

多次聚束的空間電荷波理論*

謝 家 慶

(中國科學院物理研究所)

提 要

本文採用空間電荷波的觀念，討論了包括電子相互作用的多次聚束問題。所得結果，在電流接近以零為極限時，簡化成費恩伯格 (E. Feenberg) 由運動學觀點出發的結果。但是空間電荷效應的包括，顯示了多次聚束系統一些不能由運動學方法得到的特徵。

本文的分析，可以應用在一系列的微波電子器件上。文中對這方面，也提供了一些具體的方向。

一. 引 言

微波電子器件的基本工作原理，一般都是利用電子束由速度變化轉換為密度變化的聚束現象。在某些例子中（如調速管），其物理過程清楚易解。但有些例子（如直線電子加速器，行波管等），由於電磁波與電子的相互作用是連續分佈的，其物理圖畫較為模糊。可是，聚束現象的存在，仍然是它們工作的基本關鍵。

從理論上研究聚束問題，有兩種主要的方法：第一是忽略了電子間的相互作用，由運動方程求電子的軌跡^[1]。第二是比較全面的包括電子相互作用的空間電荷波的分析。後一方法使用的可能，是由於在動坐標系觀察到的等離子區振盪，對一靜止的觀察者呈現波動的形式^[2,3,4]。雖然嚴格地說，這種等離子區振盪，是局部的現象，但因媒質（電子束）運動的關係，它們在數學形式上與真正在媒質中傳播的波動是一樣的。所以由一種特殊邊際情況所解出的波動常數，加以起始激發的邊際條件，就可以充分表現電子束聚束的宏觀特性。

討論只經過一個似靜電場間隙激發，包括電子相互作用的電子束的聚束理論，已見文獻[5,6]。但是，對於與多個間隙作用的電子束的聚束現象，却只有費恩伯格 (E. Feenberg) 從運動學觀點得到的解答^[7]。因為忽略了空間電荷效應，這個解答不能說明電

* 1956 年 7 月 19 日收到。

流密度較大時的情況,也不能計算橫向邊際情況的影響。本文利用空間電荷波來分析包括電子相互作用與橫向邊際情況的多次聚束現象。首先導出理論結果,並與運動學的結果相比,然後通過幾個具體的問題,討論了這個理論的應用。

二. 多次聚束的空間電荷波解

在電子與電磁波同時存在的空間,由麥克斯韋 (Maxwell) 方程可得下列形式的有策動源的波動方程: (米·千克·秒制)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}; \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}$ 是電場強度, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 是光速。 ρ 和 $\mathbf{i}$ 分別為電荷密度與電流密度,它們的關係表現於下面的連續方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2)$$

同時,電子運動與所受電磁場作用的關係,又可由運動方程表示:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad (3)$$

式中 m 是電子質量, e 是電子電荷, $\mathbf{v}$ 是電子速度, $\mathbf{B}$ 是磁感應強度。

如果在所討論的空間內假設: (1) 一般場波的相速與電子運動速度相差很多,即場波對電子運動的影響可以不計; (2) 電子束中有正離子將穩定狀態下的空間電荷效應抵消; (3) 不計熱騷動的影響; (4) 有強軸向(電子運動方向)穩定外界磁場限制電子橫向的運動; (5) 討論的電子束在橫向是無限延展的,則用微擾近似方法,在交變物理量小於穩定物理量的情況下,可由上面 (1)–(3) 諸微分方程得到空間電荷波的傳播因子 $e^{j(\omega t - \gamma x)}$ 中的 γ ^[6]:

$$\gamma_{a,b} = k' \pm h. \quad (4)$$

$\gamma_{a,b}$ 代表兩個可能存在的傳播常數, $k' = \omega/v_0$, $h = \omega_1/v_0$; ω 是激發電場的角頻率, v_0 是電子軸向 (x) 穩定速度, $\omega_1 = \sqrt{\rho_0 e/m\epsilon_0}$ 是等離子區振盪角頻率, ρ_0 是電子束的穩定電荷密度。(4) 式是不包括相對論效應和橫向邊際情況的結果。當電子束速度接近光速時,主要的修正是使用相對論等離子區振盪角頻率和有修正因子的起始條件^[8]。同時,橫向有限的電子束,雖然嚴格地說需用無限多的空間電荷波的併合來代表其中的物理量,但是適用於近似計算的主項,却僅需在 h 值上加以修正^[9]。因此,以下的演算,只要加上適當的修正因子,便同樣地適用於相對論速度,橫向有限的多次聚束問題。

既然上面假設電子束中空間電荷波以 $e^{j(\omega t - \gamma z)}$ 的方式傳播，又給出兩個可能存在的傳播常數，則電子束中的物理量，一定可用各波的直線併合表示，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{v(z)}{v_0} &= (A e^{-j\gamma_a z} + B e^{-j\gamma_b z}) e^{j\omega t}, \\ \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} &= (-C e^{-j\gamma_a z} + D e^{-j\gamma_b z}) e^{j\omega t}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式內 $v(z)$ 和 $i(z)$ 是交變電子速度和交變電流密度， i_0 是穩定電流密度， A, B, C, D 係由起始條件決定的振幅常數。這裏應當注意 $v(z)$ 和 $i(z)$ 並不是彼此獨立的。對任何一波來說，可從 (2) 式得 $i(z) = \left(\frac{\gamma}{\omega}\right) v(z)$ ，同時，若只保留交變量的一次項，則交變電流密度可寫做 $i(z) = \rho_0 v(z) + v_0 \rho(z)$ ，由此可以證明： $A = -C, B = D$ 。

將 (4) 式中 γ 值代入 (5) 式，並令在渡越空間開始 ($z = 0$) 時，交變電流和交變速度是 $i(0)$ 和 $v(0)$ ，如是則振幅兩常數可由 (5) 式解出。再代入原式，重新安排，可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{v(z)}{v_0} &= e^{j(\omega t - k'z)} \left[\frac{v(0)}{v_0} \cosh hz + j \frac{i(0)}{i_0} \frac{h}{k'} \sinh hz \right], \\ \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} &= e^{j(\omega t - k'z)} \left[j \frac{v(0)}{v_0} \sinh hz + \frac{i(0)}{i_0} \frac{h}{k'} \cosh hz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

採用矩陣符號，上式可以寫成：

$$\begin{vmatrix} \frac{v(z)}{v_0} \\ \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} \end{vmatrix} = e^{j(\omega t - k'z)} S(hz) \times \begin{vmatrix} \frac{v(0)}{v_0} \\ \frac{i(0)}{i_0} \frac{h}{k'} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

式中

$$S(hz) = \begin{vmatrix} \cosh hz & j \sinh hz \\ j \sinh hz & \cosh hz \end{vmatrix}.$$

可稱為空間電荷波矩陣。現在，讓我們先考慮一下普遍的起始條件。

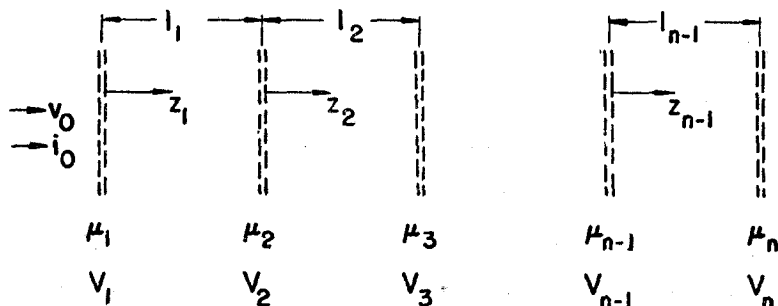


圖1. 多次聚束系統略圖

圖 1 是一個多次聚束系統的略圖。 μ_n 代表第 n 個間隙的電子束交連係數， V_n 代表該間隙存在的或誘導出的交變電壓。電子束中電子通過間隙前後速度的變化，可以根據能量守恆原理推出，即

$$\frac{m}{2} \left\{ \left[v_{0,n} + v_n(0) \right]^2 \right\} - \left\{ v_{0,n-1} + v_{n-1}(l_{n-1})^2 \right\} = e(V_{0,n} - V_{0,n-1} + \mu_n V_n) \quad (8)$$

式中 $v_{0,n}$ 和 $v_{0,n-1}$ 是在第 n 個和第 $(n-1)$ 個渡越空間電子束的穩定速度， $v_n(0)$ 是在第 n 個渡越空間起點 ($z_n = 0$) 的交變速度， $v_{n-1}(l_{n-1})$ 是在第 $(n-1)$ 個渡越空間末尾 ($z_{n-1} = l_{n-1}$) 的交變速度， $V_{0,n}$ 和 $V_{0,n-1}$ 分別為第 n 個和第 $(n-1)$ 個渡越空間相應於電子束穩定速度的直流電壓，即 $m v_{0,n}^2/2 = e V_{0,n}$ ， $m v_{0,n-1}^2/2 = e V_{0,n-1}$ 。

按照前面提到的微擾的假設，交變速度 $v_n(z_n)$ 遠小於穩定速度 $v_{0,n}$ ，所以把 (8) 式展開時可忽略交變速度的二次項。令 $M_n = \mu_n \alpha_n/2$ ， $\alpha_n = V_n/V_{0,n}$ ，則由 (8) 可得：

$$\frac{v_n(0)}{v_{0,n}} = \left(\frac{V_{0,n-1}}{V_{0,n}} \right) \left(\frac{v_{n-1}(l_{n-1})}{v_{0,n-1}} \right) + M_n. \quad (9)$$

為了討論交變電流密度的起始條件，我們應先考慮當電子束由 z 行至 $z + \delta z$ 時，束內交變電流密度的變化。從 (6) 式出發，經過適當的演算，可得

$$\begin{aligned} \frac{i(z+\delta z)}{i_0} \frac{h}{k'} &= e^{-ik'\delta z} \left\{ \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} \cosh \delta z + j \frac{v(z)}{v_0} \sinh \delta z \right\} \\ \text{或} \quad \frac{i(z+\delta z)}{i_0} \frac{h}{k'} &= e^{-ik'\delta z} \left\{ \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} + j \frac{v(z)}{v_0} h \delta z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i(z)}{i_0} \frac{h}{k'} \frac{(h\delta z)^2}{2!} - j \frac{v(z)}{v_0} \frac{(h\delta z)^3}{3!} + \dots \right\} \end{aligned}$$

由此可見，在間隙 δz 狹小的情況，間隙渡越時間遠小於等離子區振盪周期即 $h\delta z \ll 1$ ，故電子束通過間隙時，交變電流密度可近似地假設不變： $i_n(0) = i_{n-1}(l_{n-1})$ 。這個關係，為演算方便起見，可以寫成：

$$\left(\frac{i_n(0)}{i_0} \frac{h_n}{k'_n} \right) = \left(\frac{i_{n-1}(l_{n-1})}{i_0} \frac{h_{n-1}}{k'_{n-1}} \right) \left(\frac{V_{0,n-1}}{V_{0,n}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

應用 (9) (10) 兩式的起始條件，(7) 式變為：

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_n(z_n)}{v_{0,n}} \right| &= e^{j(\omega t - k'_n z_n)} \left\{ S_n(h_n z_n) \times R_n \left(\frac{v_{0,n-1}}{v_{0,n}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left| \frac{v_{n-1}(l_{n-1})}{v_{0,n-1}} \right| + S_n(h_n z_n) \times \left| \frac{M_n}{0} \right| \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

上式中

$$R_n \left(\frac{v_{0,n-1}}{v_{0,n}} \right) = \begin{vmatrix} \left(\frac{v_{0,n-1}}{v_{0,n}} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{v_{0,n-1}}{v_{0,n}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

可稱為速比矩陣。(11)式已是把一個渡越空間的物理量與它前一個渡越空間的物理量聯繫起來的復現公式。如果重複地使用(11)式,並且注意到在忽略了熱騷動的影響時,受到交變電場作用之前的電子束中交變電流和速度是等於零的,則可得到:

$$\begin{vmatrix} \frac{v_n(z_n)}{v_{0,n}} \\ \frac{i_n(z_n)}{i_0} \frac{h_n}{k'_n} \end{vmatrix} = \sum_{p=1}^n \left\{ e^{j(\omega t - \sum_{i=p}^n k'_i z_i)} \left[\prod_{i=n}^{p+1} \left(S_i(h_i z_i) \times R_i \left(\frac{v_{0,i-1}}{v_{0,i}} \right) \right) \right] \times \right. \\ \left. \times S_p(h_p z_p) \times \begin{vmatrix} M_p \\ 0 \end{vmatrix} \right\}. \quad (12)$$

上式給出了第 n 個渡越空間的電子束中交變速度與電流密度的一般形式。可以看出,它們是決定於從第 1 個到第 n 個渡越空間的長度,等離子區振盪波數,和間隙的穩定與交變電壓。實際上間隙既有穩定又有交變電壓存在的情況尚未出現,所以我們只須討論下面兩種特殊情形:

(1) 除第一個間隙可能有交變電壓外,其他間隙只有穩定電壓存在。這時, R_1 變為單位矩陣, $M_p = 0$ ($p \neq 1$), (12) 式變為

$$\begin{vmatrix} \frac{v_n(z_n)}{v_{0,n}} \\ \frac{i_n(z_n)}{i_0} \frac{h_n}{k'_n} \end{vmatrix} = e^{j(\omega t - \sum_{i=1}^n k'_i z_i)} \left\{ \prod_{i=n}^1 \left(S_i(h_i z_i) \times R_i \left(\frac{v_{0,i-1}}{v_{0,i}} \right) \right) \times \begin{vmatrix} M_1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}. \quad (13)$$

這個公式,可以用來計算利用電子束速度躍遷放大微波^[10]的情況。(利用電子束速度躍遷減少噪音^{[11][12]},與此相似。)很清楚地可以看出,從空間電荷波和速比兩個矩陣性質的分析,就能得到想要的結果了。

(2) 各間隙都沒有穩定電壓,而只有振幅和相角為任意數值的交變電壓存在。這時, R_i 都成為單位矩陣,而且由於

$$\prod_{i=n}^p \left(S_i(h_i z_i) \times R_i \left(\frac{v_{0,i-1}}{v_{0,i}} \right) \right) = S \left(\sum_{i=n}^p h_i z_i \right).$$

(12) 式簡化為:

$$\left| \frac{\frac{v_n(z_n)}{v_0}}{\frac{i_n(z_n)}{i_0} \frac{h_n}{k'_n}} \right| = \sum_{p=1}^n \left\{ e^{j(\omega t - \sum_{i=p}^n k'_i z_i)} S \left(\sum_{i=n}^p h_i z_i \right) \times \begin{vmatrix} M_p \\ 0 \end{vmatrix} \right\}. \quad (14)$$

上式適用於多腔調速系統的計算。此時，因各間隙無穩定電壓存在， $v_{0,n}$ ， h_n ， k'_n 等都是常數。交變電壓則是由電子束中的交變電流在諧振腔間隙誘導出來的，因此 V_n 是 $i_{n-1}(l_{n-1})$ 的函數。如果把一個諧振腔在單一振盪方式的導納 Y_n 寫做：

$$Y_n = G_n(1 + 2j Q_n \delta_n). \quad (15)$$

式中 $\delta_n = (\omega - \omega_n)/\omega_n \ll 1$ ， ω 是實際振盪角頻率， ω_n 是該腔諧振角頻率， G_n 和 Q_n 是該腔的電導和 Q 值。則交變電流與它通過諧振腔間隙時誘導出的電壓的關係是：

$$V_n = -\frac{\mu_n}{Y_n} \cdot i_{n-1}(l_{n-1}). \quad (16)$$

代入 (15) 式，上式可以寫為：

$$V_n = -\frac{\mu_n}{G_n} \cdot \cos \beta_n \cdot i_{n-1}(l_{n-1}) \cdot e^{j\beta_n}. \quad (17)$$

其中 β_n 是諧振腔解諧的相角，它的定義是：

$$\beta_n = -\tan^{-1}(2 Q_n \delta_n).$$

由 $M_n = \mu_n \alpha_n / 2$ 和 (17) 式，可得當 $n > 1$ 時，

$$M_n = -\frac{\mu_n^2}{2} \frac{G_0}{G_n} \cos \beta_n \left(\frac{i_{n-1}(l_{n-1})}{i_0} \right) e^{j\beta_n}; \quad (18)$$

當 $n = 1$ 時， M_1 可以寫做：

$$M_1 = -j \frac{\mu_1 \alpha_1}{2}; \quad (19)$$

式中 $\alpha_1 = V_1/V_0$ ， $-j$ 是給 V_1 指定的相角， $G_0 = i_0/V_0$ 是電子束的電導。現在根據 (14)，(18)，(19) 各式，便可計算任何渡越空間中的交變電流密度。如令 $f(x) = \sin x/x$ ， $g_n = \frac{\mu_n^2 G_0}{2 G_n} \theta_n$ 代表忽略了空間電荷時第 n 級的增益， $\theta_n = k' l_n$ 代表第 n 個渡越空間的渡越角，則 $n = 1, 2, 3$ 各系統的計算結果如下：

$$\frac{i_1(l_1)}{i_0} = \frac{\mu_1 \alpha_1 \theta_1}{2} f(h l_1) e^{j(\omega t - \theta_1)}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{i_2(l_2)}{i_0} = & \frac{\mu_1 \alpha_1 \theta_1}{2} \left\{ \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} \right) f(h(l_1 + l_2)) - \right. \\ & \left. - j f(h l_1) f(h l_2) g_2 \cos \beta_2 e^{j\beta_2} \right\} e^{j(\omega t - \sum_{i=1}^2 \theta_i)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\frac{i_3(l_3)}{i_0} = & \frac{\mu_1 \alpha_1 \theta_1}{2} \left\{ \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1} \right) f(h(l_1 + l_2 + l_3)) - \right. \\
& - i \left[\left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} \right) f(hl_1) f(h(l_2 + l_3)) g_2 \cos \beta_2 e^{i\beta_2} + \right. \\
& + \left. \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) f(hl_3) f(h(l_1 + l_2)) g_3 \cos \beta_3 e^{i\beta_3} \right] - \\
& \left. - f(hl_1) f(hl_2) f(hl_3) g_2 g_3 \cos \beta_2 \cos \beta_3 e^{i(\beta_2 + \beta_3)} \right\} e^{i(\omega t - \sum_{i=1}^3 \theta_i)}, \quad (22)
\end{aligned}$$

從各渡越空間電流的計算結果可以看出：受 n 個聚束間隙作用的最後交變電流有 $2^{(n-1)}$ 個成分。這是由於交變電流經過間隙時有連續性，同時它所誘導的電壓的聚束

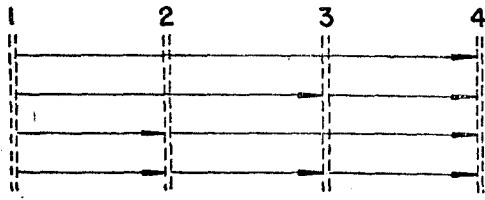


圖 2. $n = 3$ 系統交變電流示意圖

作用又產生新電流的關係。在圖 2 我們以 $n = 3$ 系統為例來說明這種情況。圖中用四條直線代表在第三渡越空間各交變電流產生的過程。上數第一線，表示由第一間隙激發的電流，因連續性而直達第三渡越空間。第二線表示該電流在第三間隙所誘導的電壓的聚束作用所產生的電流。第三、四兩線，代表該電流在第二間隙由同樣作用所產生的電流。因為這個電流，可由連續性的要求，直接通過第三間隙（第三線），或者在第三間隙更激發新的電流（第四線），所以要用兩條線表示這兩種可能。這樣就說明了在 $n = 3$ 系統中，有 $2^{(3-1)} = 4$ 個電流的基本原因。若根據如圖 2 所示的分析各交變電流的來源的圖解，再考慮到各電流形成時的物理過程，實際上我們可以直接推出 n 為任何值的聚束系統的各交變電流成分。

三. 空間電荷波與運動學結果的比較

為了與運動學理論的結果相比，在 (21), (22) 兩式中，令各渡越空間長度相同 ($l_n = l$)，有聚束作用的諧振腔都調節在共同的諧振頻率 ($\beta_n = 0$)，並且各間隙大小也完全一樣 ($\mu_n = \mu$)，然後代入 (17) 式中，得到：

$$G_3 = \left| \frac{V_3}{V_1} \right| = g \left\{ 4f^2(2hl) + g^2 f^4(hl) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

$$G_4 = \left| \frac{V_4}{V_1} \right| = g \left\{ \left[3f(3hl) - g^2 f^3(hl) \right]^2 + \left[4gf(hl) f(2hl) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

當電子束電流接近以零為極限時，即 $nhl \rightarrow 0$ 時，由於 $\lim_{nhl \rightarrow 0} f(nhl) = 1$ ，上兩式變為：

$$G_3 = g \{4 + g^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$G_4 = g \{9 + 10g^2 + g^4\}^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

這是與費恩柏格 (E. Feenberg) 使用運動學理論算得的均勻三腔、四腔調速系統的結果相同的^[7]。

四. 空間電荷對系統增益的影響

因為電子間相互作用的力是彼此排斥, 反對聚束的, 故此, 可以說空間電荷效應是一種散束作用, 而使用空間電荷波計算的交變電流, 是永遠比用運動學計算所得的電流為小的。換句話說, 除非在電流極小的特殊情況下, 運動學所給的結果總是失之過大。這種由於空間電荷存在而產生的多腔調速系統增益的減低, 可用 (23), (24) 等式計算。 $n = 2, 3, 4, 5$ 各系統在不同的空間電荷情形下 ($hl = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$) 的計算結果, 由圖 3 和圖 4 給出。圖中縱軸是歸一化的系統增益, 橫軸是單級增益。實線代表 $f(nhl) \rightarrow 1$ 即電流密度極小的情況, 虛線代表同樣情形下的主項 (指式中 g 的最高次項, 以後同此。) 的變化情況。點劃線則代表不同的空間電荷的情況。由圖可以看出空間電荷對諧振增益 ($\beta_n = 0$ 時的增益) 的影響, 同時也可以看出只採用主項來計算的誤差, 隨單級增益的加大而減小。這說明了 $(n + 1)$ 腔調速系統的作用等於 n 個雙腔系統串聯這種一般的說法, 只有當 g 值極大時才是近似地正確。

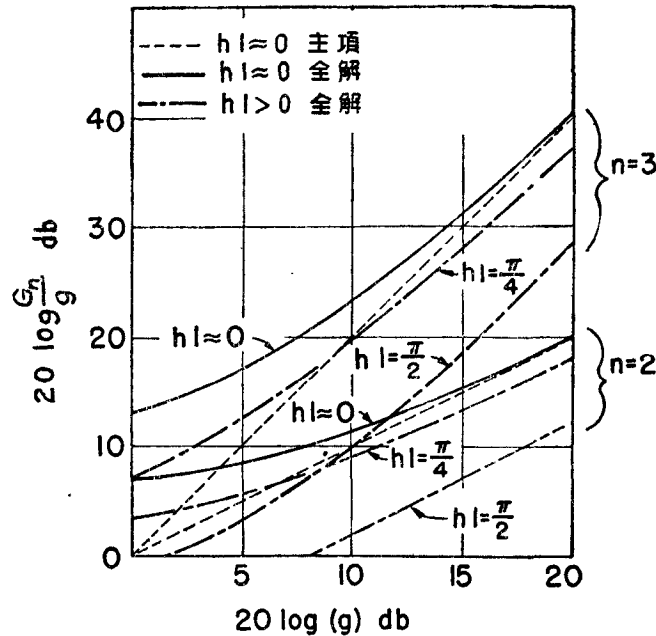
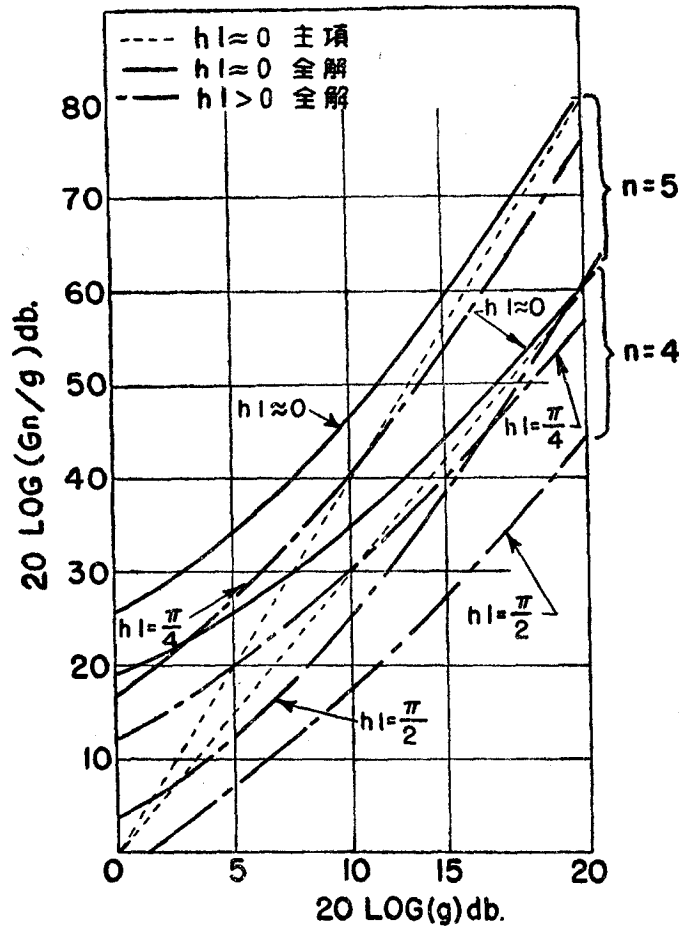


圖3. 空間電荷對諧振增益的影響
($n = 2, 3$)

圖 4. 空間電荷對諧振增益的影響 ($n = 4, 5$)

五. 多腔調速系統的解諧增益與諧振增益

如所週知, 三腔調速系統 ($n = 2$) 的最大增益, 在一般情形下並不發生在第二諧振腔諧振 ($\beta_2 = 0$), 而是發生在它解諧 ($\beta_2 \neq 0$) 的時候. 現在, 讓我們首先把這個現象利用包括空間電荷效應的理論加以分析.

根據 (21) 式:

$$\left| \frac{i_2(l_2)}{i_0} \right|^2 = \left(\frac{\mu_1 \alpha_1 \theta_1}{2} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} f(hl_1 + hl_2) + \frac{1}{2} g_2 f(hl_1) f(hl_2) \sin 2\beta_2 \right]^2 + \left[g_2 f(hl_1) f(hl_2) \cos^2 \beta_2 \right]^2 \right\}. \quad (27)$$

由 $\partial |i_2(l_2)|^2 / \partial \beta_2 = 0$, 可以求出 $|i_2(l_2)|$ 為最大時的相應 β_2 值, 即

$$(\beta_2)_{\max} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{2}{g_2} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} \right) \right] \left[\frac{f(h(l_1 + l_2))}{f(hl_1) f(hl_2)} \right] \right\}. \quad (28)$$

當空間電荷因子 $f(h(l_1 + l_2))/f(hl_1)f(hl_2)$ 在電流極小的情況下接近於 1 時，上式便簡化為一般文獻所給的結果^[13]。把 (28) 式代入 (27) 式，就可得出最大的交變電流值。由這個電流所產生的系統增益，我們叫它做解諧增益，以便與當 $\beta_2 = 0$ 時的諧振增益相區別。

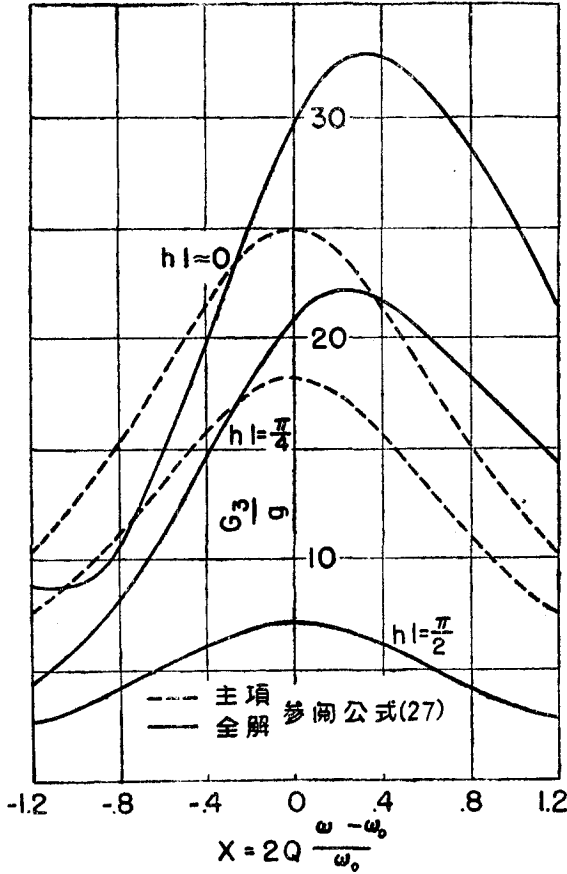


圖 5. $n=2$ 系統各種空間電荷情況的響應曲線 ($g=5$)

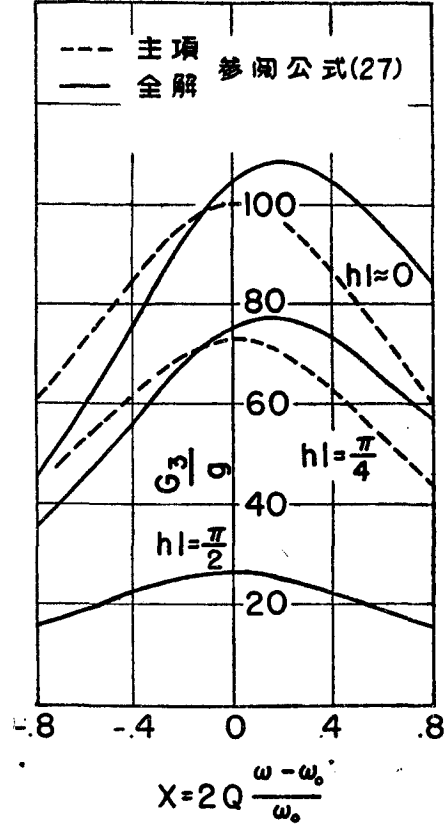


圖 6. $n=2$ 系統各種空間電荷情況的響應曲線 ($g=10$)

圖 5 和圖 6 給出根據 (27) 式計算的在不同的空間電荷情況下 $l_1 = l_2$ 的系統增益與第二諧振腔調諧的關係。可以看出：響應曲線對頻率一般是不對稱的，同時單級增益愈小，不對稱的情形愈為嚴重。這是因為最後的交變電流，是由第一間隙激發的電流和這個電流在第二間隙產生的誘導電壓所激發的電流合成的，這兩電流成分隨 β_2 的改變而有不同的相位關係，其矢量和的最大值發生在 $\beta_2 = (\beta_2)_{\max}$ 。當單級增益加大， $gf^2(hl) \gg 2f(2hl)$ 時（參閱 (21) 式），第一間隙激發的電流可以忽略，所以整個系統

的行為接近於單級的對稱響應。同時，由圖中也可看出：若 $hl = \pi/2$ ，則因 $f(2hl) = 0$ 的關係，第一間隙所激發的電流的振幅到輸出間隙時為零，因此，響應曲線等於只考慮 (21) 式的主項而變為單一電流的對稱形式了。換句話說，這時的空間電荷效應等於產生了一種對二次項的“隔離”作用。

以上的討論，雖然是由 $n = 2$ 的系統出發，但實際上也可應用到 n 為任何值的均勻系統（各渡越空間長度相等）。因為在 (21), (22) 等式 g 的二次項都有 $f(2hl)$ 的因子，當 $hl = \pi/2$ 時，它們的貢獻為零，而更高次項的影響在實用情形下是可以忽略不計的。

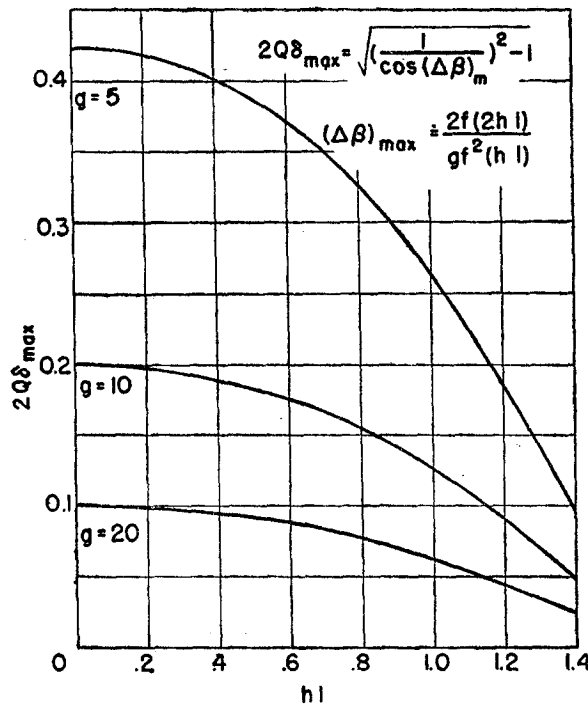


圖7. 解諧與空間電荷的關係

圖 7 表示由 (28) 式得到的在不同的單級增益情況下的解諧與空間電荷的關係。電子束電流密度加大，解諧逐漸減小，這也同樣說明了前述的空間電荷的“隔離”作用。

六. 多腔調速系統的寬頻使用

一般說來，由於諧振腔的使用，調速管基本上是一種狹頻的微波電子器件。但多腔調速系統則因有多數諧振頻率可以各不相同的諧振腔，很容易使人想到採用差調的方法來增加頻寬。可惜的是高級項交變電流的存在，使已有的各種級聯放大的綜合理

論,都有在此不能直接應用的困難。

根據前面的結果,我們可以計算出 n 腔調速系統的 $2^{(n-1)}$ 個電流成分,再按照這個電流形式從而發展一種差調的綜合理論,是完全有可能的。這裏,只預備討論如何利用上面指出的空間電荷的“隔離”作用,解決多腔調速系統寬頻使用的綜合問題。圖 8 和圖 9 表示根據 (22) 式用標準差調綜合理論計算得的 $n=3$ 系統的響應曲線。圖 8 是頻寬為 2% 的最平響應,圖 9 是頻寬為 5% 的切比雪夫 (Tscheycheff) 響應。其中 f_2, f_3 是第二和第三諧振腔的諧振頻率。計算時各渡越空間是假設等長的。

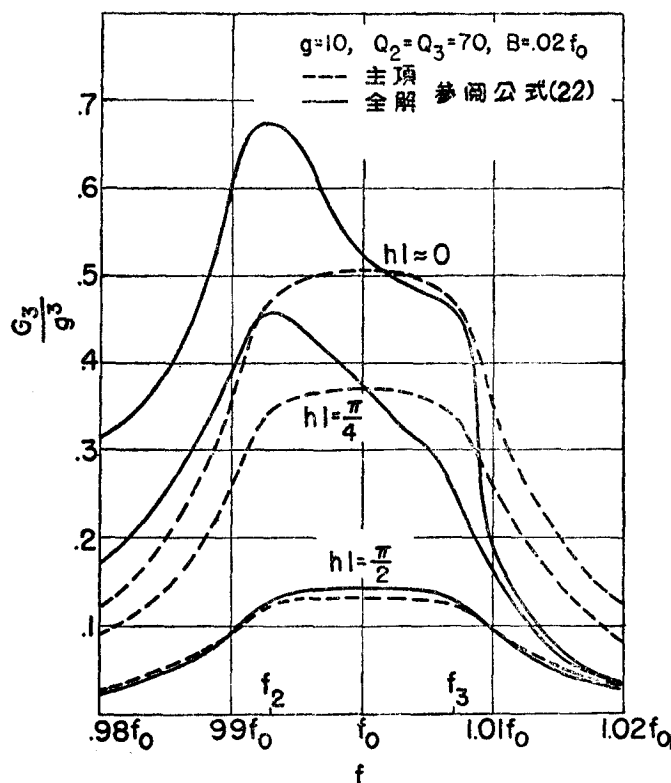


圖 8. $n=3$ 系統最平響應

從圖上可以看出,由於電流中高次項的影響,系統的響應曲線(如實線所示),在 $hl \neq \pi/2$ 的一般情形下,較只考慮 (22) 式主項時得到的響應(即合乎差調綜合理論的響應)有着嚴重的畸變。但若 $hl = \pi/2$,代表全解的實線與代表主項的虛線,却有相似的響應。這說明了空間電荷的“隔離”作用,使標準的差調綜合理論,在多腔調速系統中有了應用的可能。

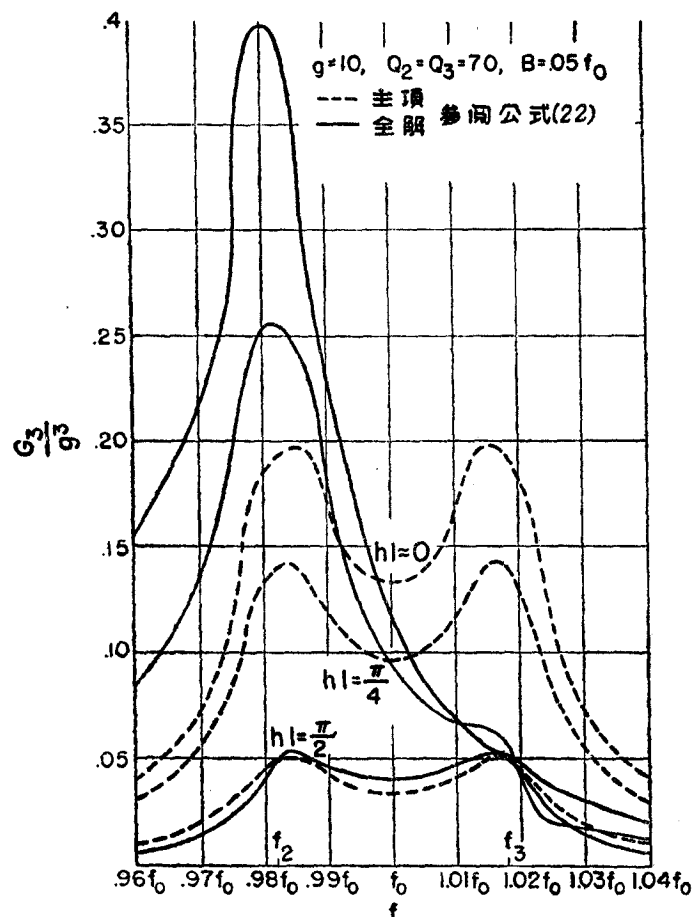


圖9. $n=3$ 系統切比雪夫響應 (3 db. 紋波)

七. 結 論

本文使用空間電荷波觀念,分析了包括電子相互作用的多次聚束問題,並簡單舉例說明計算結果的應用。所得結果,還可以應用到其他的微波電子器件上,如設計強流直線加速器,研究周期性負荷結構行波管的空間電荷效應,分析行波管與多腔調速管工作原理的連繫等等。但這些應用的探索,不在本文範圍以內,故在此不進行討論。

參 考 文 獻

- [1] Webster, D. L., *Jour. Appl. Phys.* **10** (1939), 501.
- [2] Bohm, D. and Gross, E. P., *Phys. Rev.* **75** (1949), 1851.
- [3] Schumann, W. O., *Z. f. angew. physik*, **2** (1950), 28.
- [4] Ахнeзeр, А. И., и Файнберг, Я. Б., *ЖЭТФ*, **11** (1951), 1262.
- [5] Ramo, S., *Phys. Rev.* **56** (1939), 276.
- [6] Feenberg, E. and Feldman, D., *Jour. Appl. Phys.* **17** (1946), 1025.
- [7] Feenberg, E., *Sperry Gyros. Co. Report*, No. 5221---106 (1943).
- [8] Hahn, W. C., *G. E. Rev.* **42** (1939), 258.
- [9] Parzen, P., *Jour. Appl. Phys.* **23** (1952), 215.
- [10] Tien, P. K., and Field, L. M., *Proc. I.R.E.* **40** (1952), 688.
- [11] Cutler, C. C., and Quate, C. P., *Phys. Rev.* **80** (1950), 875.
- [12] Watkins, D. A., *Proc. I. R. E.* **40** (1952), 65.
- [13] Hamilton, D. R., Knipp, J. K., and Kuper, J. B. H., *Klystrons and Microwave Triodes* (McGraw-Hill, 1948), p. 275.

SPACE-CHARGE WAVE THEORY OF MULTIPLE BUNCHING

HSIEH CHIA-LIN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In the present work, a theory of multiple bunching including the effect of space-charge is developed through the use of space-charge wave concept. The results contain Feenberg's kinematic theory as a special case and reveal characteristics of multiple bunching system that could not be obtained from the kinematic approach.

The theory will find applications in microwave electronic devices and some examples of practical significance are discussed.