頻振幅值外，還有其他的次級最大值。這些次級最大值的個數究竟有多少呢？如果從 (15) 式來解決這個問題是會遇到困難的。近似地，我們可以利用 (9) 式。用此式來確定貝塞耳函數的根的漸近位置是相當準確的，所以我們相信用此式來決定調頻訊號臨界旁頻內振幅最大值的個數也會相當準確的。由 (9) 式， $J_v(x)$ 的最大值發生於

$$x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

當 x 固定， v 變動時上式仍然給出 $J_v(x)$ 獲有最大值的條件，即是說， $J_v(x)$ 的最大值發生於 (x 固定)：

$$v = \frac{2}{\pi} \left(x - m\pi - \frac{\pi}{4} \right), \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

如果 v 代表旁頻的階數，則 v 不取負值，所以

$$m \leq \frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}.$$

即是說， m 所能取的最大值是

$$m = \frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}.$$

但我們可以見到，每對應一個 m 值我們有一個 $J_v(x)$ 的最大值，而每一個 $J_v(x)$ 的最大值相當於兩個旁頻；另一方面， m 又可以取零值，故可見如以 n_0 代表臨界旁頻內的最大旁頻總數（最大的最大旁頻和次級的最大旁頻的總數），則

$$n_0 \leq 2(m + 1) = \frac{2}{\pi} x + 1.5$$

或者

$$n_0 \leq 0.637 M_f + 1.5. \quad (21)$$

三. 調頻所需的頻譜寬度

雖然調頻訊號包含有無數個旁頻，但是我們已知在臨界旁頻之外的旁頻振幅是迅速地減低，故訊號的主要能量是集中在臨界旁頻以內；而由 (20) 式可見，臨界旁頻振幅則僅為最大旁頻振幅的 66.4%，加以最大的最大旁頻振幅本身較之無調制時的載頻振幅又要小得多，譬如，由 (17) 式知當 $v_{\max} = 27$ 時（相當於 $M_f = 29$ ），最大旁頻振幅是無調制時載頻的 22.4%。所以，調頻制中所需的頻譜寬度只要是略為伸出臨界旁頻之外就可以得到完滿的通訊；即是說，我們只要保留臨界旁頻以外的不太小的若干個

旁頻，就可以得到滿意的通訊，但究竟需要幾個呢？爲了要解答這個問題，我們作出圖 4 的一族經驗曲線（直接從查表作出），這些曲線給出臨界旁頻以外的旁頻振幅對臨界旁

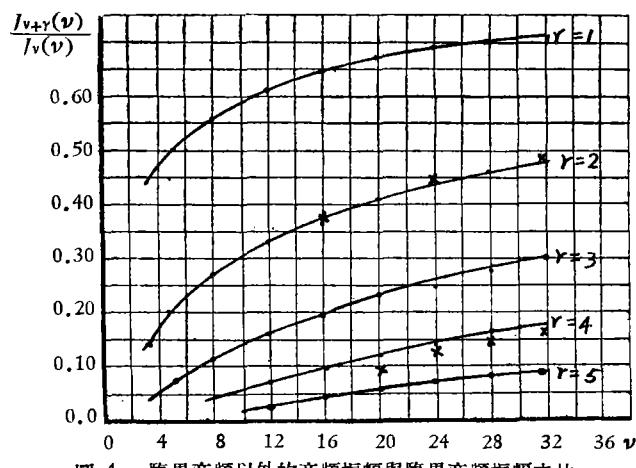


圖 4. 臨界旁頻以外的旁頻振幅與臨界旁頻振幅之比

—·—·—查表得來的值，×……(23) 式

頻振幅的比值作爲此臨界旁頻的階數 v 的函數。從此族曲線，如 $M_f = v$ 已定，又如最後一個保留旁頻的振幅不大於臨界旁頻振幅的百分數爲已知，則我們就可找出應保留臨界旁頻以外的旁頻數目 γ 。例如，給定此百分數爲 15%， $M_f = v < 12$ ，則取臨界旁頻外的三個旁頻 ($\gamma = 3$) 就夠了；但如 $M_f = v \leq 24$ ，則須取 $\gamma = 4$ ；又如 $M_f = v \leq 32$ ，則須取 $\gamma = 5$ 。如已知的是最後保留旁頻對最大旁頻振幅的百分數，則我們仍可以通過 (20) 式應用此圖 4。

從貝塞耳函數的近似表示式 (11) 出發，我們亦可以研究臨界旁頻以外的旁頻衰減情況，爲此我們要更換 (12) 式爲下式：

$$v = x \cosh \alpha. \quad (12a)$$

則 (11) 式可寫成

$$J_v(x) = \frac{A e^{\pm [v(\alpha - \tanh \alpha)]}}{\sqrt{v \tanh \alpha}};$$

現在我們的工作是求出常數 A 。從 (12a) 式，可見當 x 固定而 v 無限增加時， α 也要無限增加，故 $\tanh \alpha \rightarrow 1$ ，所以

$$J_v(x) \rightarrow \frac{A}{\sqrt{v}} e^{\pm [v(\alpha - 1)]}.$$

但我們已知^[11]，當 $v \rightarrow \infty$ 時

$$J_v(x) \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^v \frac{1}{v!} = \left(\frac{x}{2}\right)^v \frac{1}{\sqrt{2\pi v} v^v e^{-v}},$$

最後這一個式子是經過用史斗林公式代替 $v!$ 後得來的；又，當 $\alpha \rightarrow \infty$ 時

$$\frac{v}{x} = \cosh \alpha \rightarrow \frac{e^\alpha}{2}.$$

因而可得

$$J_v(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-v(\alpha-1)}.$$

亦即是說，

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

或者，最後得到

$$J_v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x \sinh \alpha}} e^{-v(\alpha-\tanh \alpha)}. \quad (22)$$

這一個漸近展開式就是文獻 [5] 上用最速下降法得到過的。為了求得 $J_{v+\gamma}(v)$ 的值，我們先求出 α ，

$$v + \gamma = v \cosh \alpha.$$

如果 $\gamma/v \ll 1$ ，則

$$1 + \frac{\gamma}{v} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

即

$$\alpha = \sqrt{2\gamma/v}.$$

又

$$\alpha - \tanh \alpha \cong \frac{\alpha^3}{3},$$

$$\sinh \cong \alpha.$$

將這些近似值代入 (22) 式後，

$$J_{v+\gamma}(v) = 0.337 \frac{1}{(\gamma v)^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{3} (2\gamma)^{3/2} \left(1 + \frac{\gamma}{v} \right) v^{-1/2} \right];$$

或者

$$\frac{J_{v+\gamma}(v)}{J_v(v)} = \frac{0.755}{\gamma^{1/4}} v^{1/12} \exp \left[-0.94 \gamma^{3/2} \left(1 + \frac{\gamma}{v} \right) v^{-1/2} \right]. \quad (23)$$

在圖 5 上我們把 (23) 式所給出的點表示出來，可見如果 γ 不太大 v 不太小時 (23) 式是相當準確的；當然，如果直接使用 (22) 式，則結果會更準確。

四. 結 論

從調頻訊號的第 n 個旁頻振幅等於 $J_n(M_f)$ 一事出發，我們從研究此 $J_n(M_f)$ 作為 n 和 M_f 的函數的性質得出一些調頻訊號的有用特性。利用一個貝塞耳函數的近

似表示法 (14)，我們發現了調頻訊號的一些新的特性：最大的最大旁頻的位置和最大的最大旁頻振幅值是完全確定的，如圖 3 所示。最大的最大旁頻振幅與臨界旁頻振幅之比也是一定的，如圖 4 所示。由 (21) 式還可以知道臨界旁頻以內的次級最大旁頻的總數目。利用這一個近似表示法的另一個形式 (22)，我們可以進行決定調頻訊號頻譜所需的寬度，或者，我們也可以利用一個經驗曲線族（圖 4）來解決這個問題。

附記：本文經華南工學院馮秉銓教授校閱，對他所提的寶貴意見謹表示謝意。

附 錄

貝 塞 耳 函 數 的 近 似 表 示 式

我們在這裏介紹 Schelkunoff 的一個方法^[2]。試取傳輸線方程¹

$$\frac{dV}{dx} = Z(x) I, \quad \frac{dI}{dx} = Y(x) V,$$

如消去 I 或 V ，即得到一個二階線性方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} - \frac{Z'}{Z} \frac{dV}{dx} - YZV &= 0, \\ \frac{d^2I}{dx^2} - \frac{Y'}{Y} \frac{dI}{dx} - YZI &= 0. \end{aligned}$$

如將這些方程與二階微分方程的如下一般形式相比較，

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0,$$

可見

$$\begin{aligned} \frac{Z'}{Z} &= -p(x), \quad Z(x) = \exp \left[- \int^x p(x) dx \right]; \\ YZ &= -q(x), \quad Y(x) = -q(x) \exp \left[\int^x p(x) dx \right]. \end{aligned}$$

如果採用下列兩個參數：

$$K(x) = \sqrt{Z(x)/Y(x)}, \quad \Gamma(x) = \sqrt{Z(x) Y(x)}.$$

則原來的傳輸線方程將取如下的形式：

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{dV}{dx} = KI, \quad \frac{1}{\Gamma} \frac{dI}{dx} = K^{-1} V.$$

這一對方程還可以更換成如下的形式：

$$\frac{dV}{du} = KI, \quad \frac{dI}{du} = K^{-1} V,$$

其中

$$u = \int^x \Gamma(x) dx.$$

如果消去 V 或 I , 即又得到

$$\frac{d^2V}{du^2} - \frac{K'}{K} \frac{dV}{du} - V = 0, \quad \frac{d^2I}{du^2} + \frac{K'}{K} \frac{dI}{du} - I = 0.$$

如果 K 是一恒量, 則 V 和 I 即可求出, 否則我們引入一新變數以除掉第一階微商項, 設

$$V = \sqrt{K} \bar{V},$$

則

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \left[1 + \frac{3(K')^2}{4K^2} - \frac{K''}{K} \right] \bar{V}.$$

如果 K' 和 K'' 對 K 來說不大, 則上式即可解出 (只保留方括號中的常數值), 最後可以寫成

$$V(x) \cong A \sqrt{Z/Y} \exp \left(\pm \int^x \sqrt{xy} dx \right). \quad (*)$$

如果我們有如下的二階方程:

$$y'' = -f(x)y,$$

則

$$Z(x) = 1, \quad Y(y) = -f(x), \quad K(x) = \left[-f(x) \right]^{-1/2}, \quad \Gamma(x) = i \int_0^x \sqrt{f(x)} dx,$$

故由 (*) 式, 得

$$y \cong \frac{A}{\sqrt{f(x)}} \exp \left[\pm i \int^x \sqrt{f(x)} dx \right]. \quad (**)$$

回到我們的貝塞耳方程:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0,$$

如果我們代入

$$y = w/\sqrt{x},$$

即得到

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \left(1 - \frac{v^2 - 0.25}{x^2} \right) w.$$

可見

$$f(x) = 1 - \frac{v^2 - 0.25}{x^2};$$

代入 (**) 式即得到 (11) 式.

參 考 文 獻

- [1] 林爲幹,貝塞耳函數的近似計算在調頻中的應用,物理學報, 11: 5 (1955), 411.
- [2] Schelkunoff, S. A., Applied Mathematics for Engineers and Scientists, § 20.6, 398; § 11.10, 208.
- [3] Watson, G. N., Theory of Bessel Functions, § 8.22, 288.
- [4] Заездный, А. М., О ширине спектра при частотной и фазовой модуляции, Радиотехника, 9: 3 (1954), 47.
- [5] Sommerfeld, A., Partial Differential Equations in Physics, § 21.35, 119.

SOME PROPERTIES OF THE FREQUENCY MODULATION SIGNAL

LIN WEI-KAN

(Department of Communication Engineering, South China Polytechnical Institute)

ABSTRACT

The fact that the amplitude of the n th order sideband of a frequency modulation signal is equal to $J_n(M_f)$ allows us to discover some useful properties of the frequency modulation signal. By means of an approximate expression of the Bessel function (14), we discover some new properties of the frequency modulation signal: The position and amplitude of the maximum maximum sideband are well defined, as shown in fig. 3; moreover, the ratio of the amplitude of this maximum maximum sideband to that of critical sideband is also known, as shown in fig. 4. The total number of secondary maxima of sidebands is given by (21). Utilizing another form of this same approximate expression of the Bessel function $J_n(x)$, we can proceed to determine the required width of frequency modulation spectrum for satisfactory transmission; for this purpose we may also use a family of empirical curves as shown in fig. 4.