

## 湍流理論的近代發展\*

周 培 源

(北京大學數學力學系)

## 摘 要

這篇論文的内容是關於不可壓縮流體的湍流理論近代發展的綜合性介紹與分析。我們首先評述了根據 Reynolds 的平均運動方程所建立的混合長度理論。其次,分析關於均勻各向同性湍流的主要理論工作。第三,討論了運用 Reynolds 的平均運動方程和根據速度漲落方程求得的速度關聯函數的動力學方程來處理具有 Reynolds 剪應力的普通湍流運動問題。同時說明這個方法雖然能夠給出比混合長度理論與實驗較為接近的理論結果並能提出速度漲落平方平均值的理論分佈,但是由於在求出的速度關聯的動力學方程中出現高次元的速度關聯,它繼續地導致不封閉的微分方程組因而遇到不易克服的困難。因此,從以上湍流理論發展的回顧和最近關於均勻各向同性湍流在後期衰變運動的渦性結構工作,我們的最後提出了對今後湍流理論研究工作的新看法:湍流運動的基本組成部分是流體粘性作用所引起的渦旋運動;這個渦旋運動的動力學根據是用平均的方法從 Navier-Stokes 方程所導出的 Reynolds 的平均運動方程與速度漲落方程。我們並着重說明 Reynolds 認識到湍流運動可分作平均運動與漲落運動的重要性。今後的理論工作則在於求這兩組動力學方程的渦旋運動解,而這種類型的解並須滿足像 Колмогоров 在高 Reynolds 數運動的局部各向同性湍流理論中所提出的統計條件,方能使解滿足惟一性並可與實驗結果相比較。

## 引 言

流體的湍流運動現象,很早就自然界中被觀察到。在文學作品的描寫或報章刊物的記載中,我們常用“水流湍急”的詞句來說明流量大、速度高的水流狀況。但是流體力學工作者對湍流的系統研究工作,則自 Reynolds 在十九世紀末才開始。由於湍流現象在自然界和氣象、航空、水利、化工等建設事業中出現的普遍性,湍流運動是流體力學的基本問題之一;湍流運動規律的掌握與運用,對國民經濟的發展來說,也有極重要的意義。本論文的目的是在於介紹自 Reynolds 以來湍流理論發展的線索,在過去的 60 多年裏提出了哪些主要基本概念、用哪些方法要解決什麼問題。特別在本世紀

\*1957 年 2 月 23 日收到。此文曾在 1957 年 2 月舉行的第一次全國力學學術報告會議上報告。

三十年代以後 Taylor 與 von Kármán 開始了均勻各向同性湍流的研究工作起，在全世界的範圍內流體力學工作者發表了許多篇湍流運動的理論與實驗論文，因而開闢了湍流的近代發展時期。本論文的目的在於對以往湍流理論研究的回顧與分析，從而定出我們今後工作的新方向。

## 一. Reynolds 的平均流動方程與湍流的混合長度理論

當流體，即氣體與液體，作高度運動，或說得更確切一些，當流體運動有較高的 Reynolds 數的時候，流體中就會出現湍流運動的現象。我們可以拿在以半徑為  $a$  的管道中的流體作例子。以  $u_0$  代表在管道中的平均流速， $\nu$  代表流體的運動粘性係數。如果流體流動的 Reynolds 數  $au_0/\nu$  超過了 1400 之後，原來在管道中的片流一般就會變成湍流。湍流現象的特徵是：在壓力作用之下管道中的流體除了以一個平均的速度從壓力高的一邊流向壓力低的一邊之外，在這個平均的流動上還疊加了一個非常不規則的流體運動，稱作漲落運動。這種漲落運動的速度一般比流體的平均速度為小。管道中平均流動速度在管道截面上的分佈是不均勻的。這個平均速度分佈的不均勻性是和湍流運動中的能量傳輸有着密切聯系。流體平均速度的陡度規定流體元素的變形與轉動，而流體平均速度的變形與轉動又是流體從平均運動傳輸能量到漲落運動的過程。流體的漲落運動本身也有它各種不同的尺度，能量也從比較大的尺度的運動傳輸到較小的尺度。故在一個水平的管道中由於和兩頭有不同的常數壓力差所聯系着的流體平均運動的能量，能夠通過管道中流體元素的變形與轉動傳輸到速度的漲落運動，後者又通過各種不同級尺度的漲落運動，逐級傳輸到尺度最小的一級粘性流動而最後耗損為熱能。

當然，在沒有平均速度陡度的流體運動中，也可以產生具有速度漲落的湍流運動現象。如果我們拿一個格子在一個裝滿靜止的流體的匣子中用力一耙，那末匣子中的流體就會做不規則的湍流漲落運動，而在匣子裏的流體是沒有平均速度的。同樣，在風洞中格子後面的湍流運動也屬於這個類型。在風洞內流動的流體可有一個常數平均速度。如果採取一個坐標系和流體在一起作常數平均速度運動，則在這個坐標系裏的湍流運動的現象是和匣子中沒有平均流動的湍流運動一樣的。這種湍流運動稱作均勻各向同性湍流運動，它在時間的過程中由於粘性的作用而逐漸衰變，直到湍流的動能完全耗損而運動最後停止為止。

我們採取笛卡兒坐標  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )，並用笛卡兒張量符號來討論不可壓縮的流體運動。令  $\rho$  代表流體的常數密度， $u_i$  為流體的速度分量， $p$  為流體的壓力， $\nu$  為

流體的運動粘性係數。流體的運動滿足 Navier-Stokes 方程與連續方程如下：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{j,i} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu \nabla^2 u_i, \quad u_{j,i} = 0, \quad (1.1)$$

其中  $u_{j,i}$  代表速度  $u_i$  對坐標  $x_j$  的偏微商。為了書寫方便起見，在本論文中，我們也採用張量分析中的約定求和規則。

本報告限制於不可壓縮流體的湍流運動的討論。當然，可壓縮流體中也有湍流運動現象存在。但是這方面的流體運動問題，則更為複雜。

Reynolds 把作湍流運動的流體的速度  $u_i$  與壓力  $p$  分作平均速度與速度漲落，和平均壓力與壓力漲落兩部分：

$$u_i = U_i + W_i, \quad p = P + \tilde{p}. \quad (1.2)$$

平均速度  $U_i$  與平均壓力  $P$  可以當作對時間的平均或坐標的平均值，即

$$\left. \begin{aligned} U_i = \bar{u}_i &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i dt \text{ 或 } U_i = \frac{1}{V} \iiint u_i d\tau; \\ P = \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p dt \text{ 或 } P = \frac{1}{V} \iiint p d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

式中  $T$  為時間的間隔，在這個時間的間隔內，湍流的漲落運動可有好幾個週期； $V$  代表流體的體積， $d\tau$  為體積元素，在這一個  $V$  的體積中湍流的漲落運動可有許多個波長。不論在時間或在坐標上平均，平均速度與平均壓力是有確定的意義的。

把速度  $u_i$  與壓力  $p$  自方程 (1.2) 的形式代入 Navier-Stokes 方程及連續方程，並取它們的平均值，乃得流體平均運動的 Reynolds 運動方程<sup>[1]</sup>：

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{j,i} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij,i} + \nu \nabla^2 U_i, \quad U_{j,i} = 0, \quad (1.4)$$

式中  $\tau_{ij} = -\rho \overline{w_i w_j}$  代表 Reynolds 應力或稱似應力。方程式右邊的最後一項是作用在流體上的粘性力。除非在管道牆壁的附近，粘滯性應力要遠比作用在流體上的 Reynolds 應力為小。從 Reynolds 應力的定義看來，它是由於流體的漲落運動的動量交換所引起的，這樣一個圖案是和流體的片流運動中由於分子不規則的運動流體間的動量交換所產生的粘滯性應力一樣。但是湍流中的 Reynolds 應力和湍流中的粘滯性應力有本質上的不同。分子運動是物理學中的微觀現象，而湍流中的漲落運動是“流體團”或“渦旋”運動，每個“流體團”或“渦旋”包括許許多多的氣體或液體的分子，所以是物理學中的宏觀現象；這兩種運動的尺度有很大的差別。湍流漲落運動的波長或渦旋的大小要比分子運動的平均自由程大的多，因此湍流運動中的磨擦阻力要比片流中的粘性阻力的數值也大得多。

把流體的速度及壓力在時間或坐標上平均是取它們平均值最簡單的方法<sup>[2]</sup>。如果平均用所採取的時間比較長、體積比較大或相應地說湍流漲落運動的週期比較短、渦旋的尺寸比較小，那末根據物理學中各態經歷假說，時間平均與坐標平均是等價的<sup>[3]</sup>。數學與流體力學工作者也曾採用了更精密的概率論中隨機過程方法來取速度、壓力與運動方程的平均值<sup>[3,4]</sup>，他們所得的結果和用現在較為簡單的平均方法所獲得的結果基本上是一樣的。

顯然，平均運動方程 (1.4) 中的 Reynolds 應力  $\tau_{ij}$  是未知函數，問題是在於如何來求出它的函數形式或它和平均速度  $U_i$  以及  $U_i$  對時間及坐標導數的關係。混合長度理論<sup>[5]</sup> 的目的就是在於求出這個關係。按照這個理論，在做漲落運動的小流體團把能够被輸送的物理量如動量、渦量、動能和溫度等，從這流體的一部分輸送到另一部分。在被輸送前，這些物理量的數值是和周圍流體的平均數量相等；在被輸送到另一部分之後，由於漲落運動的交換，它們的數值又與在新環境流體的這些物理量的平均值相等。這個圖案很像在分子運動中分子通過不規則的碰撞運動，傳輸它的動量與能量給其它分子一樣；現在的混合長度相當於分子運動中的平均自由程。當然，流體團混合長度的尺寸要比分子平均自由程大得多。

我們今討論沿着  $x$  軸作平均運動的特殊情形，平均速度  $U$  只是  $y$  的函數。以  $u, v$  各代表流體沿着  $x$  軸與  $y$  軸的漲落速度。考慮在  $y_1, y_2$  二鄰點間的動量輸送過程。Reynolds 應力  $\tau_{xy}$  可寫作下列平均值的形式，

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{uv} = -\rho \overline{v[U(y_2) - U(y_1)]}.$$

把平均速度  $U$  在  $y_2$  點用  $y_2 - y_1$  的幕級數展開並只近似地取第一項乃得

$$\tau_{xy} = \rho l' v' \frac{dU}{dy}, \quad (1.5)$$

其中  $\rho l' v'$  代表湍性係數。這樣一個湍性係數的形式在大氣運動的理論中是早已有人提出過<sup>[6]</sup>，係數中的  $l'$  是一個長度， $v'$  是速度。顯然在形式上 (1.5) 中的湍性係數類似片流中的粘性係數，但是它不是一個常數。在這裏 Prandtl 提出了他的動量轉移的理論。他假定速度漲落在  $y$  軸上的分量  $v$  的數值  $v'$  是和  $u$  的數值相仿<sup>[7]</sup>。為此令

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy}, \quad (1.6)$$

式中  $l$  代表混合長度的數值，它是一個未知函數。

在 Prandtl 的原來理論中他假定未知長度  $l$  是直接與坐標有關。流體如在槽或圓

管中作湍流運動時，他假定  $l$  是和離牆的距離成正比。把 (1.6) 中這樣的應力形式代入平均運動方程 (1.4) 中去，平均運動的速度分佈就能在適當的邊界條件下獲得解。但是 von Kármán 認為混合長度  $l$  不應是坐標的顯函數，而應與流場的性質有關。他提出了力學的相似性理論來確定混合長度  $l$  與流場的關係。按照這樣的看法  $l$  須和平均速度  $U$  的坐標梯度有關。它們最簡單的函數關係是<sup>[8]</sup>

$$l = K \left| \frac{dU}{dy} / \frac{d^2U}{dy^2} \right|, \quad (1.7)$$

其中  $K$  是一個常數。這樣的混合長度的形式是和平均速度  $U$  的尺度無關的， $U$  數值的大小並不影響  $l$  數值的大小。

Prandtl 和 Kármán 的理論在槽或管道中的應用，靠近牆不遠，都能得出與實驗基本上相符合的湍流平均速度的對數分佈定律。Kármán 的相似性理論雖然比 Prandtl 的原有理論較為完整，但仍舊有它的缺點。在噴注或物體的尾流中，平均速度分佈有  $\frac{dU}{dy}$  不等於零，而  $\frac{d^2U}{dy^2}$  却等於零的地方。在這個地方的混合長度就趨向無窮大，因而不可能與事實相符。再流場相似性的條件不可能確定所導出的 (1.7)  $l$  的式樣是惟一的； $l$  也可以用  $\left| \frac{d^2U}{dy^2} / \frac{d^3U}{dy^3} \right|$  或其他的公式來代表。關於這一點，Goldstein 曾提出詳細的討論<sup>[9]</sup>。

和動量輸送理論相平行的有 Taylor 的渦量輸送理論。平均運動方程 (1.4) 也可以寫作

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} - \frac{1}{2} q^2_{,i} - \overline{w_i w_{ij}} + \nu \nabla^2 U_i, \quad (1.8)$$

其中  $q^2$  是速度漲落數值的平方  $w_i w_i$ ,  $w_{ij}$  是渦量  $w_{i,j} - w_{j,i}$ 。方程式右邊的第三項相當於平均運動方程 (1.4) 中 Reynolds 應力一項。根據混合長度理論的基本概念，Taylor 先後提出了渦量輸送理論與簡化了的修正渦量輸送理論<sup>[10]</sup>。從他的修正渦量輸送理論，得出湍流中的應力作用具有以下形式：

$$\overline{w_i w_{ij}} = -\overline{w_j(x_k - a_k)} Q_{ij,k}, \quad (1.9)$$

其中  $Q_{ij}$  是平均速度的渦量  $U_{i,j} - U_{j,i}$ ,  $a_k$  是流體在輸送渦量前原有的坐標， $x_k$  為流體在輸送渦量後、並與周圍流體混合時的坐標。在沿着  $x$  軸運動的平均速度分佈的特例中，湍流由於漲落運動輸送到每單位體積內的動量（即相當於平均運動方程中  $\frac{d\tau_{xy}}{dy}$  項）是  $\rho l^2 \left| \frac{dU}{dy^2} \right| \frac{d^2U}{dy}$ ，其中  $l$  是未知混合長度。如同在 Prandtl 的動量輸送理論一樣，Taylor 在槽或管道的湍流運動問題中，也假定了  $l$  是和離牆的距離成正比。用動量輸送與渦量輸送的理論，流體力學工作者曾計算出許多湍流運動的流動場與溫度

場的分佈<sup>[5]</sup>；在有些問題上動量輸送理論比較好，而在有些其他的問題上渦量輸送理論則與實驗比較更相符合。

混合長度理論雖然對平均速度分佈能夠給出一定的理論結果，因而在工程上和氣象學中有廣泛的應用，但是它有它的基本困難。按照這個理論，湍流的速度漲落是和平均速度的坐標陡度有關；如果平均速度是均勻的，則速度漲落就不存在。可是在均勻各向同性的湍流中，平均速度就沒有陡度，但仍有湍流的速度漲落現象。即使在具有平均速度陡度的湍流運動問題中，混合長度理論也不可能定出與實驗相近的速度漲落平方的平均值。

## 二. 均勻各向同性的湍流理論

不論混合長度的動量輸送或渦量輸送理論在槽或管道中的應用，都有這樣一個特點：它們都不考慮到流體的粘滯性質。雖然組成湍流運動的速度漲落或渦旋運動是和流體的粘性有密切關係，但是在槽或管道裏的依混合長度理論計算出的平均速度分佈是和實驗結果大致符合。換句話說，如以  $U$  代表流體在槽或圓管中某處的速度， $U_c$  為槽或圓管中心的最高速度， $U_r$  為摩擦速度（它在槽或管道牆上的湍流阻力  $\tau_0$  成  $\tau_0 = \rho U_r^2$  的關係）， $r$  為離槽或圓管中心某處的距離， $2a$  為槽的寬度或圓管的直徑，則根據實驗， $\frac{(U_c - U)}{U_r}$  只是  $\frac{r}{a}$  的函數，而一般與流體的粘性以及平均運動的 Reynolds 數的數值無關。

另一方面，如果我們同時考慮到粘性應力和 Reynolds 應力在流體中的作用，則很容易看出不可能從一個流場的速度分佈用改變流場的速度與流場大小尺度的方法來求出另一流場的速度分佈。我們可以拿流體中的能量耗損例子來說明這問題。以  $\mu$  代表流體的粘性係數， $u_1$  為流場的特徵速度， $l_1$  是一個特徵長度。如以速度矢量內乘 Navier-Stokes 方程 (1.1)，則方程式的右邊具有粘性係數的一項代表每單位體積內的流體在每單位時間內由於粘性作用的能量耗損，稱作能量耗損率。這個能量粘性耗損率是和  $\frac{\mu u_1^2}{l_1}$  成正比。同樣的，如果我們求平均速度矢量與平均運動方程 (1.4) 的內積，則由於 Reynolds 應力作用在每單位體積內，在每單位時間中的功是和  $\frac{\rho u_1^3}{l_1}$  成正比。這說明我們不可能從一種速度分佈的能量耗損——包括粘性片流運動與性質不同的湍流運動——用改變流場速度與它的大小的尺度來一般地求出另一種流場速度分佈的能量耗損。

和在壓力作用下在槽或管道中不同的運動，是均勻各向同性湍流的運動。如同在前節中所提出的例子，用格子在裝滿了流體的一個匣子中所耙出的或在風洞中格子後

面的流體運動,就是均勻各向同性湍流運動。在這種均勻各向同性的湍流運動裏, Reynolds 應力的剪應力分量  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 雖等於零,但是流體的粘性對湍流的能量耗損則起決定性的作用。Taylor 是第一位流體力學家系統地用實驗與理論的方法來研究湍流的平均粘性能量耗損率。他考慮到這種湍流的均勻性,即能量耗損率的平均值在坐標系的位移變換下,是一個不變量;再考慮到這個能量耗損率的平均值由於湍流的各個方向的相同性是和方向無關,它在坐標系的剛體轉動與反射變換之下,也是一個不變量。根據湍流的均勻與各向同性的條件, Taylor 得出如下的能量耗損,或稱能量衰變定律<sup>[11]</sup>:

$$\frac{d\bar{u}^2}{dt} = -10\nu \frac{\bar{u}^2}{\lambda^2}, \quad (2.1)$$

其中  $u$  代表沿任一軸線的速度漲落分量,並因各向同性的條件滿足:  $\bar{u}^2 = \bar{u}_1^2 = \bar{u}_2^2 = \bar{u}_3^2$  的關係;  $\lambda$  是一未知函數,是一個長度,被 Taylor 稱作湍流的微尺度;它也可被解釋為與組成湍流的渦旋的大小成正比。在以上能量衰變定律中,  $\bar{u}^2$  與  $\lambda$  都是時間  $t$  的未知函數。Taylor 曾用量綱分析的方法來規定  $\lambda$  與  $\bar{u}^2$  的關係,因而規定了 (2.1) 的積分。

但是在實驗室裏我們不僅要知道湍流的能量衰變,我們還要知道渦量在時間過程中的衰變。這一些物理量,都可以計算出來,如果我們能夠求得兩個不同點之間的二元速度關聯。

如以  $u_i$  代表在  $P$  點當時間  $t$  的流體速度,  $u'_j$  為另一點  $P'$  處流體在同一時間  $t$  的速度,則  $P$  與  $P'$  兩點之間的二元速度關聯  $R_{ij}$  是乘積  $u_i u'_j$  的平均值,即

$$R_{ij} = \overline{u_i u'_j}, \quad (2.2)$$

式中二元速度關聯的平均方法是和取速度平均值與求 Reynolds 應力的方法一樣。由於湍流滿足各向同性的條件,在同一點  $P$  的二元速度關聯  $\overline{u_i u_j}$  等於  $\bar{u}^2 \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij} = 1$ , 如  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$ , 如  $i \neq j$ )。其中  $\bar{u}^2$  和能量衰變定律 (2.1) 中的  $\bar{u}^2$  具有同樣的物理意義。

二元速度關聯  $R_{ij}$  一般是  $P, P'$  兩點坐標的函數。但是在湍流須滿足均勻的條件下,  $R_{ij}$  只是兩點之間相對矢量  $r_i = x'_i - x_i$  與時間  $t$  的函數,因此它在坐標系的位移變換下而不改變它的數值。由於湍流具有各向同性的性質,  $R_{ij}$  可用下列張量表示<sup>[12]</sup>:

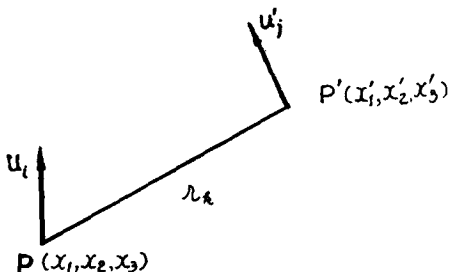


圖 1.

$$R_{ij} = \bar{u}^2 \left( \frac{f}{r^2} r_i r_j + g \delta_{ij} \right). \quad (2.3)$$

式中  $f$  和  $g$  是二標量；它們只是相對矢量  $r_i$  的標量  $r$  與時間  $t$  的函數；它們的物理意義（圖 2）可用下列二公式表出：

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_1 u'_1} &= \overline{u_1(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1 + r, x_2, x_3, t)} = \bar{u}^2 f(r, t), \\ \overline{u_2 u'_2} &= \overline{u_2(x_1, x_2, x_3, t) u_2(x_1 + r, x_2, x_3, t)} = \bar{u}^2 g(r, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$\bar{u}^2 f$   $\bar{u}^2 g$

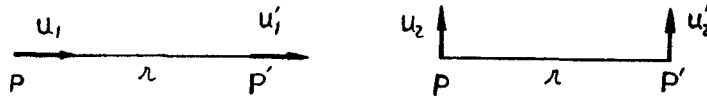


圖 2.

在  $P$  和  $P'$  點的速度分量  $u_i, u'_i$  都滿足連續方程。以  $u_i$  與  $u'_i$  所滿足的連續方程相乘並求乘積的平均值，再把對  $r_j$  來代替對  $x'_j$  的偏微商，乃得速度關聯  $R_{ij}$  所滿足的連續方程，

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} R_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij} = 0. \quad (2.5)$$

這個連續方程只有一個獨立的標量方程，它是函數  $f$  與  $g$  之間的關係，

$$g = f + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (2.6)$$

換句話說，速度關聯  $R_{ij}$  只需要一個標量函數  $f$  或  $g$  就能確定它的數值。

Kármán 不僅系統地探討了在均勻各向同性湍流中速度關聯的運動學的性質和它所滿足的連續方程 (2.5)，他又求得速度關聯  $R_{ij}$  所滿足的動力學方程<sup>[12]</sup>。事實上兩位蘇聯科學家 Фридман 和 Келлер 早在 1924 年就提出過求速度關聯所滿足的偏微分方程的方法<sup>[13]</sup>。但是 Kármán 是把這個方法用來處理均勻各向同性湍流運動問題的第一人。這個方法是把  $u_i$  和  $u'_i$  所滿足的 Navier-Stokes 方程相乘，把  $u'_j$  和  $u_i$  所滿足的 Navier-Stokes 方程相乘，再把二者相加並取它們的平均值，這樣就得到  $R_{ij}$  所滿足的動力學方程。在這個偏微分方程中，我們把對坐標  $x_k$  與  $x'_k$  的偏微商換成對相對坐標  $r_k$  的偏微商，由此所得出的結果是：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ij} - \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i u_k u'_j} - \overline{u_i u'_k u_j}) &= \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{p u'_j} - \frac{\partial}{\partial r_j} \overline{p' u_i} \right) + 2\nu \nabla^2 R_{ij}. \end{aligned} \quad (2.7)$$



此處 Laplace 算子  $\nabla^2$  是  $\frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k}$ .

方程式 (2.7) 中的壓力與速度漲落關聯  $\overline{pu'_i}$  或  $\overline{p'u_i}$  是和相對矢量  $r_i$  成正比; 它也須滿足連續方程, 並因在空間到處有限的條件下必須恆等於零<sup>[12,14]</sup>.

但是動力學方程式 (2.7) 本身不可能惟一地規定出二元速度關聯函數. 這因為 Navier-Stokes 方程是非線性方程, 用速度  $u_i$  或  $u'_i$  與它互乘再取平均值的方法, 使方程中的非線性慣性項就推導得方程 (2.7) 中的三元速度關聯函數  $S_{ikj} = \overline{u_i u_k u'_j}$  與  $\overline{u_i u'_k u_j}$ , 後者滿足對稱條件  $\overline{u_i u'_k u_j} = -\overline{u'_i u_k u_j}$ <sup>[12]</sup>. 而這些三元速度關聯也是未知函數. 因此在方程組 (2.7) 中, 未知函數的數目比方程式的數目為多.

三元速度關聯  $S_{ikj}$  也滿足下列連續方程:

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} S_{ikj} = \frac{\partial}{\partial r_i} S_{ikj} = 0. \quad (2.8)$$

由於  $S_{ikj}$  須滿足各向同性的性質, 它只有下列三個分量不恆等於零:

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_1^2 u'_1} &= \overline{u_1^2(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1+r, x_2, x_3, t)} = (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} k(r, t), \\ \overline{u_2^2 u'_1} &= \overline{u_2^2(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1+r, x_2, x_3, t)} = (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} h(r, t), \\ \overline{u_1 u_2 u'_2} &= \overline{u_1(x_1, x_2, x_3, t) u_2(x_1, x_2, x_3, t) u_2(x_1+r, x_2, x_3, t)} = (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} q(r, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

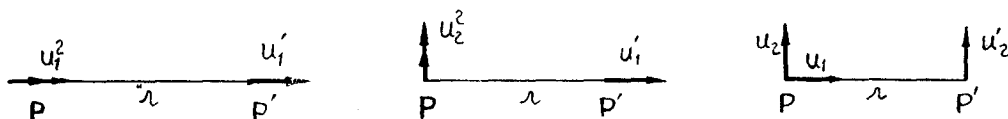


圖 3.

由於三元速度關聯  $S_{ikj}$  滿足連續方程, 故  $h = -2k$  與  $q = \frac{1}{4}(2k + rk')$ . 因而關聯函數  $S_{ikj}$  可表成  $k$  和  $k'$  的函數如下:

$$S_{ikj} = (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{k - rk'}{2r^3} r_i r_k r_j + \frac{2k + rk'}{4r} (r_i \delta_{kj} + r_k \delta_{ij}) - \frac{k}{2r} r_i \delta_{ik} \right], \quad (2.10)$$

$$(k' = \partial k / \partial r)$$

把二元與三元速度關聯代入動力學方程式 (2.7), 乃得聯系函數  $f$  與  $k$  的標量方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}^2 f) - (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{4k}{r} \right) = 2\nu \bar{u}^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (2.11)$$

我們很容易證明:  $k$  以  $r$  的冪級數的展開式的最初一項是與  $r^3$  成正比<sup>[12]</sup>; 當  $r = 0$  時,  $f = 1$ . 故如以  $r$  趨於零, 則運動方程 (2.11) 就變成 Taylor 的能量衰變定律 (2.1), 由此並得出  $f'_0 = -1/\lambda^2$  的關係.

微分方程 (2.11) 稱作 Kármán-Howarth 方程。從 Kármán 和 Howarth 發表這方程以來，流體力學工作者就一直想求它的解。由於在方程中有兩個未知函數  $\bar{u}^2 f$  與  $(\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} k$ ，故必須引進其他關係，它的解才能惟一地被確定。我們也可以考慮相似性解，即假定  $\bar{u}^2$  只是時間  $t$  的函數， $f$  與  $k$  為  $r/\lambda$  的函數。這樣雖然尚不能夠求得  $f$  和  $k$  的以  $r/\lambda$  作自變數的顯函數，但是這個相似性條件與能量衰變定律 (2.1) 結合在一起可得出  $\bar{u}^2, \lambda^2$  與時間的關係：

$$\lambda^2 = 10 \nu t, \quad \bar{u}^2 \sim 1/t. \quad (2.12)$$

這樣的能量耗損定律與湍微尺度  $\lambda$  的擴散關係式只能在湍流 Reynolds 數  $R_\lambda = \lambda \sqrt{\bar{u}^2}/\nu$  大的時候有效，也就是說，只有在湍流的衰變初期它們是和實驗結果相符合<sup>[15]</sup>。我們以後在第四節裏可以根據渦旋運動的理由來說明在物理上湍流不可能在各個時期有相似性運動。

相似性的假設在均勻各向同性湍流理論中的應用導致最重要結果的是 Колмогоров 的局部相似性理論<sup>[16]</sup>。他提出了在湍流作很高很高的 Reynolds 數運動時候，各種尺度不同或漲落周期不同的湍流成份是在平衡狀態中。湍流能量一般從大一級尺度的湍流運動傳輸到小一級尺度的湍流運動；這樣逐級傳遞下去直到最小的一級，而由流體粘性的作用耗損為熱能。一般地說，湍流最大級的尺度是和流體的容器有關，故不是各向同性的。當能量傳遞到最小級的漲落運動之後，在這一級的湍流運動就顯示出各向同性的性質。但是在這個能量逐級傳遞的過程中，流體的能量並不因流體的粘滯性作用而受到耗損。在他的局部各向同性相似性理論裏，Колмогоров 提出  $P, P'$  兩點之間的相對速度的二元及三元關聯函數， $\overline{(u'_i - u_i)(u'_j - u_j)}$  與  $\overline{(u'_i - u_i)(u'_j - u_j)(u'_k - u_k)}$ 。採用相對速度的關聯函數的好處是：湍流的平均速度——如果湍流有平均運動的話——可因兩個速度的互減而消去。因此相對速度的關聯函數要比一般速度的關聯函數為普通。假如二元及三元相對速度關聯函數也具有各向同性的性質，再因它們各滿足相應的連續性方程，則它們可用相當於一般各向同性的兩個函數  $f$  與  $k$  來表示。如果局部各向同性相似湍流也具有一般各向同性的性質，那末我們可用類似 (2.4) 與 (2.9) 的關係把局部各向同性與一般各向同性有關函數之間的關係表達出來：

$$\left. \begin{aligned} B_{aa}(r, t) &= [\overline{u_1(x_1+r, x_2, x_3, t) - u_1(x_1, x_2, x_3, t)}]^2 = 2\bar{u}^2 [1-f], \\ B_{aaa}(r, t) &= [\overline{u_1(x_1+r, x_2, x_3, t) - u_1(x_1, x_2, x_3, t)}]^3 = 6(\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} k. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Колмогоров 又假定湍流中的每單位質量內的能量變換  $\epsilon \left( = -\frac{3}{2} \frac{d\bar{u}^2}{dt} \right)$  與運動粘性係數  $\nu$  是兩個基本物理量，湍流的運動是和這兩個物理量有密切關係。從量綱

分析,他提出了一個速度  $v$  與一個長度  $\eta$ ;  $v$  和  $\eta$  可解釋成爲組成湍流最小渦旋的特徵速度與特徵長度,它們與  $\epsilon$  和  $\nu$  的關係是:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad v = (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.14)$$

根據相似性原理,局部各向同性湍流的二元與三元速度關聯可寫成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} B_{dd}(r, t) &= \nu^2 \beta_{dd} \left( \frac{r}{\eta} \right) = (\nu \epsilon)^{\frac{1}{2}} \beta_{dd} \left( \frac{r}{\eta} \right), \\ B_{ddd}(r, t) &= \nu^3 \beta_{ddd} \left( \frac{r}{\eta} \right) = (\nu \epsilon)^{\frac{3}{4}} \beta_{ddd} \left( \frac{r}{\eta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

其中  $\epsilon$  是時間  $t$  的函數。

Колмогоров 進一步指出,在極高的 Reynolds 數運動情況下並在  $r \gg \eta$  的區域內,湍流的關聯函數  $B_{dd}$  和  $B_{ddd}$  只依靠  $\epsilon$  而與運動粘性係數  $\nu$  無關。這樣一個條件導致下列關聯函數:

$$\left. \begin{aligned} B_{dd} &= C(\epsilon r)^{\frac{2}{3}}, \\ B_{ddd} &= C' \epsilon r. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

式中  $C$  與  $C'$  是二常數。由於關聯函數  $B_{dd}$  與  $r^{\frac{2}{3}}$  成正比,故這個關係也稱作 2/3 定律。

從 (2.16) 式中兩個速度關聯的函數形式,我們可證明偏斜因數

$$S(r, t) = \frac{B_{ddd}}{[B_{dd}]^{\frac{3}{2}}} = \frac{C'}{C^{\frac{3}{2}}} \quad (2.17)$$

是一個常數,並與時間  $t$  無關。

根據 Колмогоров 相似性的假定 (2.15) 並利用 Kármán-Howarth 動力學方程 (2.11),林家翹求得一個新的能量耗損規律<sup>[17]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^2 &= \frac{D_0}{10} \frac{1}{t} - u_D^2, \\ \lambda^2 &= 10 \nu t \left( 1 - 10 \frac{u_D^2 t}{D_0} \right), \\ R_\lambda &= R_{\lambda_0} \left( 1 - \frac{10 u_D^2}{D_0} t \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

其中  $D_0$ ,  $u_D^2$  都是積分常數。上面的能量耗損定律與湍流微尺度  $\lambda$  的擴散定律在運動開始時期 ( $t$  很小的時候) 是和 (2.12) 的定律相合的; 在時間的過程中,它們顯示出和湍流衰變初期的這兩個規律的區別。顯然 (2.18) 式中的規律不可能應用於所有的時間  $t$ , 這因為  $t$  大到一定的數值後就會使  $\lambda^2$  變成負數,因而與事實不符。

Колмогоров 的局部相似性理論比較完整地定出二元與三元速度相關函數與湍能衰變定律，這些理論上計算出的結果也基本上與 Townsend 的實驗相符合<sup>[18]</sup>。Batchelor 和 Townsend 也曾用實驗證明偏斜因數 (2.17) 的常數性質<sup>[19]</sup>。但是把 Колмогоров 的理論作進一步的計算並與 Townsend 的實驗相比較，則理論的計算與實驗結果仍有顯著的差別。陸祖蔭把局部相似性的假定 (2.15) 和偏斜性因數是常數的關係 (2.17) 代入 Kármán-Howarth 方程 (2.11) 中，就得出一個包含湍流 Reynolds 數  $R_\lambda (= \sqrt{\bar{u}^2} \lambda / \nu)$  的函數  $f$  所滿足的二階偏微分方程<sup>[20]</sup>。顯然  $f$  的解是和 Reynolds 數  $R_\lambda$  有關的。如果  $R_\lambda$  是無窮大，並略去方程式中帶有粘性的一項，那末就得到 Колмогоров 的解 (2.16)。但是在 Townsend 的實驗<sup>[18]</sup> 中  $R_\lambda$  只是 150；拿這個  $R_\lambda$  數來計算  $f$  函數所得出的理論結果，和由實驗量度出的函數來比，則有顯著的差別。

另一方面，Колмогоров 所提出的 (2.14) 式中的湍流的特徵長度  $\eta$  與特徵速度  $v$  不是惟一的。從量綱分析來考慮，莊逢甘曾提出下列兩種不同的特徵長度  $L$  與速度  $V$ <sup>[21]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} L &= \epsilon^2 (-\dot{\epsilon})^{-\frac{3}{2}}, & V &= \epsilon (-\dot{\epsilon})^{-\frac{1}{2}}, \\ \dot{\epsilon} &= \frac{d\epsilon}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中  $\epsilon$  就是 (2.14) 式中的  $\epsilon$ 。他假定關聯函數  $B_{dd}$  與  $B_{ddd}$  類似 (2.15) 一樣，也服從相似性條件而把  $L, V$  來代替 (2.15) 式中的  $\eta, v$ ；他進一步假定統計分佈函數是定常的，也就是說， $\beta_{dd}$  和  $\beta_{ddd}$  是與  $\epsilon$  無關。這樣能夠同樣地求到 (2.16) 式中的函數。從這樣一個相似性理論莊逢甘求得下列能量衰變與湍流尺度的擴散定律：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^2 &= \frac{2}{3} b_a + \frac{17}{15} \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{10/17} \left[ 1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17}}{17 \Lambda^{2/17}} t \right]^{-10/17}, \\ \lambda^2 &= 7\nu t + 17\nu \Lambda^{2/17} \epsilon_0^{-7/17} + \frac{10\nu b_a}{\epsilon_0} \left[ 1 + \frac{7 \epsilon_0^{7/17}}{17 \Lambda^{2/17}} t \right]^{17/7}; \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

此處  $b_a, \Lambda, \epsilon_0$  都是常數。

公式 (2.20) 中  $\bar{u}^2, \lambda^2$  的形式有這樣一個特點：如果取常數  $b_a$  等於零，則  $\lambda^2 = 7\nu t$ 。這個關係 Колмогоров 曾求得過<sup>[16]</sup>。如果  $b_a$  不等於零，則也可以得出接近於在湍流衰變初期 ( $t$  比較小) 的擴散定律 (2.12)。如果拿林家翹的公式 (2.18) 來比較，則  $\lambda^2 = 7\nu t$  的關係也可以認作湍流的衰變中期，即湍流 Reynolds 數  $R_\lambda$  較初期的 Reynolds 數為小時的湍流尺度的擴散定律。

均勻各向同性湍流理論的最完整部分，毫無疑問的是衰變後期的理論。湍流在這個時期裏的 Reynolds 數  $R_\lambda$  已比較小，所以 Kármán-Howarth 方程 (2.11) 中含有三元

速度關聯那一項可以略去。引進完全相似性的條件  $f = f(r/\lambda)$ ，其中  $\lambda$  為 Taylor 的湍流尺度，Kármán 和 Howarth 求得了  $f$  可表成爲匯合超幾何函數的解<sup>[12]</sup>。Ландау 和 Лифшиц<sup>[22]</sup> 提出了流體角動量必須是一常數的條件，因而從普通的匯合超幾何函數定出 Миллионшиков 的解<sup>[23]</sup>：

$$f = e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}, \quad \bar{u}^2 = \frac{A}{r^{5/2}}, \quad \lambda^2 = 4\nu t. \quad (2.21)$$

這個解是和 Batchelor 與 Townsend 的實驗相符合的<sup>[24]</sup>。他們並證明湍流的衰變後期是在  $R\lambda = 5$  時開始。

如以  $r^4$  乘  $\bar{u}^2 f$  並自  $r = 0$  到  $\infty$  積分，則從 (2.21) 式簡單的計算給出

$$\int_0^\infty \bar{u}^2 r^4 f dr = \Lambda \quad (2.22)$$

是一常數， $\Lambda$  也稱作 Лойцянский 不變量。這個不變量是由 Лойцянский 把  $r^4$  乘 Kármán-Howarth 方程 (2.11) 後直接積分，並假定  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^4 \bar{u}^2 = 0$  得出<sup>[25]</sup>。至於在一般  $R\lambda$  的均勻各向同性的湍流運動中  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^4 \bar{u}^2$  是否等於零，尙待進一步的研究，但是在湍流的衰變後期的運動中  $\Lambda$  是一個不變量。Batchelor 曾從  $\Lambda$  是一個有限常數的條件規定出 Миллионшиков 的解<sup>[26]</sup>。

以上的分析說明：湍流微尺度  $\lambda$  在三個衰變時期有三種不同的擴散規律： $\lambda^2 = 10\nu t$ ， $\lambda^2 = 7\nu t$  和  $\lambda^2 = 4\nu t$ 。Kármán 和林家翹把三個衰變時期分作三個頻率區<sup>[27]</sup>，並引進一個傳輸或湍渦擴散係數  $D$ 。在這三個頻率區裏他們假定有三種不同的特徵長度與特徵速度。在高頻率區裏有 Колмогоров 的  $\nu, \eta$  (2.14)；在中頻率區裏的特徵長度與速度是  $V = (D\epsilon)^{\frac{1}{3}}$ ， $L = (D^3/\epsilon)^{\frac{1}{3}}$ ；在低頻率區裏有  $V^* = (D^5/\Lambda)^{\frac{1}{3}}$ ， $L = (\Lambda/D^2)^{\frac{1}{3}}$ ，其中  $D = V^*L^* = VL$ ， $\Lambda$  是 Лойцянский 不變量。這樣，他們也得出這三個時期的能量衰變與湍流尺度的擴散規律。

關於在衰變後期組成均勻各向湍流的渦旋的渦性結構，將在本論文的第四節中進行討論。

均勻各向同性湍流運動問題求解的方法，也可從另一途徑進行。由於 Navier-Stokes 方程是非線性的，故二元速度關聯所滿足的微分方程 (2.7) 包含有新的三元速度關聯未知函數  $\overline{u_i u_k u_j'}$ 。我們可從 Navier-Stokes 方程 (1.1) 用同樣求 (2.7) 的方法，導出三元速度關聯所滿足的偏微分方程。在這組新方程中又出現了新的未知的  $P$  與  $P'$  兩點之間的四元速度關聯  $\overline{u_i u_j u_k u_l'}$  和  $\overline{u_i u_j u_k' u_l'}$ 。前一種的四元速度關聯也滿足連續方程

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \overline{u_i u_j u_k u'_l} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \overline{u_i u_j u_k n'_l} = 0. \quad (2.23)$$

如果在  $P$  與  $P'$  兩點的速度概率分佈，即各種不同大小與方向的速度漲落的概率分佈，是一個簡正或 Gauss 型分佈，則四元速度關聯可用表成三對兩個二元速度關聯乘積之和<sup>[28,38]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_i u_j u_k u'_l} &= \overline{u_i u_j u_k u_l} + \overline{u_i u_k u'_l u_j} + \overline{u_i u'_l u_j u_k}, \\ \overline{u_i u_j u'_k u'_l} &= \overline{u_i u_j u'_k u_l} + \overline{u_i u'_k u'_l u_j} + \overline{u_i u'_l u_j u'_k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

把四元速度關聯分解成三對兩個二元速度乘積之和，我們早在處理一般具有剪應力湍流運動的初期就提出過<sup>[43]</sup>。Миллионшиков 也曾建議過相同於 (2.24) 的關係<sup>[29]</sup>。利用以上的關係，Chandrasekhar 導出三元速度關聯所滿足的偏微分方程<sup>[30]</sup>，其中包含有二元速度關聯。雖然 Kármán-Howarth 方程 (2.11) 是線性的，但是這個新方程是非線性的。Chandrasekhar 復證明，當湍流的 Reynolds 數無窮大時，這理論也包括 Колмогоров 的  $\frac{2}{3}$  定律 (2.16) 作為它的近似解。這也說明 Колмогоров 局部相似性理論的重要意義。

Chandrasekhar 的理論雖然在數學方法上能够計算出二元與三元速度關聯函數，而且四元速度關聯與二元速度關聯之間的分析關係也有近似的實驗證明<sup>[31]</sup>，但是它尚不能被認為是完整的理論。因為從實驗的角度看來，我們不僅能够量度二元、三元及四元速度關聯，我們應當也可以量度出五元及五元以上的高次元速度關聯函數。這些高次元的速度關聯就超出了 Chandrasekhar 的理論範圍之外。

在時間或空間中有規則或不規則的物理過程，都可以用 Fourier 級數或 Fourier 積分的方法來分析它們的組成部分的性質。據此我們也可用 Fourier 分析來處理均勻各向同性湍流的運動問題。湍流的湍譜分析研究也自 Taylor 開始<sup>[32]</sup>，他在這方面的開拓性的工作在最初也獲得了實驗的證明<sup>[33]</sup>。在考慮到適當的收斂條件下，湍流的速度函數可用下列三度空間中的 Fourier 變換式寫出<sup>[34]</sup>：

$$u_i = \iiint e^{i k_m x_m} A_i(x_1, x_2, x_3, t) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (2.25)$$

其中  $\epsilon = \sqrt{-1}$ ， $k_i$  是湍譜空間中的頻率變數。上列變換式的反變換式是

$$A_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{-i k_m x_m} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2.26)$$

在兩個不同點  $P, P'$  之間之二元速度關聯  $R_{ij}$  和它的 Fourier 變換式是由下列二公式聯系着：

$$\left. \begin{aligned} R_{ij} &= \iiint \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3, t) e^{i k_m r_m} dk_1 dk_2 dk_3, \\ \Phi_{ij} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ij} e^{-i k_m r_m} dr_1 dr_2 dr_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

其中  $\Phi_{ij}$  與  $A_i, A_j$  的關係是

$$\Phi_{ij} = A_i^* A_j, \quad (2.28)$$

此處  $A_i^*$  是  $A_i$  的複共軛函數。

運用 Fourier 分析的方法，我們可以把在物理空間的湍流運動問題變換到湍譜的頻率空間去處理。一方面在頻率空間中的數學計算較為簡單，例如，有些微分關係變成代數關係；而另一方面我們可以在具有各種不同頻率的運動之間，提出能量轉移的假定。在頻率空間中二元速度關聯所滿足的連續方程 (2.5) 就簡化為

$$k_i \Phi_{ij} = 0. \quad (2.29)$$

因此各向同性的二元速度關聯  $R_{ij}$  的 Fourier 變換式  $\Phi_{ij}$  可寫作：

$$\Phi_{ij} = \frac{E(k, t)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j), \quad (2.30)$$

其中  $k^2 = k_i k_i$ ； $E(k)$  是流體每單位質量的動能的 Fourier 變換式，即

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \int_0^\infty E(k, t) dk. \quad (2.31)$$

從 (2.27)，(2.30) 和 (2.31) 也可以看出  $E(k, t)$  和  $\Phi_{ii}$  的關係：

$$\Phi_{ii} = \frac{E(k, t)}{2\pi k^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ii}(r_1, r_2, r_3, t) e^{-i k_m r_m} dr_1 dr_2 dr_3. \quad (2.32)$$

令

$$R_{ii} = \bar{u}^2(f + 2g) = \bar{u}^2 \left( 3f + r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = R(r, t), \quad (2.33)$$

則  $E(k, t)$  和  $R(r, t)$  是由下列變換式聯系着：

$$\left. \begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R(r, t) k r \sin k r dr, \\ R(r, t) &= 2 \int_0^\infty E(k, t) \frac{\sin k r}{k r} dk. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

從上列二式也可得  $E(k, t)$  和  $\bar{u}^2 f(r, t)$  的轉換式如下：

$$\left. \begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{u}^2 f(r, t) k^2 r^2 \left( \frac{\sin k r}{k r} - \cos k r \right) dr, \\ \bar{u}^2 f(r, t) &= 2 \int_0^\infty E(k, t) k^{-2} r^{-2} \left( \frac{\sin k r}{k r} - \cos k r \right) dk. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

同樣的，三元速度關聯  $S_{ijl}$  (2.10) 和 Fourier 變換可用下列各式表出：

$$\left. \begin{aligned} S_{ijl} &= \iiint \Gamma_{ijl} e^{i k_m r_m} dk_1 dk_2 dk_3, \\ \Gamma_{ijl} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint S_{ijl} e^{-i k_m r_m} dr_1 dr_2 dr_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

$\Gamma_{ijl}$  所滿足的並相當於 (2.8) 的連續方程是

$$k_l \Gamma_{ijl} = 0. \quad (2.37)$$

因而滿足各向同性條件的  $\Gamma_{ijl}$  是

$$\Gamma_{ijl} = \epsilon \Gamma(k, t) \left( k_i k_j k_l - \frac{1}{2} k^2 k_i \delta_{jl} - \frac{1}{2} k^2 k_j \delta_{il} \right). \quad (2.38)$$

令

$$S_{ijl} = \frac{1}{2} (\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\partial k(r, t)}{\partial r} + \frac{4}{r} k(r, t) \right] r_j = \frac{1}{2} K(r, t) r_j, \quad (2.39)$$

則從 (2.36), (2.38) 和 (2.39) 可求得變換式的關係，

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(k, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{k^6} \int_0^\infty \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r, t) k r \sin kr dr, \\ \text{和} \quad \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) K(r, t) &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty k^6 \Gamma(k, t) \frac{\sin kr}{kr} dk. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

動力學方程 (2.7) 在湍譜空間中也有它的 Fourier 變換式，它可寫成

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = \Gamma_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij}. \quad (2.41)$$

此處  $\Gamma_{ij}$  和三元速度關聯的關係式是

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{u_i u_k u'_j} - \overline{u_i u'_k u'_j}) = \iiint \Gamma_{ijl}(k_1, k_2, k_3, t) e^{i k_m r_m} dr_1 dr_2 dr_3, \\ \Gamma_{ij} &= \epsilon k_l [\Gamma_{ijl}(k_1, k_2, k_3, t) - \Gamma_{ijl}(-k_1, -k_2, -k_3, t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

由於湍流的各向同性性質，在湍譜空間中的動力學方程如同 (2.11) 一樣也只有一个標量方程，即

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t), \quad (2.43)$$

其中  $T(k, t)$  代表從其他所有各種頻率的能量轉移，它與  $\Gamma(k, t)$  的關係是

$$T(k, t) = 4\pi k^6 \Gamma(k, t). \quad (2.44)$$

均勻各向同性湍流在湍譜空間中的動力學方程 (2.43) 如同 Kármán-Howarth 方程 (2.11) 一樣，也不能惟一地定出能譜函數  $E(k, t)$ 。據此也必須在方程式 (2.43) 中引進新的假定才能獲得確定的解。在動力學方程 (2.43) 中的能量轉移項  $T(k, t)$  上最



初引進新假定的是 Обухов<sup>[35]</sup>。我們可以首先考慮湍流在高 Reynolds 數運動時的各種頻率運動的平衡問題，如同 Колмогоров 所討論的情形那樣。按照 Колмогоров 所提出的逐級湍流能量傳遞的圖案，流體的粘性作用是不在考慮之內。如以  $v_n, L_n$  代表第  $n$  級湍流的特徵速度與特徵長度，則依 Kármán-Howarth 方程中的傳遞能量的一項，即帶有三元速度關聯的一項是有  $v_n^3/L_n$  的形式，它依據 Колмогоров 的理論須是一常數，即

$$v_n \sim L_n^{\frac{1}{3}}, \quad v_n^2 \sim L_n^{\frac{2}{3}}. \quad (2.45)$$

如考慮 (2.31) 式中每單位質量上自頻率  $k$  到無窮大的能量，則得

$$\int_k^\infty E dk \sim v_n^2 \sim L_n^{\frac{2}{3}} \sim k^{-\frac{2}{3}}.$$

因此得

$$E \sim k^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.46)$$

這是 Weizsäcker<sup>[36]</sup> 和 Onsager<sup>[37]</sup> 所得出的湍流能譜分佈定律。它和物理空間中 Колмогоров 的  $\frac{2}{3}$  定律 (2.16) 是由 Fourier 轉換式 (2.35) 聯系着。

Heisenberg 對動力學方程 (2.43) 中的能量傳遞的那一項  $T(k, t)$  提出這樣的看法<sup>[38]</sup>：湍流中的能量傳遞是與流體的粘性片流運動相彷彿，類似粘性係數它也有一個湍性係數。Heisenberg 把方程式 (2.43) 對  $k$  自  $k=0$  到  $k=k$  積分，並把包含湍能頻率間傳遞的一項從量綱分析來考慮寫作

$$\int_0^k T(k', t) dk' = 2\gamma\rho \int_k^\infty k'^{-\frac{2}{3}} [E(k', t)]^{\frac{1}{2}} dk' \int_0^{k'} 2E(k'', t) k''^{\frac{1}{2}} dk''. \quad (2.47)$$

即把相當於片流中的粘性係數的湍性係數假定作

$$\eta_k = \gamma\rho \int_k^\infty k'^{-\frac{2}{3}} [E(k', t)]^{\frac{1}{2}} dk', \quad (2.48)$$

式中  $\gamma$  是一個常數。因此整個 Heisenberg 的方程可寫作：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k', t) dk' = -\left(\nu + \gamma \int_k^\infty k'^{-\frac{2}{3}} [E(k', t)]^{\frac{1}{2}} dk'\right) \int_0^{k'} 2E(k'', t) k''^{\frac{1}{2}} dk''. \quad (2.49)$$

Bass<sup>[39]</sup> 和 Chandrasekhar<sup>[40]</sup> 曾進行求 Heisenberg 的非線性的偏積分微分方程的解。Chandrasekhar 獲得了方程式 (2.49) 與時間  $t$  無關的穩定解的準確解，這個解在無窮大 Reynolds 數的情形下 ( $\nu = 0$ )，則趨近於漸近值  $k^{-\frac{5}{3}}$ ；如果  $\nu$  不等於零，則  $E(k) \sim k^{-7}$  (當  $k$  的數值比較大)。這也是 Heisenberg<sup>[38]</sup> 最初用近似方法獲得的漸近式。在帶有時間  $t$  的解中，Chandrasekhar 也引進相似性的條件而把 (2.49) 變成

一個常積分微分方程，它的一族解可用數字積分方法求出。

Stewart 和 Townsend<sup>[41]</sup> 曾量度出在各種不同 Reynolds 數情形下，各向同性湍流中的二元關聯函數與在各種不同頻率  $k$  的能譜分佈，並和各種現有的關於能量轉移項不同假定作了比較。按照他們的觀察只有在湍流衰變後期 ( $R_\lambda < 5$ ) 理論與實驗才完全符合，其它各種不同運動情況的湍流理論都有它們的局限性。

如同 Chandrasekhar 在物理空間中求出三元速度關聯所滿足的動力學方程並引進四元速度和二元速度關聯的關係 (2.24) 一樣，巽友正<sup>[42]</sup> 在頻率空間中曾用平行的方法處理均勻各向同性湍流的問題，並獲得了一個非線性的積分微分方程。但要找它的解，則比較困難。

### 三. 具有剪應力的普通湍流理論

在均勻各向同性的湍流運動現象中，流體的平均速度是一常數而沒有坐標陡度；Reynolds 應力的剪應力分量等於零，即  $\tau_{ii} = 0$  ( $i \neq j$ )。具有剪應力的普通湍流運動的平均流動速度一般都是坐標的函數，而 Reynolds 的剪應力是密切聯系着流體平均速度分佈在空間與時間中的改變。但是用速度關聯的方法來處理均勻各向同性湍流運動的研究工作，也帶動了普通湍流理論的前進。

除了 Reynolds 的平均運動方程 (1.4) 外，普通具有剪應力的湍流運動的動力學根據是平均運動方程和 Navier-Stokes 方程的差；它可被稱作速度漲落方程。它和速度漲落的連續方程可寫作<sup>[43]</sup>：

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + U_j w_{i,j} + w_j w_{i,j} + w_i U_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \overline{w_{,i}} - \frac{1}{\rho} \tau_{ii,j} + \nu \nabla^2 w_i, \quad (3.1)$$

$$w_{i,j} = 0; \quad \tau_{ii} = -\rho \overline{w_i w_i}.$$

這組偏微分方程確定湍流中的速度漲落  $w_i$  和平均速度  $U_i$  之間的關係以及它在 Reynolds 應力  $\tau_{ij}$  作用下的運動過程。方程式右邊的最後一項代表流體的粘性在速度漲落上的作用。Reynolds 應力前面的負符號如果以平均運動方程 (1.4) 中相仿的一項的正符號相比較，顯示出平均運動與速度漲落之間的部分相互作用，好像一整個力學系統中的作用與反作用的關係一樣。

如同在均勻各向同性湍流中求兩不同點之間的速度關聯所滿足的動力學方程一樣，我們可以從 (3.1) 式求在  $-P$  點的 Reynolds 應力  $\tau_{ik}$  所滿足的偏微分方程。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ik} - \frac{1}{\rho} U_j \tau_{ik,j} - \frac{1}{\rho} (U_{i,j} \tau_{ik} + U_{k,j} \tau_{ii}) + \overline{(w_i w_j w_k)_{,i}} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} (\overline{w_i w_k} + \overline{w_k w_i}) - 2\nu \overline{w_{i,j} w_{k,i}} - \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \tau_{ik}. \quad (3.2)$$

如以單位張量  $\delta_{ik}$  收縮上列方程, 乃得湍流漲落運動的能量方程,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{q^2} + \frac{1}{2} U_i \overline{q^2}_{,i} - \frac{1}{\rho} \tau_{ij} U_{i,j} + \left[ \left( \frac{\overline{w}}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 \right) w_j \right]_{,j} = \\ = -2\nu \overline{w_{i,j} w_{i,j}} + \frac{\nu}{2} \nabla^2 \overline{q^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中  $q^2 = w_i w_i$ .

由於速度漲落方程 (3.1) 是非線性的, 故二元速度關聯方程 (3.2) 中帶有三元速度關聯函數  $\overline{w_i w_j w_k}$ . 為此我們從 (3.1) 式進一步求出  $\overline{w_i w_j w_k}$  所滿足的偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{w_i w_k w_l} + U_j (\overline{w_i w_k w_l})_{,j} + U_{i,j} \overline{w_j w_k w_l} + U_{k,j} \overline{w_i w_j w_l} + \\ + U_{l,j} \overline{w_i w_j w_k} + (\overline{w_i w_j w_k w_l})_{,i} = -\frac{1}{\rho} (\overline{w_{,i} w_k w_l} + \\ + \overline{w_{,k} w_l w_i} + \overline{w_{,l} w_i w_k}) + \frac{1}{\rho^2} (\tau_{ij,j} \tau_{kl} + \tau_{kj,j} \tau_{li} + \\ + \tau_{li,j} \tau_{ik}) - 2\nu [\overline{w_{i,m} w_{k,m} w_l} + \overline{w_{k,m} w_{l,m} w_i} + \\ + \overline{w_{l,m} w_{i,m} w_k}] + \nu \nabla^2 \overline{w_i w_k w_l}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

在二元與三元速度漲落關聯的微分方程 (3.2) 與 (3.4) 二式中, 我們有三種未知函數: 它們是壓力漲落與速度漲落的關聯, 含有運動粘性係數  $\nu$  的衰變項以及四元速度關聯. 在最初運用方程式 (3.2) 與 (3.4) 處理湍流運動問題的時候, 我們對於兩種不同的湍流運動採用兩種不同的處理方法. 槽或管道中在壓力作用之下的湍流運動問題裏, 我們假定湍流平均運動的 Reynolds 數比較高, 可以不計由於粘性作用的能量衰變, 因而可以略去 (3.2) 與 (3.4) 式的帶有運動粘性係數  $\nu$  的各衰變項. 再假定<sup>[43]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \overline{w_{,i} w_k} &= 0, \quad \overline{w_{,i} w_k w_l} = c'_{ikl} + \kappa P_{,i} \overline{w_k w_l}, \\ \overline{w_i w_j w_k w_l} &= \frac{1}{2} (\overline{w_i w_j w_k w_l} + \overline{w_i w_k w_l w_j} + \overline{w_i w_l w_j w_k}). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中  $c'_{ikl}$ ,  $\kappa$  都是常數. 四元速度關聯與二元速度關聯的關係式中的  $1/2$  是根據速度漲落  $w_i$  都是時間或坐標的正弦函數得出. 如果用速度漲落的簡正的概分佈, 則  $1/2$  的因子須用 1 來代替<sup>[28], [29], [38]</sup>.

根據方程式 (1.4), (3.2) 與 (3.4) 以及 (3.5) 式中的假定, 在二元槽<sup>[43]</sup> 和圓

管<sup>[44]</sup>中所計算出的平均速度分佈是和在當時(1938年前)所有的實驗數據甚為脗合。

在另一類湍流運動問題中如尾流<sup>[45]</sup>、噴注<sup>[46]</sup>、半噴注<sup>[47]</sup>等等(這種運動也稱作自由湍流運動)由於流體粘性的作用,方程(3.2)中的衰變項不能略去,但是三元速度關聯則可不必準確地計算。據此在這一類的運動問題中,我們只運用(1.4)和動力學方程式(3.2),並把它所包含的衰變項  $\overline{v w_{i,j} w_{k,j}}$  用下列假定來代替:

$$\overline{v w_{i,j} w_{k,j}} = \nu \kappa' \overline{w_i w_j}. \quad (3.6)$$

此處  $\kappa'$  也是常數。在具體地解算運動問題時,我們把(3.2)式中三元速度和壓力漲落與速度關聯的一項從對稱的條件來考慮用某一點,或這一點附近的值來代替。這樣計算出的理論結果也和平均速度分佈的實驗量度相符合。

動力學方程(3.2)和(3.4)中的壓力漲落與速度漲落的關聯和粘性衰變項可用另一方法處理。從取速度漲落的矢量微分方程(3.1)的散度乃得速度漲落  $\tilde{\omega}$  所滿足的 Poisson 方程<sup>[48]</sup>,

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \tilde{\omega} = -2 U_{m,n} \overline{w_{n,m}} + (\overline{w'_m w'_n} - \overline{w_m w_n})_{,mn}. \quad (3.7)$$

很明顯的,如果把上列微分方程對  $x_k$  作偏微分,則  $\tilde{\omega}_{,k}$  也滿足相似的 Poisson 方程。這個方程的解可用積分形式寫出,從而我們並可計算出下列關聯函數的近似形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\overline{\tilde{\omega}_{,i} w'_k} + \overline{\tilde{\omega}_{,k} w'_i}) &= a_{nmik} U_{m,n} + b_{ik}, \\ \frac{1}{\rho} (\overline{\tilde{\omega}_{,i} w'_k w'_l} + \overline{\tilde{\omega}_{,k} w'_l w'_i} + \overline{\tilde{\omega}_{,l} w'_i w'_k}) &= b_{nmikl} U_{m,n} + c_{ikl}; \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中  $a_{nmik}$ ,  $b_{ik}$ ,  $b_{nmikl}$  和  $c_{ikl}$  皆是常數,並滿足下列連續關係:

$$a_{nnik} = 0, \quad a_{nmii} = 0, \quad b_{ii} = 0, \quad b_{nnikl} = 0. \quad (3.9)$$

關於粘性衰變的一項,我們從考慮兩不同點之間的二元速度關聯  $\overline{w_i w'_k}$  出發。我們假定:  $\overline{w_i w'_k}$  可用兩點之間的相對坐標  $r_j = x_j - x_i$  與 Taylor 的湍流的微尺度  $\lambda$  的比例  $r_j/\lambda$  的幕級數展開,並假定它是 Reynolds 應力  $\tau_{kl}$  的線性函數,這樣我們就求得

$$2\nu \overline{w_{i,m} w_{k,m}} = -\frac{2\nu}{3\lambda^2} (\kappa-5) \bar{q}^2 \delta_{ik} + \frac{2\nu\kappa}{\lambda^2} \overline{w_i w_k}, \quad (3.10)$$

其中  $\kappa$  是一常數,  $\bar{q}^2 = \overline{w_i w_i}$ 。由於所假定的兩個不同點之間的三元速度關聯特殊形式,方程(3.4)中帶有  $\nu$  的一項等於零<sup>[48]</sup>。

動力學方程(1.4)(3.2), (3.4)以及近似式(3.8)和(3.10)的假定曾用來解槽裏<sup>[49]</sup>、圓管裏<sup>[50]</sup>及沿着一平板<sup>[51]</sup>的湍流運動的平均速度分佈問題,並獲得與實驗相

符合的結果。在這三個應用中，我們曾略去有關的四元速度關聯函數。

處理速度漲落運動方程 (3.1) 另一種企圖是取它的旋度來消去對壓力漲落的陡度而求得湍流的渦量漲落方程，然後如同求出 (3.2) 一樣計算出二元渦量關聯所滿足的方程<sup>[52]</sup>。利用兩不同點之間的二元與三元速度的對  $r_i/\lambda$  冪級數的展開式，並在湍流漲落運動的能量方程 (3.3) 上引進一定的假定，即可得出規定平均速度  $U_i$  與 Reynolds 應力  $\tau_{ik}$  的微分方程。這組方程在均勻各向同性湍流上的應用給出渦量衰變的關係，此關係並有實驗的證明<sup>[53]</sup>。根據 (2.1) 和這個渦量衰變的關係，我們也可求得一個新的能量衰變規律，此規律 Седов<sup>[54]</sup> 曾用其他方法找到。但是在普通具有剪應力的湍流運動問題中，如解槽裏的壓力運動，用解渦量關聯方程的方法並不能獲得比較定量地與實驗符合的結果。

利用二元速度關聯方程 (3.2)，採取類似 (3.5) 式的壓力陡度與速度漲落關聯函數的近似展開式，再引進關於渦流團漲落運動的假定，Rotta 曾計算槽裏在壓力作用之下的定常湍流運動<sup>[55]</sup>。Emmons<sup>[56]</sup> 則在能量方程 (3.3) 中對 Reynolds 應力  $\tau_{ij}$ ，能量擴散項 [方程式 (3.3) 左邊最後的一項] 與能量衰變項 [(3.3) 式右邊第一項]，根據量綱分析引進一些假定，從而運用平均運動的方程 (1.4) 解算一些運動問題。他所引進的 Reynolds 應力與平均速度陡度的線性關係 (1.5) 早已在張國藩的理論<sup>[57]</sup> 中引用過，並在林家翹關於噴注的運動問題的解算內當作一個近似關係預見到<sup>[46]</sup>。

#### 四. 渦旋運動與湍流運動的統計理論

從以上的敘述來看，不難理解湍流運動是自然界很複雜的物理現象。但是在回顧了自 Reynolds 以來湍流理論的發展，我們可以提出三個問題。第一，什麼是流體湍流運動的基本組成部分；其次，湍流運動有何動力學上的依據；第三，在湍流的各組成部分上，是否需要一定的概率分佈。

第一，流體力學工作者很早就提出了，湍流運動是和流體的渦旋運動有着密切的聯系。Taylor 把湍流的微尺度  $\lambda$  解釋為組成湍流的最小的渦旋的大小<sup>[11]</sup>；Kolmogorov 在他的局部各向同性的理論中<sup>[16]</sup> 也提出了比  $\lambda$  還要小的渦旋的尺度  $\eta$ ；Synge 和林家翹<sup>[58]</sup> 曾用渦旋運動的圖案來說明均勻各向同性的湍流運動。他們採取了理想不可壓縮流體中的 Hill 球形渦旋運動作湍流元，並獲得與實驗基本上相符合的二元速度關聯函數。但是由於所採用 Hill 渦球的速度分佈是理想不可壓縮流體的定常解，他們不可能得出湍流的能量衰變規律，而同時以球形渦旋作湍流元的假定必要地導致三元速度關聯恆等於零的結果，這個結果是和實驗的量度不相符合。

根據線性化了之後的 Navier-Stokes 運動方程,我們求得了在粘性不可壓縮流體中的一族渦球運動解<sup>[59]</sup>。從渦量比較集中的渦球解,我們在角動量是常數的條件下導得組成湍流後期衰變時的軸對稱或不對稱的渦旋運動<sup>[60]</sup>。詳細的數學分析並證明渦旋運動的渦性結構密切地聯系着湍流的湍性結構:有相似的流線型,但有不同的渦量分佈的渦旋運動導致不同的速度關聯;相反地有相同的渦量分佈,但有不同的流線型的渦旋運動。則導致相等的速度關聯。

在後期衰變時的均勻各向同性湍流的湍性結構,既可用渦旋運動來說明,則從渦旋運動的角度來分析均勻各向同性湍流在初期以及中期衰變時的運動或非均勻的具有剪應力的普通湍流運動,仍有它的現實意義。當然,湍流微結構的尺度有大有小;頻率高、尺度小的湍流可接近流體的聲級振動,但是在大氣及江河中的湍流則可有較大尺寸的渦旋運動。在一般風洞實驗中 Taylor 的微湍流尺度  $\lambda$  有幾個毫米長,故比空氣分子的平均自由程仍要大得多。這樣的流體運動顯然是宏觀的物理現象。

其次,湍流既是宏觀的物理現象,則湍流的動力學的根據仍應是 Navier-Stokes 的運動方程。在片流穩定問題的研究工作上,根據 Navier-Stokes 方程所計算出的理論結果和實驗甚為符合<sup>[61]</sup>。均勻各向同性的湍流理論如 Kármán-Howarth 方程也以 Navier-Stokes 方程作理論基礎。Reynolds 從 Navier-Stokes 方程用平均的方法求得他的平均運動方程。由於平均運動方程只片面地考慮到 Reynolds 應力作用在湍流上所產生的影響,混合長度理論只能提供與實驗比較定性地符合的理論結果,並且無法說明速度漲落平方的平均值在湍流中的分佈。因此同時用平均運動方程和速度漲落運動方程為基礎的如在第三節中所提出的那些關於具有剪應力的一般湍流運動的理論,都能有與實驗較為接近的理論結果,並能初次從理論上提出速度漲落平方的平均值。

但是不論在均勻各向同性或一般具有剪應力的非均勻的湍流運動問題中,用從運動方程求出某一元的速度關聯所滿足的動力學方程的方法,如在第二和第三節中所指出的那樣,導致新的高次元速度關聯函數在方程中的出現,因而帶來了很難克服的困難。為此只能用相似性的假定以及量綱分析的方法近似地加以處理。事實上相似性的條件有它的局限性。在渦旋運動的問題中我們曾證明過嚴格的相似性解引導到渦旋能量和時間無限地增加的結果<sup>[59]</sup>。不論在均勻或不均勻的湍流中引進四元速度關聯與二元速度關聯之間的關係,也只能解決規定二元及三元速度關聯的動力學方程封閉性的問題。至於五元及其他高次元的速度關聯函數,則不在這組所導出的方程所考慮的範圍之內。但是從實驗的角度來看,這一系列的物理量是都可以被量度出來的。

從數學方法論來看湍流運動,直接解從 Navier-Stokes 方程導出的 Reynolds 的平均

運動方程以及速度漲落方程,然後再計算有關函數的平均值,可能成為今後湍流研究工作的新方向。根據線性化了之後的 Navier-Stokes 方程的渦旋運動解,來解釋均勻各向同性湍流後期衰變時的湍性結構<sup>[60]</sup>是一個例子。Burgess 關於解一個非線性的一元運動的微分方程的模型,企圖說明湍流性質的工作<sup>[62]</sup>,又是一個例子。

我們也必須從 Reynolds 平均運動及速度漲落方程的渦旋運動解,而不是一般普通的解,來尋求湍流運動問題的解。必須求渦旋運動解的物理根據是因為渦旋是湍流的基本組成部分;湍流的湍性結構既由渦旋的渦性結構來決定,故必須從對渦旋運動的認識來掌握湍流運動的性質。

在此我們也能够理解到 Reynolds 認識到一般湍流運動可分作平均與速度漲落運動的重要性。如果不從 Reynolds 的平均運動方程與速度漲落方程出發,而直接從 Navier-Stokes 方程來求普通湍流運動問題的解,會遇到極大的困難。Emmons 曾根據 Navier-Stokes 方程企圖解槽中的湍流運動問題而沒有能够獲得滿意的結果<sup>[63]</sup>。

最後,運動方程式的渦旋運動解尚須滿足一定的統計條件,才能導致與實驗可比較的理論結果。在均勻各向同性湍流的一般理論中,都引進相似性或其他統計條件來確定湍流解的唯一性。渦量的集中性與渦旋角動量守恆的條件確定了均勻各向同性湍流在後期衰變時的運動性質。對於作高 Reynolds 數的湍流運動——均勻的與非均勻的運動——來說,Колмогоров 的各級漲落運動能量傳遞的統計規律<sup>[16]</sup>可有它極重要的物理意義。

### 參 考 文 獻

- [1] Reynolds, O., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A 186** (1895), 123—164.
- [2] Lamb, H., *Hydrodynamics* 674—678 (1932).
- [3] Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, 14—17 (1953).
- [4] Liepmann, H. W., *Zeit. f. Ang. Math. u. Physik* **3** (1952), 321—342; 407—426. 這是一篇對於湍流問題的綜合報導;參考它所引證的關於應用隨機過程的文獻。
- [5] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, I, 205—214 (1938); II, 331—390, 581—600, 646—673 (1938).
- [6] Richardson, L. F., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 110** (1926), 709—737.
- [7] Prandtl, L., *Zeit. f. ang. Math. u. Mech.* **5** (1925), 136—139; *Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik (Zürich)*, 62—74 (1926).
- [8] Th. von Kármán, *Göttingen Nachrichten, Math.-Phy. Classe*, 58—76 (1930); *Proc. 3rd Int. Cong. for Appl. Mech.* (Stockholm), (1930), 85—93.
- [9] Goldstein, S., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 159** (1937), 473—496.
- [10] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 135** (1932), 685—700; **151** (1935), 494—512.
- [11] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 151** (1935), 421—478; **157** (1936), 537—546; *Jour. Aero. Sci.*, **4** (1937), 311—315; *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 164** (1938), 15—23.
- [12] Th. von Kármán, *Jour. Aero. Sci.* **4** (1937), 131—138; Th. von Kármán and Howarth, L., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 164** (1938), 192—215.
- [13] Keller, L. und Friedmann, A., *Proc. 1st Int. Cong. for Appl. Mech.* (Delft) (1924), 395—405.

- [14] Robertson, H. P., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **36** (1940), 209—223.
- [15] Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 193** (1948), 539—558.
- [16] Колмогоров, А. Н., *ДАН СССР* **30** (1941), 299—303; **31** (1941), 538—541; **32** (1941), 19—21; Batchelor, G. K., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43** (1947), 533—559.  
奧布霍夫與雅格洛姆(莊逢甘與胡海昌譯), 湍流的微結構, 1—4, 中國科學院出版 (1953).
- [17] 林家翹 (Lin, C. C.), *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **34** (1948), 540—543; *Proc. 7th Int. Congr. for Appl. Mech.* (London) (1948), 127.
- [18] Townsend, A. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44** (1948), 560—565.
- [19] Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 190** (1947), 534—550.
- [20] 陸祖蔭, 清華大學科學報告, **5** (1950), 451—458.
- [21] 莊逢甘, 物理學報, **9** (1953), 201—214.
- [22] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., *Механика сплошных сред*, (1954), 174—179.
- [23] Миллионников, М. Д., *ДАН СССР* **22** (1939), 236—240.
- [24] Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 194** (1948), 527—543.
- [25] Лойцянский Л. Г., *Труды ЦАГИ*, вып. 440 (1939).
- [26] Batchelor, G. K., *Quart. of Appl. Math.* **6** (1948), 97—116.
- [27] Th. von Kármán and Lin, C. C. (林家翹), *Rev. of Mod. Phys.*, **21** (1949), 516—519; *Advances in Applied Mechanics*, II, (1951), 1—19.
- [28] Batchelor, G. K., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47** (1951), 359—374. *The Theory of Homogeneous Turbulence*, 179 (1953).
- [29] Миллионников, М. Д., *ДАН СССР* **32** (1941), 611—614; 615—617.
- [30] Chandrasekhar, S., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 229** (1955), 1—19; *Phys. Rev.* **102** (1956), 941—952.
- [31] Uberoi, M. S., *Jour. Aero. Sci.* **20** (1953), 197—204.
- [32] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 164** (1937), 476—490.
- [33] Simmons, L. F. G. and Salter, C., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 165** (1938), 73—89.
- [34] Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, 23—54 (1953).
- [35] Обухов, А. М., *ДАН СССР* **32** (1941), 22—24.
- [36] Weizsäcker, C. F. V., *Zeit. f. Phys.*, **124** (1948), 614—627.
- [37] Onsager, L., *Phys. Rev.* **68** (1945), 286.
- [38] Heisenberg, W., *Zeit. f. Phys.* **124** (1948), 628—657; *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 195** (1948), 402—406.
- [39] Bass, J., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), 228—229.
- [40] Chandrasekhar, S., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 200** (1950), 20—33.
- [41] Stewart, R. W. and Townsend, A. A., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A 243** (1950), 359—386.
- [42] 巽友正 (Tomomasa Tatsumi), *4th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech.*, (1954); 307—311 *Proc. 9th Int. Cong. for Appl. Mech.* (Brussels) (1956).
- [43] 周培源, 中國物理學報, **4** (1940), 1—33.
- [44] 林家翹, “在圓管中壓力作用之下的湍流運動”(未發表).
- [45] 胡寧, 中國物理學報, **5** (1944), 1—29.
- [46] 林家翹, 清華大學科學報告, **4** (1947), 419—450.
- [47] 黃授書, 中國物理學報, **5** (1944), 105—123.
- [48] 周培源 (P. Y. Chou), *Quart. of Appl. Math.* **3** (1945), 38—54.
- [49] 周培源 (P. Y. Chou), *Quart. of Appl. Math.* **3** (1945), 198—209.
- [50] 張守廉, 中國物理學報 **5** (1944), 124—137.
- [51] 周培源 (P. Y. Chou), *Quart. of Appl. Math.* **5** (1947), 346—353.
- [52] 周培源, 清華大學科學報告, **5** (1948), 1—19.
- [53] Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 190** (1947), 534—550.
- [54] Седов, Л. И., *ДАН СССР* **42** (1944), 121—124.
- [55] Rotta, J., *Zeit. f. Phys.* **129** (1951), 547—572; **131** (1951), 51—77.
- [56] Eminons, H. W., *Proc. 2nd U. S. Nat. Cong. of Appl. Mech.*, (1954), 1—12.
- [57] 張國藩, 中國物理學報, **7** (1948), 176—191.



- [58] Syngé, J. L. and Lin, C. C. (林家翹), *Trans. of Roy. Soc. Canad. 3rd Ser. Sec. III* **37** (1943), 1—35.  
[59] 周培源, 蔡樹棠, 北京大學學報(自然科學), **1** (1956), 39—51.  
[60] 周培源, 蔡樹棠, 力學學報, **1** (1957), 3—4, 這篇論文曾在本屆力學會議與第九屆國際應用力學會議中宣讀。這種渦旋的一個特例的速度分佈也由 Phillips 獨立地求得 (Phillips, O. M., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **52** (1956), 135—151).  
[61] 林家翹 (C. C. Lin), *The Theory of Hydrodynamic Stability 及參考文獻* (1955).  
[62] Burgers, J. M., *Advances in Applied Mechanics*, **1**, 171—199 (1948).  
[63] Emmons, H. W., *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **1**, 67—71 (1949).

## MODERN DEVELOPMENTS IN THE THEORY OF TURBULENCE

CHOU PEI-YUAN

(Peking University)

### ABSTRACT

This is a critical exposition and analysis of the modern developments in the theory of turbulent motion of an incompressible fluid. We begin with the review of the mixture length theories based upon Reynolds' equations of mean motion. Secondly, we analyze the principal contributions to the theory of homogeneous isotropic turbulence. Thirdly, we discuss the treatment of the general turbulent shear flow by means of Reynolds' equations of mean motion and the dynamical equations of velocity correlations which are derived from the equations of turbulent velocity fluctuation. We also point out at the same time that although this method yields theoretical results which are in better agreement with experiment than the results of the mixture length theories and furthermore the theory also leads to the theoretical distributions of the mean squares of velocity fluctuation, on account of the presence of the higher order velocity correlations in the equations, it continuously leads to unclosed systems of differential equations and hence meets difficulties which are difficult to overcome. Therefore, based upon the above retrospect of the developments of the theory of turbulence and the recent work on the vorticity structure of the homogeneous isotropic turbulence in its final period of decay, we finally propose a new approach to the turbulence problem: The basic component motion of turbulence is vortex motion due to the action of viscosity of the fluid. The dynamical equations which govern the vortex motion of turbulence are Reynolds' equations of mean motion and the equations of velocity fluctuation derived from the Navier-Stokes equations by the averaging process. We also emphasize the importance of Reynolds' recognition that the turbulent motion of a fluid can be separated into the mean motion and fluctuation. The future theoretical investigation is to look for the vortex motions which are solutions of these two sets of equations. In order to make the solutions of the problem unique and comparable with experimental measurements, they should also satisfy statistical conditions on the distribution of vortices analogous to Kolmogoroff's condition in his statistical theory of locally isotropic turbulence at high Reynolds number turbulent flows.