

空間電荷存在時旋轉對稱電子 光學系統的像差*

姚 福 田

(北京大學物理系)

提 要

本文從光程函數的概念出發，討論了由於不同因素所引起的空間體電荷對系統成像質量所起的影響。我們假定空間電荷是按旋轉對稱分佈的，且是解析函數。利用了變分原理，並以簡正形式來處理。獲得了在有空間電荷存在時系統的各種特殊形式的像差公式。

一. 引 言

在任何具有旋轉對稱的電子光學系統中，像差理論的研究是佔着很重要的地位。它對於提高儀器成像的質量、減少成像的失真和缺陷，是直接起着指導的作用。關於像差理論的研究，以前曾有很多學者，如 W. Glaser^[1,2]，O. Scherzer^[3]，A. M. Страшневич^[5,8] 和 O. И. Семан^[6,7] 等均作過甚有價值的工作。但討論的都是在忽略了空間電荷的影響下，旋轉對稱電子光學系統的像差。假若系統中有空間電荷存在（可由各種不同因素所引起的自由體電荷，譬如強電流密度的電子束在系統中移動時本身所產生，或者由於殘餘氣體的電離所形成），它們是會影響系統的光學性質。因此決定和研究空間電荷存在時電子光學系統的像差，一方面可使像差的理論更趨完善；另一方面則是更具體地瞭解了：由於空間電荷這一因素的存在，對於系統成像的性質所起的影響；因此對實際設計系統和提高它的成像質量是有很大的幫助。

本文將從光程函數出發，假定空間電荷是按旋轉對稱分佈的，且是解析函數。利用變分原理，並以簡正形式來處理，較詳細地討論了空間電荷存在時傍軸軌跡方程和各種特殊形式的橫向像差。

* 1957 年 2 月 6 日收到。

二. 光程函數的展開和空間電位分佈以軸上 電位分佈表示的展式

質點在力學系統中的運動，是遵循最小作用原理。從此出發，可得相似於光線光學中的費馬原理，即質點的實際軌跡是沿此途徑的光程取極值；

$$\mathcal{E}(P_0, P_i) = \int_{P_0}^{P_i} \mu(\rho, S_0) dS \rightarrow \text{extrem.} \quad (1)$$

此積分值僅依賴於軌跡上任二端點 P_0, P_i 的位置，故稱之為點作用函數或光程函數（亦稱 Эйконал 函數）。在公式（1）中， ρ 是徑向矢量， S_0 是軌跡的單位切線矢量， dS 是軌跡的弧段， $\mu(\rho, S_0)$ 是電子光學的折射率。

$$\mu(\rho, S_0) = \varphi_*^{1/2} - (\mathbf{A}, S_0);$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{\eta} A; \quad \eta = -\frac{e}{2m_0 c^2} > 0 \quad (\text{對電子}),$$

此處 φ_* 和 $\mathbf{A}$ 是空間的電位和磁矢位。

在旋轉對稱情況下，我們引進平面矢量坐標 $\mathbf{r}$ 和 z 。 $\mathbf{r}$ 表示垂直於 z 軸的平面矢量。現選 z 軸作為對稱軸，將空間弧元 dS 表為 z 的函數，於是有：

$$dS = \sqrt{1+r'^2} dz = \sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2} dz;$$

此時折射率為

$$\mu(\rho, S_0) dS = \left\{ \varphi_*^{1/2} \sqrt{1+r'^2} - \frac{\mathcal{A}_\theta}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \right\} dz = \mu(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}') dz. \quad (3)$$

在旋轉對稱的電子光學系統中，磁矢位 $\mathcal{A}$ 僅出現方位角分量 $\mathcal{A}_\theta$ ，在特殊情況也會出現其他分量。

空間電荷存在時，空間電位的分佈滿足泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad (4)$$

其中 ρ 是體電荷密度，假定空間電位和空間電荷均是按旋轉對稱分佈，且是解析函數，它們可展成如下的幕級數：

$$\begin{aligned} \varphi(z, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} r^{2n} = a_0(z) + a_2(z) r^2 + a_4(z) r^4 + \cdots; \\ \rho(z, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n} r^{2n} = \rho_0(z) + \rho_2(z) r^2 + \rho_4(z) r^4 + \cdots. \end{aligned} \quad (5)$$

旋轉對稱下的泊松方程，用圓柱坐標表示的形式為

$$\nabla^2 \varphi(z, r) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho(z, r). \quad (6)$$

將 (5) 式代入 (6) 式, 確定其邊界值後, 就可得到在空間電荷存在時, 空間電位分佈以軸上電位分佈表示的展式:

$$\varphi(z, r) = V_*(z) - \frac{r^2}{4} \left\{ V''(z) + \rho_{0*}(z) \right\} + \frac{r^4}{64} \left\{ V^{IV}(z) + \rho_{0*}''(z) - \rho_{2*}(z) \right\} + \dots, \quad (7)$$

此處

$$\rho_{0*}(z) = 4\pi\rho_0(z); \quad \rho_{2*}(z) = 2^2 \cdot 4\pi\rho_2(z).$$

空間磁矢位 $\mathcal{A}_\theta$ 的分佈以軸上磁強分佈表示的展式為:

$$\frac{\mathcal{A}_\theta}{r} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \mathcal{H}^{2k}(z). \quad (8)$$

將公式 (6)、(8) 代入 (3) 式, 並引進旋轉矢量 $\mathbf{u}$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{r} \cos x - \mathbf{r} \sin x = \mathbf{r} e^{-ix}, \\ x' &= \frac{\mathcal{H}(z)}{2 V_*^{1/2}(z)}, \quad \mathbf{r} = i \mathbf{r} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

經過簡單的計算, 就可得到折射率的展式:

$$\mu_*(z, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \mu_{*0} + \mu_{*2} + \mu_{*4} + \dots \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mu_{*0} &= 2N; \quad \mu_{*2} = N \mathbf{u}'^2 - M \mathbf{u}^2; \\ \mu_{*4} &= -\frac{1}{4} L \mathbf{u}^4 - \frac{1}{2} M \mathbf{u}^2 \mathbf{u}'^2 - \frac{1}{4} N \mathbf{u}'^4 - K V_* (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')^2 - \\ &\quad - V_*^{1/2} (P \mathbf{u}^2 + Q \mathbf{u}'^2) (\mathbf{u} \times \mathbf{u}'). \end{aligned} \quad (11)$$

此處:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{1}{2} V_*^{1/2}; \quad M = \frac{1}{8} \left\{ \frac{V'' + \rho_{0*}}{V_*^{1/2}} + \mathcal{H}^2 \right\}; \\ K V_* &= \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}^2}{V_*^{1/2}}; \quad Q V_*^{1/2} = \frac{1}{4} \mathcal{H}; \\ P V_*^{1/2} &= \frac{1}{16} \left\{ \frac{V'' + \rho_{0*}}{V_*} + \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'' \right\}; \\ L &= -\frac{1}{32} \left\{ \frac{V^{IV} + \rho_{0*}'' - \rho_{2*} + 4 \mathcal{H} \mathcal{H}''}{V_*^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(V'' + \rho_{0*})^2 + 2 \mathcal{H}^2 (V'' + \rho_{0*}) + \mathcal{H}^4}{V_*^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

相應地亦可將光程函數予以展開, 以便以後逐項討論它的意義。

$$\mathcal{E} = \int_{z_a}^{z_i} \mu_*(z \cdot \mathbf{u} \mathbf{u}') dz = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 + \dots$$

三. 傍軸軌跡方程和四級光程函數的確定

二級光程函數是描繪電子的傍軸軌跡, 因為從光程取極值原理出發:

$$\mathcal{E}_2 = \int_{z_a}^{z_i} \mu_{*2} dz = \int_{z_a}^{z_i} (N \mathbf{u}'^2 - M \mathbf{u}^2) dz \rightarrow \text{extrem}, \quad (13)$$

它的歐拉-拉格朗日方程即是電子的傍軸軌跡方程.

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial \mu_{*2}}{\partial \mathbf{u}'} - \frac{\partial \mu_{*2}}{\partial \mathbf{u}} = 0;$$

亦即

$$(N \mathbf{u}')' + M \mathbf{u} = 0. \quad (14)$$

將 N, M 的值代入, 即得:

$$\mathbf{u}'' + \frac{1}{2} \frac{V'}{V_*} \mathbf{u}' + \frac{1}{4} \frac{V'' + \rho_{0*} + \mathcal{H}^2}{V_*} \mathbf{u} = 0. \quad (15)$$

引進新矢量 $\mathbf{W} = V_*^{1/4} \mathbf{u}$, 目的在於經此變換後, 使在傍軸軌跡方程中不出現電位的二次微商和軌跡的一次微商. 由於 V'' 比 V' 更不易測準, 因此它的不出現可增進計算的精確度. 而 $\mathbf{W}'$ 的不出現則更利於數值積分. 經過了 $\mathbf{W} = V_*^{1/4} \mathbf{u}$ 的變換後, 所獲得的軌跡方程稱之為簡正形式的傍軸軌跡方程:

$$\mathbf{W}'' + T(z) \mathbf{W} = 0; \quad (16)$$

$$T(z) = \frac{3}{16} \frac{V'^2}{V_*^2} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\rho_{0*} + \mathcal{H}^2}{V_*} \right\}. \quad (17)$$

它們的通解為:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}_1 r_1 + \mathbf{f}_2 r_2; \\ \mathbf{W} &= \mathbf{f}_1 R_1 + \mathbf{f}_2 R_2; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 是給定軌跡的平面矢量, r_1, r_2 和 R_1, R_2 為軌跡方程 (15) 和 (16) 的二個特解. 我們選擇它們滿足下述的邊界條件:

$$r_a(z_a) = r_r(z_B) = 0; \quad r'_a(z_a) = r'_r(z_a) = 1; \quad z_B \text{ 表光欄的位置,}$$

$$R_{1,2} = R_{a,r} = V_*^{1/4} r_{1,2} = V_*^{1/4} r_{a,r}.$$

現在討論簡正形式下的四級光程函數. 簡正形式的意義包含: 在四級光程函數的積分號內, 不包含軌跡斜率 $\mathbf{u}'$ 的分佈, 然後像傍軸軌跡方程的簡正形式一樣, 過渡到矢量 $\mathbf{W}$. 四級光程函數的詳細表式為:

$$\mathcal{E}_4 = - \int_{z_a}^{z_i} \left\{ \frac{1}{4} L \mathbf{u}^4 + \frac{1}{2} M \mathbf{u}^2 \mathbf{u}'^2 + \frac{1}{4} N \mathbf{u}'^4 + K V_*(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')^2 + V_*^{1/2} (P \mathbf{u}^2 + Q \mathbf{u}'^2) (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \right\} dz.$$

爲了使問題簡化，我們可將其展開式分爲各向同性和各向異性二類：

$$\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_A; \quad (17)$$

其中

$$\mathcal{E}_\theta = - \int_{z_a}^{z_i} \left\{ \frac{1}{4} L \mathbf{u}^4 + \frac{1}{2} M \mathbf{u}^2 \mathbf{u}'^2 + \frac{1}{4} N \mathbf{u}'^4 + K V_*(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')^2 \right\} dz, \quad (17a)$$

$$\mathcal{E}_A = - \int_{z_a}^{z_i} V_*^{1/2} (P \mathbf{u}^2 + Q \mathbf{u}'^2) (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') dz. \quad (17b)$$

在作了上述的分類後，我們就可單獨地處理各向同性項 $\mathcal{E}_\theta$ 和各向異性項 $\mathcal{E}_A$ 。在 (17a) 和 (17b) 式中， $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$ 是與角動量矩的守恆常數有關，即 $V_*^{1/2} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \text{const} = B$ ，因此可直接提到積分號外。經過較為複雜的運算後，我們就可得到在積分號內不包括 $\mathbf{u}'$ 分佈的四級光程函數：

$$-\mathcal{E}_4 = -(\mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_A) = \sum_{p=0}^2 \frac{B^{2-p}}{(p!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_i} S_{pr} \mathbf{u}^{2p} dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} g_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a} \right\}; \quad (18)^*$$

其中：

$$\tau_{pn} = \frac{1}{(2p-n)!} (\mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{u}})^{2p-n} \mathbf{u}^{2p} \quad \left(\begin{matrix} p=0, 1, 2, \\ n=0 \cdots 2p \end{matrix} \right). \quad (18a)$$

像差函數 S_{pr} 和像差常數 g_{pn} 的值爲：

$$\left. \begin{aligned} S_{0r} &= \frac{V'' + \rho_{0*} + 4\mathcal{H}^2}{V_*^{3/2}}, \\ S_{1r} &= 3 \frac{V'^2 \mathcal{H}}{V_*^{5/2}} - 3 \frac{V' \mathcal{H}'}{V_*^{3/2}} + \frac{\mathcal{H}''}{V_*^{1/2}} + 2 \frac{(\rho_{0*} + \mathcal{H}^2) \mathcal{H}}{V_*^{3/2}}, \\ S_{2r} &= \frac{V'^4}{V_*^{7/2}} - \frac{V'' V'^2}{V_*^{5/2}} + \frac{2}{5} \frac{V'' \mathcal{H}^2}{V_*^{3/2}} + \frac{\mathcal{H}^2 V'^2}{V_*^{5/2}} - \frac{7}{5} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}' V'}{V_*^{3/2}} + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}'^2}{V_*^{1/2}} - \frac{2}{15} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}''}{V_*^{1/2}} + \frac{8}{15} \frac{\mathcal{H}^4}{V_*^{3/2}} + \frac{2}{5} \frac{V''^2}{V_*^{3/2}} - \frac{1}{10} \frac{V''' V'}{V_*^{3/2}} + \\ &+ \frac{2}{15} \frac{\rho_{0*}'}{V_*^{1/2}} - \frac{7}{10} \frac{\rho_{0*}' V'}{V_*^{3/2}} + \frac{\rho_{0*} V'^2}{V_*^{5/2}} + \frac{16}{15} \frac{\rho_{0*} \mathcal{H}^2}{V_*^{3/2}} + \frac{2}{5} \frac{\rho_{0*} V''}{V_*^{3/2}} + \\ &+ \frac{8}{15} \frac{\rho_{0*}^2}{V_*^{3/2}} + \frac{1}{5} \frac{\rho_{2*}}{V_*^{1/2}}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

* $(2p+1)!! = (2p+1) \cdot (2p-1) \cdot (2p-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$.

$$\left. \begin{aligned}
 g_{p0} = g_{10} = g_{20} = 0, \quad g_{11} &= \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}}{V_*^{1/2}}, \\
 g_{12} &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{V' \mathcal{H}}{V_*^{3/2}} - \frac{\mathcal{H}'}{V_*^{1/2}} \right\}, \quad g_{21} = \frac{1}{8} V_*^{1/2}, \\
 g_{22} &= \frac{1}{24} \frac{V'}{V_*^{1/2}}, \quad g_{23} = \frac{V_*^{1/2}}{32} \left\{ \frac{V''}{V_*} + \frac{V'^2}{V_*^2} + \frac{5}{3} \frac{\rho_{0*} + \mathcal{H}^2}{V_*} \right\}, \\
 g_{24} &= \frac{V_*^{1/2}}{32} \left\{ -\frac{V'''}{V_*} + 2 \frac{V'^3}{V_*^3} - \frac{5}{3} \frac{\rho'_{0*} + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'}{V_*} + \frac{8}{3} \frac{(\rho_{0*} + \mathcal{H}^2) V'}{V_*^2} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

引進矢量 $\mathbf{W} = V_*^{1/4} \mathbf{u}$, 就能將四級光程函數 $\mathcal{G}_4$ 過渡到簡正形式, 於是有:

$$-\mathcal{G}_4 = \sum_{p=0}^2 \frac{B^{2-p}}{(p!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_i} S_p \mathbf{W}^{2p} dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} q_{pn} \mathfrak{I}_{pn} \right|_{z_a}^{z_i} \right\}, \quad (21)$$

其中:

$$\mathfrak{I}_{pn} = \frac{1}{(2p-n)!} \{ \mathbf{W}' \cdot \nabla_{\mathbf{W}} \}^{2p-n} \mathbf{W}^{2p}; \quad (21a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_0 &= \frac{V'' + \rho_{0*} + 4 \mathcal{H}^2}{V_*^{3/2}}, \\
 S_1 &= 3 \frac{V'^2 \mathcal{H}}{V_*^3} - 3 \frac{V' \mathcal{H}'}{V_*^2} + \frac{\mathcal{H}''}{V_*} + 2 \frac{\rho_{0*} \mathcal{H} + \mathcal{H}^3}{V_*^2}, \\
 S_2 &= V_*^{-1/2} \left\{ \frac{V'^4}{V_*^4} - \frac{V'' V'^2}{V_*^3} + \frac{2}{5} \frac{V'''^2}{V_*^2} - \frac{1}{10} \frac{V'''' V'}{V_*^2} + \frac{2}{5} \frac{V'' \mathcal{H}^2}{V_*^2} + \right. \\
 &\quad + \frac{\mathcal{H}^2 V'^2}{V_*^3} - \frac{7}{5} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}' V'}{V_*^2} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}'^2}{V_*} - \frac{2}{15} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}''}{V_*} + \\
 &\quad + \frac{8}{15} \frac{\mathcal{H}^4}{V_*^2} + \frac{2}{15} \frac{\rho_{0*}''}{V_*} - \\
 &\quad - \frac{7}{10} \frac{\rho_{0*}' V'}{V_*^2} + \frac{\rho_{0*} V'^2}{V_*^3} + \frac{16}{15} \frac{\rho_{0*} \mathcal{H}^2}{V_*^2} + \frac{2}{5} \frac{\rho_{0*} V''}{V_*^2} + \frac{8}{15} \frac{\rho_{0*}^2}{V_*^2} + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} \frac{\rho_{2*}}{V_*} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 q_{p0} = q_{10} = q_{20} = 0, \quad q_{11} &= \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}}{V_*}, \\
 q_{12} &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{2} \frac{V' \mathcal{H}}{V_*^2} - \frac{\mathcal{H}'}{V_*} \right\}, \quad q_{21} = \frac{1}{8} V_*^{-1/2}, \quad q_{22} = -\frac{1}{48} \frac{V'}{V_*^{3/2}}, \\
 q_{23} &= \frac{V_*^{-1/2}}{32} \left\{ \frac{V''}{V_*} + \frac{3}{4} \frac{V'^2}{V_*^2} + \frac{5}{3} \frac{\rho_{0*} + \mathcal{H}^2}{V_*} \right\}, \\
 q_{24} &= \frac{V_*^{-1/2}}{32} \left\{ -\frac{V'''}{V_*} + \frac{(\rho_{0*} + \mathcal{H}^2) V'}{V_*^2} + \frac{5}{4} \frac{V'^3}{V_*^3} - \frac{V'' V'}{V_*^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{3} \frac{\rho_{0*}' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'}{V_*} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

四. 橫向像差的確定

在高斯像平面中的橫向三級像差公式^[8]為：

$$\Delta_3 \mathbf{u}_b = -\frac{1}{C} r_Y(z_b) \frac{\partial \mathcal{E}_4}{\partial \mathbf{u}_{*B}} = -\frac{m}{C} \frac{\partial \mathcal{E}_4}{\partial \mathbf{u}_{*B}}. \quad (24)$$

此處, $C = R'_a R_Y - R'_Y R_a = V_{*a}^{1/2}$; $r_Y(z_b) = m$, m 是放大率.

爲了要確定各種特殊形式的像差係數, 就必須將四級光程函數按給定軌跡的參量 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 來展開. 我們現將簡正形式的四級光程函數按下列的幕次展開:

$$(\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1)^{2-p} (\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1)^{2p}, \quad p = 0, 1, 2.$$

爲此, 我們先將 $\mathbf{W}^{2p}, \mathfrak{T}_{pn}$ 轉變爲 $(\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1)^{2p}$ 的幕次項.

$$\mathfrak{T}_{p(2p)} = \mathbf{W}^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} R_1^{2p-k} R_2^k (\mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_1)^k \mathbf{f}_1^{2p}. \quad (25)$$

且考慮下列的關係式後:

$$\{\mathbf{W}' \nabla \mathbf{w}\} = R'_1 \frac{\partial}{\partial R_1} + R'_2 \frac{\partial}{\partial R_2}. \quad (26)$$

於是就有

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{pn} &= \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{(2p-n)!} \frac{1}{k!} (\mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_1)^k \mathbf{f}_1^{2p} \left\{ R'_1 \frac{\partial}{\partial R_1} + R'_2 \frac{\partial}{\partial R_2} \right\}^{2p-n} R_1^{2p-k} R_2^k = \\ &= \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} (\mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_1)^k \mathbf{f}_1^{2p} \cdot T_{pkn}. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \\ k = 0 \cdots 2p, \\ n = 0 \cdots 2p. \end{pmatrix} \quad (27)$$

此處

$$T_{pkn} = \frac{1}{(2p-n)!} \left\{ R'_1 \frac{\partial}{\partial R_1} + R'_2 \frac{\partial}{\partial R_2} \right\}^{2p-n} R_1^{2p-k} R_2^k. \quad (27a)$$

將上述的公式 (25), (27) 代入四級光程函數 $\mathcal{E}_4$ 中, 便有:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_4 &= \sum_{p=0}^2 \frac{C^{2-p} (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1)^{2-p}}{(p!)^2} \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} (\mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_1)^k \mathbf{f}_1^{2p} \times \\ &\times \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_b} S_p R_1^{2p-k} R_2^k dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} q_{pn} T_{pkn} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

此處

$$B = V_{*a}^{1/2} (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_{*B}) = C (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1).$$

設

$$Q_{pk} = (-1)^k C^{1-p} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_b} S_p R_1^{2p-k} R_2^k dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} q_{pn} T_{pkn} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}. \quad (29)$$

於是:

$$-\frac{\mathcal{E}_4}{C} = \sum_{p=0}^2 \frac{(\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1)^{2-p}}{(p!)^2} \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k}{k!} (\mathbf{f}_2 \cdot \nabla \mathbf{f}_1)^k \mathbf{f}_1^{2p} Q_{pk} \quad (30)$$

($p=0, 1, 2, \quad k=0 \cdots 2p, \quad n=0 \cdots 2p$)

以給定軌跡參量 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 展開的四級光程函數代入橫向像差公式 (24) 中, 再作下述的變換:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{u}_{*B} = \frac{\mathbf{u}_B}{r_{aB}}; \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{u}_a; \quad R_1 = R_a; \quad R_2 = R_\gamma.$$

於是可得橫向三級像差的總值爲:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{3b} = & 2 G_{00} (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B) \mathbf{u}_a + G_{10} \{ \mathbf{u}_B^2 \mathbf{u}_a + 2 \mathbf{u}_B (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B) \} - \\ & - 2 G_{11} \{ (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_B) \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_a (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B) \} + G_{12} \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_a + G_{20} \mathbf{u}_B^3 - \\ & - G_{21} \{ \mathbf{u}_B^2 \mathbf{u}_a + 2 (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_B) \mathbf{u}_B \} + G_{22} \{ \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_B + 2 (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_B) \mathbf{u}_a \} - G_{23} \mathbf{u}_a^3, \quad (31) \end{aligned}$$

其中

$$G_{pk} = \frac{m}{r_{aB}^{1+p-k}} Q_{pk}. \quad (32)$$

係數 G_{pk} 是代表各種特殊形式的像差, 它與 S_p, q_{pn}, T_{pkn} 間的關係是通過公式 (32) 來體現的. 從 (32) 式我們就可得出各種特殊形式的像差係數, 例如

$p=0, k=0$: petzval 係數:

$$r_{aB} \frac{G_{00}}{m} = -\frac{1}{24} V_{*a}^{1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_0 dz. \quad (33)$$

$p=1, k=0$: 各向異性彗形係數:

$$r_{aB}^2 \frac{G_{10}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_a^2 dz. \quad (34)$$

$p=1, k=1$: 各向異性像散係數:

$$-r_{aB} \frac{G_{11}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_a R_\gamma dz + \frac{1}{8} V_{*a}^{1/2} \left| \frac{\mathcal{H}}{V_*} \right|_{z_a}^{z_b}. \quad (35)$$

$p=1, k=2$: 各向異性畸變係數:

$$\frac{G_{12}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_\gamma^2 dz + \frac{1}{8} \left| \frac{r_\gamma^2}{V_*^{1/2}} \left\{ \left(2 \frac{R'_\gamma}{R_\gamma} + \frac{1}{2} \frac{V'}{V_*} \right) \mathcal{H} - \mathcal{H}' \right\} \right|_{z_a}^{z_b}. \quad (36)$$

$p=2, k=0$: 各向同性球差係數:

$$r_{aB}^3 \frac{G_{20}}{m} = \frac{5}{32} V_{*a}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_a^4 dz. \quad (37)$$

$p = 2, k = 1$: 各向同性彗形係數:

$$-r_{aB} \frac{G_{21}}{m} = \frac{5}{32} V_{*a}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_a^3 R_\gamma dz + \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{m^2} \frac{V_{*a}}{V_{*b}} - 1 \right\}. \quad (38)$$

$p = 2, k = 2$: 各向同性場曲和像散係數:

$$\begin{aligned} r_{aB} \frac{G_{22}}{m} = & \frac{5}{32} V_{*a}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_a^2 R_\gamma^2 dz + \\ & + \frac{1}{4} V_{*a}^{1/2} \left| \frac{1}{V_{*a}^{1/2}} \left\{ \frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V'}{V_*} \right\} \right|_{z_a}^{z_b}. \end{aligned} \quad (39)$$

$p = 2, k = 3$: 各向同性畸變係數:

$$\begin{aligned} -\frac{G_{23}}{m} = & \frac{5}{32} V_{*a}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_a R_\gamma^3 dz + \\ & + \frac{3}{8} \left| r_\gamma^2 \left\{ \left(\frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V'}{V_*} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{V''}{V_*} + \frac{2}{3} \frac{V'^2}{V_*^2} + \frac{5}{3} \frac{\rho_{0*} + \mathcal{E}^2}{V_*} \right) \right\} \right|_{z_a}^{z_b}. \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_a(z_a) &= 0; & r_\gamma(z_a) &= 1; \\ r_a(z_b) &= 0; & r_\gamma(z_b) &= m; \\ r'_a(z_a) &= 1; & r'_a(z_b) &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{V_{*a}}{V_{*b}}}; \\ R_{a,\gamma} &= V_*^{1/4} r_{a,\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

到此，我們完全獲得了具有空間電荷的電子光學系統各種特殊形式的橫向三級像差。

五. 結 語

1. 我們從光程函數的概念出發，假定空間電荷是按旋轉對稱分佈的，且是解析函數。利用變分原理，獲得了系統的各種特殊形式的橫向像差。雖然在系統中存在着空間電荷，但它的結果並未引起很大的複雜和困難。

2. 空間電荷存在時，簡正形式的像差係數具有下述的特徵：

I. 各種特殊形式的像差均被通用像差函數 S_p 、像差常數 q_{pn} 、和線束因子 T_{pkn} 來描繪。 S_0 是代表 petzval 係數， S_1 是代表各向異性項， S_2 是代表各向同性項。

II. 簡正形式下的像差係數中，將有關場的分佈、空間電荷分佈和高斯軌跡的分佈很明顯地劃分開來。這種結果是有助於今後我們對像差校正的討論。

III. 雖然在有空間電荷時，傍軸軌跡方程中仍不出現電位的二次微商和軌跡的一次微商。這給我們帶來了很大的好處。 V'' 的不出現，可提高計算高斯軌跡的精確度。

而 W' 的不出現則是更利於數值積分。因此簡正形式下像差係數的計算比從 Glaser 或 Scherzer 的結果出發計算要精確而且簡便得多。

最後,願對我的導師蘇聯專家 О. И. Семан 所給予的辛勤指導和熱情幫助,表示衷心的感謝。且感謝吳全德老師對我的幫助。

參 考 文 獻

- [1] Glaser, W., *Ann. Der. phys.* **18** (1933), 557.
- [2] Glaser, W., *Zs. f. phys.* **97** (1935), 177.
- [3] Scherzer, O., *Zs. f. phys.* **101** (1936), 593.
- [4] Страшкевич, А. М., *Изв. АН СССР*, **4** (1951), 448.
- [5] Семан, О. И., *ДАН СССР*, **81** (1951), 775.
- [6] Семан, О. И., *ДАН СССР*, **96** (1954), 1151.
- [7] Страшкевич, А. М., *ЖТФ*, **12** (1954), 2271.
- [8] Семан, О. И., 電子光學理論基礎 (北京大學講稿) (1957), 北京 (將出版)。

ОБ АБЕРРАЦИЯХ В ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЁМНЫХ ЗАРЯДОВ

Ё Фу-дэн

(Физический факультет Пекинского Университета)

Резюме

Исходя из понятия точечного эйконала рассмотрено влияние свободных объёмных зарядов, вызванных различными факторами, на качество отображения системы. В работе предполагалось, что распределение объёмных зарядов является вращательно-симметричным и выражено в виде аналитической функции. Получены формулы различных частных видов аберраций в системах с объёмными зарядами при использовании вариационного принципа и нормальной формы.

Автор выражает благодарность советскому специалисту О. И. Семану за руководство и помощь в работе.