

關於 Pb^{208} 附近一些原子核的能級*

于 敏

(中國科學院物理研究所)

一. 引 言

根據殼模型理論, Pb^{208} 是一個具有雙殼層的原子核. 1952 年普魯司^[1] 利用 $i-j$ 耦合理論, 計算了 Pb^{208} 附近的一些原子核的能級. 但是據估計, 一般地說組態混合是很利害的, 這一點說明了耦合理論的根據並不充分^[2]. 按說二個核子之間既然有很強的吸引力, 它們必然有更大的幾率靠近在一起, 這種位置上的相互關聯對於相對運動速度不大的兩個核子表現得更為明顯. 而在耦合理論中却完全忽略了這種位置的相互關聯.

本文將採用一種完全不同於耦合理論的方法計算 Pb^{208} 附近一些原子核的能級. 我們所採用的是布呂克納等人所提出來的一種觀念^[3], 這種觀念和耦合理論的根本區別就在於使用二體散射的反應矩陣元代替耦合理論中相當的矩陣元, 這樣就包括進去了兩個核子位置之間相互關聯的影響.

二. 基 本 觀 念

假設一個具有 $A+1$ 個核子的原子核, 它的哈氏函數是:

$$H_{A+1} = H_A + T_1 + v_1; \quad (1)$$

式中 H_A 是 A 個核子的哈氏函數, T_1 是第 $A+1$ 個核子的動能, $v_1 = \sum_i^A v_{1i}$ 是第 $A+1$ 個核子與其他核子的相互作用勢. 假設已知 H_A 的解: 本徵能是 $E_A^{(0)}$, $E_A^{(1)}$, $\dots$, 相當的本徵函數是 $\varphi_A^{(0)}$, $\varphi_A^{(1)}$, $\dots$. 做算符 f :

$$f = E_A + E - H_A - T_1 - V,$$

$$V = \langle v_1 \rangle + \left\langle v_1 \frac{1}{a} v_1 \right\rangle + \dots,$$

*1956 年 12 月 3 日收到.

$$a = E_A + E - H_A - T_1; \quad (2)$$

式中 E_A 是 H_A 的某一本徵值, 相當的本徵函數是 φ_A . $\langle \cdots \rangle$ 表示對於 φ_A 的平均, 例如

$$\langle v_1 \rangle \equiv \int \varphi_A^* v_1 \varphi_A d\tau_A,$$

$$\left\langle v_1 \frac{1}{a} v_1 \right\rangle \equiv \sum_i' \int \varphi_A^* v_1 \varphi_A^{(i)} d\tau_A \cdot \int \varphi_A^{(i)*} \frac{1}{a} \varphi_A^{(i)} d\tau_A \cdot \int \varphi_A^{(i)*} v_1 \varphi_A d\tau_A,$$

$\sum_i'$ 表示 $\varphi_A^{(i)} \neq \varphi_A$. (2) 式中的 $\frac{1}{a}$ 是 $\frac{Q}{a}$ 的簡寫, Q 是投影算符用來保證除去 $\varphi_A^{(i)} = \varphi_A$ 的項. (2) 式是很複雜的, 但是無論如何, f 對於 H_A 的態是一個對角方陣, 而 V 是一個只作用在第 $A+1$ 個核子上的和 E , E_A 及 φ_A 有關的厄米算符. 假設 φ_A 的自旋等於零, 那末不難看出 V 是一個標量勢. 以下我們就假設 E_A 和 φ_A 固定, 並且 φ_A 的自旋等於零.

假設 f 的本徵值是 $E_0, E_1, \cdots$, 相當的本徵函數是 $\varphi_A \psi_0, \varphi_A \psi_1, \cdots$. 選擇 E 使 f 的某一個本徵值等於零 (相當的本徵函數 $\varphi_A \psi$), 那末我們有

$$f \varphi_A \psi = 0,$$

即

$$(T_1 + V) \psi = E \psi; \quad (3)$$

取

$$\Phi = \left\{ 1 + \frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_1 \frac{1}{a} v_1 + \cdots \right\} \varphi_A \psi, \quad (4)$$

不難證明 Φ 是原來的哈氏函數 H_{A+1} 的一個解, 即

$$H_{A+1} \Phi = (E_A + E) \Phi. \quad (5)$$

在 (4) 中, $\frac{1}{a}$ 也是 $\frac{Q}{a}$ 的簡寫, 換言之, 當把 $\left(\frac{1}{a} v_1 \frac{1}{a} v_1 \cdots \right) \varphi_A \psi$ 展開成 H_A 的本徵函數的疊加時, 應當去掉含有 φ_A 的項.

因此, 我們可以說, (3) 式是 (5) 式的一個“等效獨立粒子問題”, V 是“等效平均勢”. 這個等效獨立粒子問題給出了 H_{A+1} 的本徵能. $\left\{ 1 + \frac{1}{a} v_1 + \cdots \right\}$ 相當於艾登^[4]等人所提出的模型因子. 如果 φ_A 的自旋等於零, 那末 V 是一個標量勢, ψ 具有一定的自旋和宇稱, 又因為模型因子是一個標量, 所以 ψ 的自旋和宇稱也就是 Φ 的自旋和宇稱 (假設 φ_A 的宇稱是正的), 即真正原子核能級的自旋和宇稱. 當然由於模型因子是一個很複雜的算符, 原子核能級的波函數 Φ 比 $\varphi_A \psi$ 複雜得多.

這裏需要注意 f 和 V 是一個和 E 有關的算符, 因此對於 H_{A+1} 的不同的能級,

一般地說,應當有不同的等效平均勢 V . 從這種觀點看起來,殼模型理論和實驗結果相當符合這一事實指明 V 對於 E 的變化是不敏感的. 爲了方便起見,我們以後就稱這一點爲殼模型假設. 在這個假設之下,這一等效平均勢 V 近似地給出了 H_{A+1} 的一部分能譜.

三. 近 似 方 法

我們的問題是: 假設已知 $A+1$ 原子核的兩個能級的“等效獨立粒子解”分別是

$$\left\{ H_A + T_1 + \langle v_1 \rangle + \left\langle v_1 \frac{1}{a_1} v_1 \right\rangle + \cdots \right\} \varphi_A \psi_1 = (E_A + E_1) \varphi_A \psi_1, \quad (6a)$$

$$\left\{ H_A + T_2 + \langle v_2 \rangle + \left\langle v_2 \frac{1}{a_2} v_2 \right\rangle + \cdots \right\} \varphi_A \psi_2 = (E_A + E_2) \varphi_A \psi_2. \quad (6b)$$

(在這裏,我們把第二個粒子的附碼標做 2), 求 $A+2$ 原子核能級的能量、自旋和宇稱. $A+2$ 原子核的哈氏函數是:

$$H_{A+2} = H_A + T_1 + T_2 + v_1 + v_2 + v_{12}, \quad (7)$$

式中 $v_1 = \sum_i^A v_{1i}$, $v_2 = \sum_i^A v_{2i}$ 分別是第一個核子或第二個核子與其餘 A 個核子的相互作用勢. 做算符

$$f = E_A + E - H_A - T_1 - T_2 - \langle v \rangle - \left\langle v \frac{1}{a} v \right\rangle - \cdots, \quad (8)$$

式中 $v = v_1 + v_2 + v_{12}$, $\langle \cdots \rangle$ 表示對 φ_A 的平均, $a = E_A + E - H_A - T_1 - T_2$.

選擇 E , 使 f 的某一本徵值 (相當的本徵函數是 $\varphi_A \psi(1, 2)$) 等於零, 即

$$f \varphi_A \psi(1, 2) = 0,$$

所以

$$\left\{ T_1 + T_2 + \langle v \rangle + \left\langle v \frac{1}{a} v \right\rangle + \cdots \right\} \psi(1, 2) = E \psi(1, 2), \quad (9)$$

不難證明 $E_A + E$ 是 H_{A+2} 的本徵值, 本徵函數是

$$\left\{ 1 + \frac{1}{a} v + \frac{1}{a} v \frac{1}{a} v + \cdots \right\} \varphi_A \psi(1, 2),$$

即

$$\begin{aligned} H_{A+2} \left\{ 1 + \frac{1}{a} v + \frac{1}{a} v \frac{1}{a} v + \cdots \right\} \varphi_A \psi(1, 2) &= \\ &= (E_A + E) \left\{ 1 + \frac{1}{a} v + \frac{1}{a} v \frac{1}{a} v + \cdots \right\} \varphi_A \psi(1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

因此,只要研究 (9) 式就可以得出 H_{A+2} 的能級.

現在將 (9) 式改寫成

$$\begin{aligned} (H_0 + v_{12}) \psi(1, 2) \equiv & \left\{ T_1 + \langle v_1 \rangle + \left\langle v_1 \frac{1}{a} v_1 \right\rangle + \cdots + \right. \\ & + T_2 + \langle v_2 \rangle + \left\langle v_2 \frac{1}{a} v_2 \right\rangle + \cdots + \sum_{i \neq j}^{1,2} \left\langle v_i \frac{1}{a} v_j \right\rangle + \cdots + \\ & \left. + v_{12} \right\} \psi(1, 2) = E \psi(1, 2); \end{aligned} \quad (11)$$

H_0 是一個只作用在 A 以外兩個核子上的算符. 在 H_0 中作用在兩個核子上的平均勢, 一般地說, 是不同於 (6a) 和 (6b) 中的平均勢的. 這種區別是由於兩個核子之間的間接的相互作用: 由於第二個核子的存在, 擾動了作用在第一個核子上的平均勢等等. 這種擾動屬於布呂克納^[3]等所謂“多體關聯”, 他們證明這種作用是比較小的, 這時作用在兩個核子上的平均勢和 (6a), (6b) 中的平均勢一樣^[3]. H_0 的解很簡單, 根據 (6a) 和 (6b),

$$H_0 \psi_1 \psi_2 = (E_1 + E_2) \psi_1 \psi_2. \quad (12)$$

利用 (12) 式, 再根據微擾理論^[5], 得 (11) 式中的

$$E = E_1 + E_2 + \Delta E.$$

上式中

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int \psi_1^* \psi_2^* K \psi_1 \psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \\ K &= v_{12} + v_{12} \frac{1}{e} v_{12} + \cdots; \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $e = E - H_0$, 在 $\frac{1}{e}$ 中取主值.

(13) 式是我們在下面要利用的基本公式, 它給出了 H_{A+2} 的能級.

K 本身依然是一個很複雜的算符, 我們必須採取適當的近似方法計算積分 (13).

根據微擾理論,

$$\psi(1, 2) = \psi(1) \psi(2) + \frac{1}{e} K \psi(1) \psi(2), \quad (14)$$

滿足方程 (11):

$$\{H_0 + v_{12}\} \psi(1, 2) = E \psi(1, 2).$$

在重原子核中, 通常認為 H_0 中的平均勢是位阱型的. 因為原子核的半徑比核力程長得多, 忽略位阱邊界的效果是合理的. 這時 K 便是一個和兩個核子的重心坐標無關的算符, 它的對角線矩陣元可以用二體散射的相移表示出來^[6] (見附錄 1):

$$\int Y_n^{m*}(\theta, \varphi) f_n(kr) K Y_n^m(\theta, \varphi) f_n(kr) d\tau = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\tan \eta_n(k)}{k}; \quad (15)$$

式中 r, θ, φ 是相對坐標； Y_n^m 是球面諧函數； $f_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ 是自由粒子的徑向波函數； $\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ 是相對運動動能； μ 是折合質量； $\eta_n(k)$ 是軌道角動量為 n 時的相移。這裏假定 v_{12} 是中心力，如果 v_{12} 含有非中心力，那末相移將和總角動量（自旋加軌道角動量）有關係，(15) 式應稍加修改。

注意，在這裏我們應用了兩點假設：第一是上面已提到的忽略位阱邊界的影響；第二是在原子核中，因為泡利原理的關係， K 算符中所包含的許多中間態被禁阻，而在二體散射問題中，因為附近不存在其他核子，所以一切中間態都是可能的，因此即使在 R 很大的情況下，只要原子核的密度不等於零，這裏的 K 算符也並不完全和二體散射中的反應矩陣一樣。本文暫不討論這兩點近似的正確性，而將從這些假定出發，推得原子核的一些能級，由實驗事實來檢驗本文所採用方法的優劣。

四. 計 算 公 式

上一節的結果表明，假設已知 $A+1$ 原子核的能級，便可以利用二體散射的相移計算 $A+2$ 原子核的能級。在本節中將給出計算公式。

假設 $A+1$ 原子核的某兩個能級的波函數 ψ_1, ψ_2 分別為

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\frac{2k_0^2}{R}} \sum_{m_1, v_1} C_{n_1 m_1, v_1}^{j_1 m_{j_1}} Y_{n_1}^{m_1}(\hat{r}_1 z) f_{n_1}(k_0 r_1) \chi_{v_1}(1), \\ \psi_2 &= \sqrt{\frac{2k_0^2}{R}} \sum_{m_2, v_2} C_{n_2 m_2, v_2}^{j_2 m_{j_2}} Y_{n_2}^{m_2}(\hat{r}_2 z) f_{n_2}(k_0 r_2) \chi_{v_2}(2); \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $f_n(k_0 r)$ 是軌道角動量為 n 的自由粒子的徑向波函數， $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ 是核子的動能，因為 $A+1$ 原子核的兩個能級的動能相差甚小，所以我們把它們都取做 $\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ 。 C 是克雷佈西-荷當係數； Y_n^m 是球面諧函數； $\hat{r}_1 z$ 表示 $\mathbf{r}$ 的極坐標的角度 θ 和 φ ； χ_v 是自旋波函數； $\sqrt{\frac{2k_0^2}{R}}$ 是 $f_n(k_0 r)$ 的歸一化因子。我們在這裏採用了當 R 很大時 $f_n(k_0 r)$ 的歸一化因子。對於鉛附近的原子核來說，當 $n \leq 3$ 時，這是很好的近似；當 $n = 5$ 時，這個值略小一些，實際上應當再乘以 ~ 1.08 。不過因為我們一直應用 R 很大的假定，所以這裏仍舊一律採用上面的歸一化因子。

由 (16) 式的兩個波函數可以組合成總角動量為 J 的波函數 ψ ：

$$\psi = \frac{2k_0^2}{R} \sum_{m_1 m_2 \nu_1 \nu_2} C_{i_1 m_1 + \nu_1, i_2 m_2 + \nu_2}^{J0} C_{n_1 m_1, i_1 \nu_1}^{i_1 m_1 + \nu_1} C_{n_2 m_2, i_2 \nu_2}^{i_2 m_2 + \nu_2} \times \\ \times Y_{n_1}^{m_1}(\hat{r}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{r}_2 z) f_{n_1}(k_0 r_1) f_{n_2}(k_0 r_2) \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2). \quad (17)$$

將 ψ 改變成重心坐標和相對坐標的波函數（見附錄 2），得：

$$\psi = \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{R} \int_0^{2k_0} K dK \sum_{N n L S} (i)^{N+n-n_1-n_2} \times \\ \times \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)} U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} \times \\ \times \left\{ \frac{\sqrt{2N+1}}{2L+1} \sum_{m_1' m_2'} C_{N0, nm_1'+m_2'}^{L m_1'+m_2'} C_{n_1 m_1', n_2 m_2'}^{L m_1'+m_2'} \times \right. \\ \times Y_n^{m_1'+m_2'}(0,0) Y_{n_1}^{m_1'}\left(\frac{K}{2k_0}, 0\right) Y_{n_2}^{m_2'}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right) \Big\} \times \\ \times \left\{ \sum_{M m \nu_1 \nu_2} C_{LM+m, S \nu_1+\nu_2}^{J0} C_{NM, nm}^{LM+m} C_{i_1 \nu_1, i_2 \nu_2}^{S \nu_1+\nu_2} \times \right. \\ \times f_n(kr) f_N(KR) Y_n^m(\hat{r}z) Y_N^M(\hat{R}z) \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2) \Big\}. \quad (18)$$

式中 $\mathbf{R}$ 是重心坐標， $\mathbf{r}$ 是相對坐標。 K 是重心運動波數， k 是相對運動波數， $\frac{K^2}{4} + k^2 = k_0^2$ 。

(18) 式包含三個因子： $\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)}$ U 是 $j-j$ 耦合和 $L-S$ 耦合的變換係數^[7]；第二個括弧中的函數是重心運動和相對運動的 $L-S$ 耦合函數；第一個括弧所包的因子是兩種 $L-S$ 耦合之間的變換係數。

$A+2$ 原子核能級的能量

$$E = E_1 + E_2 + \Delta E,$$

E_1 和 E_2 是 $A+1$ 原子核能級的能量。根據 (13) 式，

$$\Delta E = \int \psi^* K \psi d\tau_1 d\tau_2.$$

將 (18) 式代入 (13) 式，再利用 (15) 式，經過化簡，得：

$$\Delta E = - \frac{16\pi^4 \hbar^2}{\mu R^2} \sum_{L S n m} \int_0^{2k_0} (2j_1+1)(2j_2+1)(2S+1) \times$$

$$\times \left| U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} \left\{ \sum_{m'} C_{n_1 m', n_2 m-m'}^{L m} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Y_n^m(0, 0) Y_{n_1}^{m'}\left(\frac{K}{2k_0}, 0\right) Y_{n_2}^{m-m'}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right) \right\} \right|^2 \frac{\tan \eta_n(k)}{k} dK. \quad (19)$$

注意,這裏要利用 $\int_0^K f_N(KR) f_N(K'R) R^2 dR = \frac{\pi}{2K^2} \delta(K-K')$, 這一點只有當 R 大時才正確。

當兩個核子同是質子(或中子)的時候,應當把 ψ 反對稱化, 其結果等於在 (18) 式中再乘上 $\frac{1}{\sqrt{2}} (1+(-1)^{n+s})$ 因子, 也就是說波函數 ψ 不包含 ${}^3S, {}^1P, \dots$ 部分, (19) 式中相應地多了一個 $\frac{1}{2} (1+(-1)^{n+s})^2$ 因子。但是當 $n_1 = n_2, j_1 = j_2$ 的時候, 如果 J 是奇數, (18) 式的 ψ 本身是對稱的, 所以這樣的態不存在; 如果 J 是偶數, ψ 本身自然是反對稱的, 這時不需要再乘其他因子。

五. 關於 Po^{210} 的能級

Po^{210} 比雙殼層原子核 Pb^{208} 多兩個質子, 比 Pb^{208} 多一個質子的原子核是 Bi^{209} , Bi^{209} 是最重的一個穩定同位素。

根據測量 Bi^{209} 基態的自旋是 $9/2$, 我們取它做 $h_{9/2}$. 在 $4n+1$ 放射系中, 半衰期為 3.2 小時的 Pb^{209} 衰變到 Bi^{209} 的基態, 因此不能從這裏得出關於 Bi^{209} 激發態的知識。因為 Pb^{208} 和 Bi^{209} 都是穩定原子核, 所以 $\text{Pb}^{208}(d, n)$ 、 $\text{Bi}^{209}(n, n')$ 實驗可以給我們關於 Bi^{209} 能級圖的知識。後一類實驗已有很多人作過^[8], 他們或者測量非彈性散射中子的能量, 或者測量剩餘核所放 γ 射線的能量。結果如圖 1。關於激發能級的自旋和宇稱, 目前還不能肯定。但 $\text{Bi}^{209}(n, n' \gamma)$ 實驗表明 1.5 百萬電子伏能級通過 γ 放射直接衰變到基態, 所以它的自旋 J_2 可能滿足下列關係:

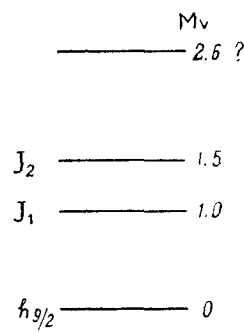
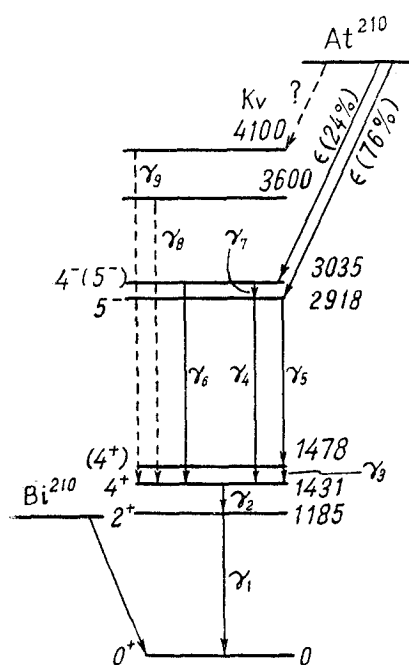


圖 1. Bi^{209} 的能級圖

$$|J_2 - J_1| > \left| J_2 - \frac{9}{2} \right|.$$

基恩^[7]等利用費西巴哈 (Feshbach) 理論分析非彈性中子散射截面的結果, 認為 1.0 能級可能是 $f_{7/2}$. 根據殼模型理論, 再考慮到上面所提到的 J_2 和 J_1 之間的關係, 1.5

圖 2. Po^{210} 的能級圖

能級很可能是 $i_{13/2}$ 。

$4n+2$ 天然放射系的 Bi^{210} 直接衰變到 Po^{210} 的基態, 所以不能直接給我們關於 Po^{210} 激發能級的知識。米海利西^[9]等利用 60" 迴旋加速器所產生的 α 粒子轟擊 Bi^{209} , 製得 At^{210} 的樣品, At^{210} 的半衰期是 8.3 小時, 主要經過電子俘獲衰變到 Po^{210} 的激發態, 圖 2 是他們給出的能級圖。

這裏我們特別討論一下能級 1478 的自旋。米海利西等認為這條能級的自旋是 4, 他們的根據是 $(\gamma_4 \gamma_5)$ 和 γ_2 的角關聯實驗。根據他們的實驗結果, 三條 γ 射線所牽扯到的四條能級最可能的自旋是 5-4-4-2, 但由於實驗精確度的限制, 也並不能排除 5-6-4-2 這一可能性。照我們看起來, 後一解釋也許更好些, 因為: (1) 假設 1478 能級的自旋是 4^+ , 那末, 一般地說, γ_3 將主

要是 M1 輻射, 但由 L 內變換比看起來, 它是 E2, 這一點符合於 1478 能級的自旋是 6^+ 的假定; (2) 如果 1478 能級的自旋是 4^+ , 那麼, 一般地說, 應當觀測到能量為 1557 的一條 γ 射線 ($3035 - 1478$), 強度和 γ_6 相類似, 但是實驗上並未發現這一條 γ 射線, 這一點也符合 6^+ 的假定。

我們的理論結果也指出這條能級的自旋和宇稱似是 6^+ (見下節)。

六. 理論結果和討論

我們利用公式 (19) 計算了 Po^{210} 的最低的幾個能級, ψ_1 和 ψ_2 都取做 $h_{9/2}$ 。

(19) 式中的 $R = 9 \times 10^{-13}$ 厘米, 相當於 $r_0 = 1.5 \times 10^{-13}$ 厘米。 (19) 式中的 k_0 取做 $1.4 \times 10^{+13}$ 厘米⁻¹, 相當的動能 $E \sim 40$ 百萬電子伏。 假設勢阱是無限高的, 那末 k_0 滿足 $f_5(k_0 R) = 0$, $k_0 \sim 1.1 \times 10^{+13}$ 厘米⁻¹, 因此把 k_0 取做 $1.4 \times 10^{+13}$ 也許過大。 一般地說, 減小 k_0 , ΔE 將加大, 但是 ΔE 對 k_0 不敏感, 就是將 k_0 取做 $1.1 \times 10^{+13}$, ΔE 也不過增加百分之幾。

我們所用的是費西巴哈和婁曼^[10]所給的相移, 這組相移可以統一地解釋從 0 到 280 百萬電子伏的全部散射實驗數據。 在這組相移中, 只有 1S_0 和 3P_0 的相移比較

大(由於泡利原理, 3S_1 波不存在), 其餘的相移都很小, 在我們的計算中可以忽略. 又在我們所討論的情形下, 波函數 ψ 中不包含 3P_0 波. 這一點可以從宇稱和角動量方面的考慮看出來: 兩個核子的總自旋 $\mathbf{S}$ 加上相對運動的軌道角動量 $\mathbf{n}$ 和重心運動的軌道角動量 $\mathbf{N}$ 應當等於總角動量 $\mathbf{J}$, 即

$$\mathbf{S} + \mathbf{n} + \mathbf{N} = \mathbf{J}.$$

對於 3P_0 波, $\mathbf{S} + \mathbf{n} = 0$, 所以 $N = J$. 因為 J 是偶數, 所以 N 也是偶數. 又相對運動的宇稱 $(-1)^n$ 和重心運動的宇稱 $(-1)^N$ 之積應當等於兩個核子的波函數的宇稱之積, 在我們討論的情形下, 這個積是正的. 所以 n 是奇數的 3P_0 波不可能存在. 因此在這裏所討論的情形中, 問題變得很簡單, 我們只要考慮獨態 S 波的相移就够了.

費西巴哈和婁曼所給的獨態 S 波的相移在 30 百萬電子伏以下符合 $n-p$ 散射獨態的散射長度和有效力程. 當然他們所給的相移在 30 百萬電子伏以上的部分並不見得是完全可靠的, 但是這一點對我們所得結果沒有什麼很大影響. 這是由於兩個核子在相對運動能量低時的相互作用很強, 所以在 (19) 式的積分中, 主要貢獻來自 k 小的部分 ($\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} < 15$ 百萬電子伏的部分貢獻百分之六、七十以上).

這裏應當指出, 我們用的是 $n-p$ 散射獨態 S 波相移. 所以在這裏我們應用了核力與電荷無關的假設, 並且也忽略了質子-質子之間庫倫力的作用. 事實上由於庫倫力的屏蔽作用, 將會顯著地減小 S 波的相移 (能量愈低, 減小愈多). 不過這種影響和前面所提到的歸一化因子的影響 (見第四節) 是相反的, 如果適當地考慮它們, 可能不會顯著地改變本文的結果.

計算結果如圖 3 所示. 我們覺得有兩點是值得注意的. 第一, 理論指出 0-2 兩能級之間能量相差很大, 2、4、6 等能級比較接近, 並且能級間距愈來愈小, 這是由於只有獨態 S 波的相移起作用, 而 $J=0$ 的態包含獨態 S 波的幾率最大. 這一點和實驗結果相符合. 第二, 在計算中, 幾個參數可以變化的範圍很小 (例如 R , k_0 等), 因此比通常的耦合理論 (在那裏常常

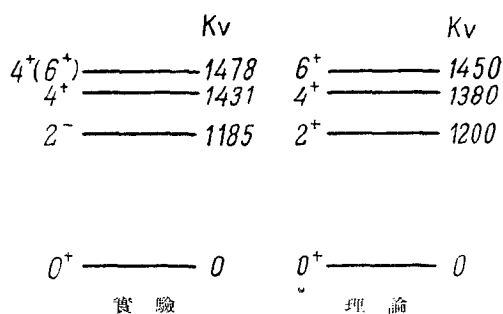


圖 3. Po^{210} 的能級圖. 在計算中, 取原子核半徑 $R=1.5 A^{1/3} \times 10^{-13}$ 厘米, 在 6^+ 以上還應有一條 8^+ 能級. 這個能級的角動量很大, 所以實驗上不容易觀測出來

任意的選擇相互作用勢的強度, 力程, 形狀等) 較少任意性. 而我們所得結果在能量

絕對值上和實驗結果相當符合，這似乎是值得注意的現象。假設我們取一個可以給出獨態 S 波散射長度和有效力程的具有通常形狀的勢，並用耦合理論計算 Po^{210} 的能級，那末所得到的 ΔE 將比實驗值小得多。

鑒於本文所採用的方法在理論基礎上有很多未經證實的猜測，因此應當十分慎重地做出任何結論。目前則還應做更多的計算並和實驗比較，這一部分工作還在繼續中。

附 錄 1.

我們可以利用摩梯-麻塞書上的方法^[11] 推導 (15) 式。

波函數

$$\psi = Y_n^m \left(1 + \frac{P}{E-T} K \right) f_n(kr) \quad (1.1)$$

滿足波動方程(這裏假設 v 是中心力)

$$(T+v)\psi = E\psi, \quad (1.2)$$

式中 T 是動能算符。

當 r 很大時

$$f_n(kr) \rightarrow \frac{1}{2ikr} (e^{ik\rho} - e^{-ik\rho}), \quad (1.3)$$

式中 $k\rho = kr - \frac{n\pi}{2}$ 。而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E-T} K f_n(kr) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{2}{\pi} \int \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu}} \frac{1}{2ik'r} (e^{ik'\rho} - e^{-ik'\rho}) k'^2 dk' \langle f_n(k'r) | K | f_n(kr) \rangle = \\ & = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \langle f_n(kr) | K | f_n(kr) \rangle \frac{1}{2r} (e^{ik\rho} + e^{-ik\rho}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

另一方面，根據 (1.2)，當 r 很大時

$$\psi \rightarrow Y_n^m A_n \sin(k\rho + \eta_n) = Y_n^m A_n \frac{e^{i\eta_n} e^{ik\rho} - e^{-i\eta_n} e^{-ik\rho}}{2ikr}, \quad (1.5)$$

式中 η_n 是相移。

比較 (1.3)、(1.4) 和 (1.5) 式，得

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\cos \eta_n} \\ \langle f_n(kr) | K | f_n(kr) \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\tan \eta_n}{k}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

附 錄 2.

可以用下面方法求得 (18) 式.

假設兩個粒子的動量分別為 $\hbar \mathbf{k}_1$ 和 $\hbar \mathbf{k}_2$, 那末它們的總動量 $\hbar \mathbf{K} = \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, 相對運動動量 $\hbar \mathbf{k} = \frac{\hbar}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$. 茲將兩個粒子的波函數改寫成相對運動的形式, 有

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; \quad (2.1)$$

式中 $\mathbf{R}$ 是重心坐標, $\mathbf{r}$ 是相對坐標.

將上式兩邊展開, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n_1} i^{n_1} (2n_1 + 1) P_{n_1}(\widehat{k_1 r_1}) f_{n_1}(k_0 r_1) \sum_{n_2} i^{n_2} (2n_2 + 1) P_{n_2}(\widehat{k_2 r_2}) f_{n_2}(k_0 r_2) = \\ = \sum_n i^n (2n + 1) P_n(\widehat{k r}) f_n(k r) \sum_N i^N (2N + 1) P_N(\widehat{K R}) f_N(K R); \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中 $\widehat{k_1 r_1}$ 表示 k_1 和 r_1 之間的夾角, 這裏假設 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 的絕對值相等 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k_0$. 利用關於勒琴德多項式的加法定理:

$$P_n(\widehat{k r}) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_m Y_n^{m*}(\widehat{k z}) Y_n^m(\widehat{r z}), \quad (2.3)$$

其餘類推.

將 (2.3) 代入 (2.2) 得:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 m_1 m_2} (i)^{n_1+n_2} Y_{n_1}^{m_1*}(\widehat{k_1 z}) Y_{n_2}^{m_2*}(\widehat{k_2 z}) Y_{n_1}^{m_1}(\widehat{r_1 z}) Y_{n_2}^{m_2}(\widehat{r_2 z}) f_{n_1}(k_0 r_1) f_{n_2}(k_0 r_2) = \\ = \sum_{N n M m} (i)^{N+n} Y_n^{m*}(\widehat{k z}) Y_N^{M*}(\widehat{K z}) Y_n^m(\widehat{r z}) Y_N^M(\widehat{R z}) f_n(k r) f_N(K R). \end{aligned} \quad (2.4)$$

利用球面諧函數的正交性, 得

$$\begin{aligned} Y_{n_1}^{m_1}(\widehat{r_1 z}) f_{n_1}(k_0 r_1) Y_{n_2}^{m_2}(k_0 r_2) f_{n_2}(k_0 r_2) = \sum_{N n M m} (i)^{n+N-n_1-n_2} Y_N^M(\widehat{R z}) Y_n^m(\widehat{r z}) \times \\ \times \int Y_N^{M*}(\widehat{K z}) Y_n^{m*}(\widehat{k z}) f_n(k r) f_N(K R) Y_{n_1}^{m_1}(\widehat{k_1 z}) Y_{n_2}^{m_2}(\widehat{k_2 z}) d\Omega_{k_1} d\Omega_{k_2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

茲計算 (2.5) 式中的積分:

$$I \equiv \int Y_N^{M*}(\widehat{K z}) Y_n^{m*}(\widehat{k z}) f_n(k r) f_N(K R) Y_{n_1}^{m_1}(\widehat{k_1 z}) Y_{n_2}^{m_2}(\widehat{k_2 z}) d\Omega_{k_1} d\Omega_{k_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{k_0^2} \int \delta(k_1^2 - k_0^2) \delta(k_2^2 - k_0^2) Y_N^{M*}(\hat{K}z) Y_n^{m*}(\hat{k}z) f_n(kr) f_N(KR) \times \\
&\times Y_{n_1}^{m_1}(\hat{k}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{k}_2 z) d^3 k_1 d^3 k_2 = \frac{4}{k_0^2} \int \delta\left(\frac{K^2}{4} + k^2 + Kk \cos \hat{K}\hat{k} - k_0^2\right) \times \\
&\times \delta\left(\frac{K^2}{4} + k^2 - Kk \cos \hat{K}\hat{k} - k_0^2\right) \cdot f_n(kr) f_N(KR) \times \\
&\times Y_N^{M*}(\hat{K}z) Y_n^{m*}(\hat{k}z) Y_{n_1}^{m_1}(\hat{k}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{k}_2 z) d^3 K d^3 k.
\end{aligned}$$

取 $\mathbf{K}$ 做新坐標系的 z 軸,並對 $\mathbf{k}$ 積分,得:

$$I = \frac{1}{k_0^2} \int K dK f_n(kr) f_N(KR) \int Y_N^{M*}(\hat{K}z) Y_n^{m*}(\hat{k}z) Y_{n_1}^{m_1}(\hat{k}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{k}_2 z) d\Omega_K d\varphi_k. \quad (2.6)$$

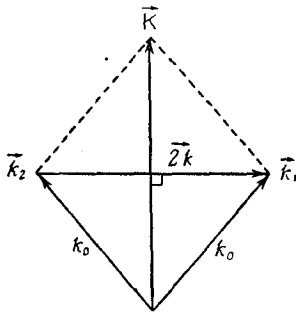


圖 2.1

這裏 $\mathbf{K}$ 和 φ_k ($\mathbf{k}$ 在新坐標系中的 φ 角)是自變數,其餘變數和它之間的關係如圖 2.1 所表示:

經過轉軸(從舊坐標系轉到以 $\mathbf{K}$ 為 z 軸的新坐標系)
 $Y_n^m(\hat{k}z)$ 等變成^[12]

$$Y_n^m(\hat{k}z) = \sum_{m'} D_{m m'}^n(K) Y_n^{m'}(\hat{k}\hat{K}).$$

K 表示新坐標系的歐勒角, $\hat{k}\hat{K}$ 表示 $\mathbf{k}$ 在新坐標系中極坐標的角度部分, $D_{m m'}^n$ 是轉動羣的不可簡化的表示。由此

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{k_0^2} \int K dK f_n(kr) f_N(KR) \sum_{m' m'_1 m'_2} \int Y_N^{M*}(\hat{K}z) D_{m m'}^{n*}(K) Y_n^{m'*}(\hat{k}\hat{K}) \times \\
&\times D_{m_1 m'_1}^{n_1}(K) Y_{n_1}^{m'_1}(\hat{k}_1 \hat{K}) D_{m_2 m'_2}^{n_2}(K) Y_{n_2}^{m'_2}(\hat{k}_2 \hat{K}) d\Omega_K d\varphi_k. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

因為

$$D_{m_1 m'_1}^{n_1}(K) D_{m_2 m'_2}^{n_2}(K) = \sum_l C_{n_1 m_1, n_2 m_2}^{l m_1+m_2} C_{n_1 m'_1, n_2 m'_2}^{l m'_1+m'_2} D_{m_1+m_2, m'_1+m'_2}^l(K), \quad (2.8)$$

$$Y_N^M(\hat{K}z) = \sqrt{\frac{2N+1}{4\pi}} D_{M0}^N(K), \quad (2.9)$$

$$\int D_{M+m, m'_1+m'_2}^{l*}(K) D_{m_1+m_2, m'_1+m'_2}^{l'}(K) d\Omega_K = \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{M+m, m_1+m_2}, \quad (2.10)$$

所以我們得

$$I = 4\pi \sqrt{\pi} \sqrt{2N+1} \sum_{m'_1 m'_2 l} \frac{1}{2J+1} C_{NM, nm}^{l m_1+m_2} C_{NO, n m'_1+m'_2}^{l m'_1+m'_2} C_{n_1 m_1, n_2 m_2}^{l m_1+m_2} C_{n_1 m'_1, n_2 m'_2}^{l m'_1+m'_2} \times$$

$$\times Y_n^{m_1+m_2'}(0,0) Y_{n_1}^{m_1'}\left(\frac{K}{2k_0}, 0\right) Y_{n_2}^{m_2'}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right). \quad (2.11)$$

利用 (2.5) 和 (2.11) 得:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1 m_2 \nu_1 \nu_2} C_{i_1 m_1+\nu_1, i_2 m_2+\nu_2}^{I 0} C_{n_1 m_1, s_1 \nu_1}^{I_1 m_1+\nu_1} C_{n_2 m_2, s_2 \nu_2}^{I_2 m_2+\nu_2} \times \\ & \times Y_{n_1}^{m_1}(\hat{r}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{r}_2 z) f_{n_1}(k_0 r_1) f_{n_2}(k_0 r_2) \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2) = \\ & = \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{k_0^2} \int_0^{2k_0} K dK \sum_{n L S} (i)^{N+n-n_1-n_2} \times \\ & \times C_{i_1 m_1+\nu_1, i_2 m_2+\nu_2}^{I 0} C_{n_1 m_1, s_1 \nu_1}^{I_1 m_1+\nu_1} C_{n_2 m_2, s_2 \nu_2}^{I_2 m_2+\nu_2} C_{n_1 m_1, n_2 m_2}^{L m_1+m_2} C_{s_1 \nu_1, s_2 \nu_2}^{S \nu_1+\nu_2} \times \\ & \times \sqrt{2N+1} \sum_{m_1' m_2'} \frac{1}{2L+1} C_{NO, n m_1'+m_2'}^{L m_1'+m_2'} C_{n_1 m_1', n_2 m_2'}^{L m_1'+m_2'} \times \\ & \times Y_n^{m_1+m_2'}(0,0) Y_{n_1}^{m_1'}\left(\frac{K}{2k_0}, 0\right) Y_{n_2}^{m_2'}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right) \times \\ & \times \sum_{M m \nu_1' \nu_2'} C_{NM, nm}^{L m_1+m_2} C_{s_1 \nu_1', s_2 \nu_2'}^{S \nu_1+\nu_2} Y_n^m(\hat{r} z) Y_N^M(\hat{R} z) \times \\ & \times \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2) f_n(kr) f_N(KR). \end{aligned} \quad (2.12)$$

因爲^[7]

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1 m_2 \nu_1 \nu_2}^{m_1+m_2, \nu_1+\nu_2 \text{ 固定}} C_{n_1 m_1, s_1 \nu_1}^{I_1 m_1+\nu_1} C_{n_2 m_2, s_2 \nu_2}^{I_2 m_2+\nu_2} C_{i_1 m_1+\nu_1, i_2 m_2+\nu_2}^{I 0} C_{n_1 m_1, n_2 m_2}^{L m_1+m_2} C_{s_1 \nu_1, s_2 \nu_2}^{S \nu_1+\nu_2} = \\ & = \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)} U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} C_{L m_1+m_2, S \nu_1+\nu_2}^{I 0}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

所以 (2.12) 式變成

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{k_0^2} \int_0^{2k_0} K dK \sum_{n L S} (i)^{N+n-n_1-n_2} \times \\ & \times \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)} U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sqrt{2N+1}}{2L+1} \sum_{m_1' m_2'} C_{NO, n m_1'+m_2'}^{L m_1'+m_2'} C_{n_1 m_1', n_2 m_2'}^{L m_1'+m_2'} Y_n^{m_1+m_2'}(0,0) \times \right. \\ & \times Y_{n_1}^{m_1'}\left(\frac{K}{2k_0}, 0\right) Y_{n_2}^{m_2'}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right) \left. \right\} \left\{ \sum_{M m \nu_1' \nu_2'} C_{LM+m, S \nu_1+\nu_2}^{I 0} C_{NM, nm}^{L M+m} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times C_{s_1 v_1, s_2 v_2}^{S v_1 + v_2} \times Y_n^m(\hat{r}z) Y_N^M(\hat{R}z) \chi_{v_1}(1) \chi_{v_2}(2) f_n(kr) f_N(KR) \Big\},$$

即 (18) 式.

参 考 文 献

- [1] Pryce, M. H. L., *Proc. Phys. Soc.* **65 A** (1952), 773.
- [2] 例如可以参考 Flowers, B. H., *Prog. in Nuc. Phys.* **2** (1952), 235.
- [3] Brueckner, K. A., Levinson, C. A. and Mahmond, H. M., *Phys. Rev.* **95** (1954), 217; **96** (1954), 508; **97** (1955), 1353;
Brueckner, K. A., Eden, R. J. and Francis, N. C., *Phys. Rev.* **99** (1955), 76.
- [4] Eden, R. J. and Francis, N. C., *Phys. Rev.* **97** (1955), 1366.
- [5] 例如可以参考 Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (1953), 第 9 章, 第 1 節.
- [6] 例如参考 Lippmann, B. A. and Schwinger, J., *Phys. Rev.* **79** (1950) 469.
- [7] Matsunobu, H. and Takebe, H., *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955), 589.
- [8] Rothman, M. A. and Mandeville, C. E., *Phys. Rev.* **93** (1954), 796;
Eliot, E. A., Hicks, D., Beghian, L. E. and Halban, H., *Phys. Rev.* **94** (1954), 144;
Kiehn, R. M. and Goodman, C., *Phys. Rev.* **95** (1954) 989;
Scherrer, V. E., Allison, B. A. and Faust, W. R., *Phys. Rev.* **96** (1954), 386;
Poole, M. J., *Phil. Mag.* **44** (1953), 1398.
- [9] Mihelich, J. W., Schardt, A. W. and Segrè, E., *Phys. Rev.* **95** (1954), 1508.
- [10] Feshbach, H. and Lomon, E., *Phys. Rev.* **102** (1956), 891.
- [11] Mott and Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, 第二章, 第一節.
- [12] 例如参考 Wigner, *Gruppen theorie*, 第十五章.

ОБ УРОВНЯХ ЭНЕРГИИ НЕКОТОРЫХ ЯДЕР В ОБЛАСТИ ОКОЛО ЯДРА РЬ²⁰⁸

ЮИ МИНЬ

(Физический институт Академии Наук Китая)

РЕЗЮМЕ

В 1952 г. Прус вычислял уровни энергии некоторых ядер в области около ядра Рь²⁰⁸. Он принял метод $j-j$ связи, и следовательно, не учитывал корреляцию расстояний между нуклонами. Но такая корреляция является очень важной в вычислении уровней ядер. Брукнер и его сотрудник предложили другой метод. По их мнению, вместо потенциалы между двумя нуклонами, можно принимать матрицу рассеяния двух нуклонов, и так в некоторой степени учитывается корреляция расстояний. В настоящей статье мы приняли такую идею и вычисляли уровни энергии ядра Рь²¹⁰. Полученные нами теоретические результаты довольно хорошо согласуются с экспериментальными данными и были лучше чем результаты полученные теории связи.