

複合浸沒物鏡的電子光學性質和像差理論*

西門紀業

(北京大學)

提 要

浸沒物鏡系統包括了許多種用途很廣的電子光學儀器。本文研究了具有平面陰極的複合浸沒物鏡(並考慮了陰極上磁場強度不為零的情形)。本文中推導了複合浸沒物鏡線性方程和橫向像差方程,從而求出了總的三級橫向像差和各個特殊形式的像差係數,最後將結果化成為簡正形式。這樣就可以嚴格地討論複合浸沒物鏡的電子光學性質和像差。

一. 緒 論

隨着電子學的發展,出現了許多用途很廣的電子光學儀器,例如像變換器、電子槍、電子或離子的顯微投射器和發射式電子顯微鏡。這些儀器的陰極都處在電場中(有時還有磁場),並且發射初速度很小的電子。電子光學中通常把這樣的陰極稱為浸沒物鏡,而把包括這陰極和其他元件組成的電子光學系統稱為浸沒物鏡系統(上述幾種儀器均屬這類系統);若系統中同時存在電場和磁場,則稱為複合浸沒物鏡系統。

以下我們將浸沒物鏡系統簡稱為浸沒物鏡,它的特點如下:

第一,從陰極發出的電子具有不同的逸出角,因而軌跡的斜率可能是很大的(與陰極相切發出的電子軌跡的斜率趨於無窮)。可是,由於電子的初速度很小,所以它們從陰極發出後立刻受到場強烈的作用,使得軌跡的斜率急劇改變。這樣一來,從陰極發出的電子束在陰極附近區域中將受場的作用很快地集攏成為一細電子束,然後繼續在場中行進,最後在屏上成像。由此可見,浸沒物鏡中斜率很大(甚至可能趨於無窮)的電子也參加到成像的電子束中。

第二,如上所述,由於電子初速度很小,而場對電子的作用如此強烈,以致甚至和陰極相切發出的電子也參加到成像的電子束中,因此浸沒物鏡中通常不需要用光闌來限制電子束;所以本文限於討論沒有孔徑光闌的情形¹⁾。

* 1957年3月19日收到。

¹⁾ 文獻[7]中曾經討論了在浸沒物鏡中應用光闌來提高分辨本領的問題。

迄今為止,關於浸沒物鏡的理論研究工作主要的有以下幾篇文章. 1936 年 G. A. Morton 和 E. G. Ramberg^[1] 比較系統地研究了像變換器中的電子光學問題. 1941 年 A. Reknagel^[2] 系統地研究了靜電浸沒物鏡的理論並算出了它的像差. 1944 年 Л. А. Арцимович^[3] 研究了發射系統(即浸沒物鏡系統)中各種電子光學問題. A. Reknagel^[2] 和 Л. А. Арцимович^[3] 兩人的工作合起來奠定了浸沒物鏡嚴格理論之基礎. 不久之前, Ю. В. Воробьев^[4] 對於靜電浸沒物鏡的像差和散射圖形作了進一步的研究. 從以上介紹可以看出, 迄今為止, 多數的工作僅限於靜電浸沒物鏡, 而對於複合浸沒物鏡的研究却是很不完善的.

本文的任務就是要建立複合浸沒物鏡的理論, 從而將 A. Reknagel 和 Л. А. Арцимович 的工作加以推廣. 具體地講, 我們研究了具有平面陰極的複合浸沒物鏡, 並考慮了陰極上磁場強度不為零(即磁浸沒)的情形. 此外, 為完整起見, 我們還考慮了相對論修正(雖然在靠近陰極的區域中, 它沒有很大意義).

二. 實際軌跡方程

在無空間電荷情形下, 旋轉對稱的靜電場空間電勢 φ_* 可以用軸上電勢表示^[5,6]:

$$\varphi_*(z, r) = V_*(z) - \frac{1}{4} r^2 V''_*(z) + \frac{1}{64} r^4 V^{IV}_*(z) - \dots; \quad (1a)$$

由此還可以得出相對論電勢的展開式^[5,6]:

$$\varphi_p(z, r) = \varphi_*(1 + \eta \varphi_*) = V_p - \frac{1}{4} V''_* \delta r^2 + \frac{1}{64} [V^{IV}_* \delta + 4\eta V''_*{}^2] r^4 - \dots; \quad (1b)$$

其中, $\eta = \frac{e}{2m_0c^2}$, $V_p = V_*(z) [1 + \eta V_*(z)]$, $\delta = 1 + 2\eta V_*$. 這裏, e 為電子電荷絕對值, m_0 為電子的靜止質量, $V_*(z)$ 為規範化軸上電勢, c 為真空中的光速.

在無自由空間電流情形下, 旋轉對稱磁場中磁矢勢的方位角 (ϑ) 方向分量的空間分佈 $A_\vartheta(z, r)$ 可以用軸上磁場強度 $\mathcal{H}(z)$ 表示^[5,6]:

$$A_\vartheta(z, r)/r = \frac{1}{2} [\mathcal{H}(z) - \frac{1}{8} \mathcal{H}''(z) r^2 + \dots], \quad (2)$$

其中 $\mathcal{H}(z) = \sqrt{\eta} H(z)$, 而 $H(z)$ 是以高斯絕對單位計算的磁場強度.

我們選擇 z 軸和旋轉對稱系統的對稱軸重合, 而運動的電子的位置則用在垂直於 z 軸的平面中一個平面矢量 $\mathbf{r}(z)$ 表示(它從 z 軸量到電子所在處). 於是, 在旋轉對稱場中, 電子光學的折射率 μ 可以表述如下:

$$\mu = \{\varphi_p(1 + \mathbf{r}'^2)\}^{1/2} - \frac{A_\vartheta}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}').$$

根據電子光學中最小作用原理^[5,6]，沿着實際軌跡光程取極值，而這個變分問題的歐拉方程就是實際軌跡方程，其形式如下：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{\varphi_p^{1/2} \mathbf{r}'}{\sqrt{1+\mathbf{r}'^2}} \right] - \sqrt{1+\mathbf{r}'^2} \frac{\partial \varphi_p^{1/2}}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{r}^* \frac{d}{dz} \left(\frac{A_9}{r} \right) - \\ - 2\mathbf{r}'^* \left(\frac{A_9}{r} \right) + 2\mathbf{r} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^2} \left(\frac{A_9}{r} \right) \right] (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

這裏 $\mathbf{r}^* = \mathbf{K} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'^* = \mathbf{K} \times \mathbf{r}'$ ，而 $\mathbf{K}$ 是沿 z 軸正方向單位矢量。

由 (3) 可見，由於存在磁場實際軌跡方程中出現所謂的共軛矢量 $\mathbf{r}^*$, $\mathbf{r}'^*$ ，這樣不便於計算。為要消去軌跡方程 (3) 中的共軛矢量，我們仿照電子光學中通常的方法引進一個新的變換：

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} e^{-i\chi(z)} \quad \text{或} \quad \mathbf{r} = \mathbf{u} e^{i\chi(z)}; \quad (4a)$$

$$\chi(z) = \int_{z_a}^z \frac{A_9}{r} \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dz; \quad (4b)$$

其中 e 是自然對數的底數， i 是等於 $\sqrt{-1}$ ， $\chi(z)$ 是磁場所引起的電子軌跡的旋轉角度^[6]。實際上，這裏引進的 $\mathbf{u}$ 是隨着電子而旋轉的一個坐標系。利用 (4a,b) 的變換可將 (3) 式化成如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{2\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \mathbf{u}'' + \mathbf{u}' \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right) - \\ - 2\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^2} (\varphi_p - A_9^2) + 2 \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)^{1/2} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \mathbf{u} \left[2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^2} \left(\frac{A_9}{r} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5a)$$

這就是在旋轉坐標系 $\mathbf{u}(z)$ 中實際軌跡方程(其中不出現共軛矢量)，可以將它進一步化簡。若將 (5a) 式乘以 $\mathbf{u}$ ，就可以證明旋轉對稱場中轉動動量矩守恆關係式^[6]：

$$\left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)^{1/2} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \text{常數} = \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)_a^{1/2} (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}'_a) \quad (\text{在 } z_a \text{ 點之值}). \quad (5b)$$

由 (4a,b)，(5a,b) 可以得出如下公式：

$$\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} = \Phi - \mathbf{u}'^2 \frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2}, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (6a,b)$$

其中 Φ 是所謂的約化電勢，它等於

$$\Phi = \left[\varphi_p - A_9^2 - 2 \left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)_a^{1/2} (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}'_a) \frac{A_9}{r} \right]. \quad (7)$$

利用 (6b)，(7) 可以將 (5a) 式簡化如下：

$$\frac{2\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \mathbf{u}'' + \mathbf{u}' \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2\mathbf{u} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^2} = 0. \quad (8)$$

(8) 式就是在旋轉對稱的複合場中實際軌跡方程,它是我們以下全部討論的出發點。

三. 複合浸沒物鏡的線性方程和橫向像差方程

根據緒論所述可以知道,在靠近陰極的區域中,成像的電子束中有的電子軌跡的斜率可能很大(甚至趨於無窮)。這樣一來,浸沒物鏡便和通常的非浸沒物鏡系統迥然不同(因為在後者,對於旁軸軌跡有 $r'^2 \ll 1$ 的條件)。因此不能夠把通常研究非浸沒物鏡系統的方法直接應用到浸沒物鏡上,而必須從原則上加以改變,用另外的方式描寫浸沒物鏡的軌跡和像差。

在浸沒物鏡中,一方面從陰極發出的電子初速度 $\dot{\mathbf{r}}_a$ 很小(也可能為零),另一方面假設我們限於討論靠近軸區域中的電子束即 $\mathbf{r}_a$ 很小,於是我們可以把 $\dot{\mathbf{r}}_a$, $\mathbf{r}_a$ 看成一級小量而將軌跡和像差用這兩個參量描寫[在旋轉坐標系 $\mathbf{u}(z)$ 中,則 $\dot{\mathbf{u}}_a$, $\mathbf{u}_a$ 是一級小量]。以下所謂的一級、二級或三級的量都是相對於 $\dot{\mathbf{r}}_a$, $\mathbf{r}_a$ (或 $\dot{\mathbf{u}}_a$, $\mathbf{u}_a$) 而言。

這裏討論一下電子軌跡從陰極面 (z_a) 發出的初條件。茲用電位差 ϵ_z 表示從陰極發出的電子初速度的軸向分量所對應的動能,顯然,

$$\epsilon_z = \left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)_{z_a}; \quad (9a)$$

同樣可以用電位差 $\epsilon_\perp$ 表示電子初速度的垂直於軸方向分量所對應的動能,顯然 $\epsilon_\perp = \epsilon_z r_a'^2$ (r_a' 是初斜率)。根據 ϵ_z , $\epsilon_\perp$ 的定義,可以得出

$$\epsilon_\perp = \frac{m_0}{2e} \dot{\mathbf{r}}_a^2, \quad \dot{\mathbf{r}}_a = \sqrt{\frac{2e\epsilon_z}{m_0}} \mathbf{r}_a'. \quad (9b)$$

利用 (9a,b) 的關係式,可以將 (5b) 式表成

$$\left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)^{1/2} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)_a^{1/2} (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_a') = \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a). \quad (10a)$$

若考慮到變換式 (4a,b), 並利用 (9a,b), 可以得到

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\chi}_a \mathbf{r}_a^* + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \mathcal{H}_a'' \mathbf{r}_a^2 \mathbf{r}_a^*; \quad (10b)$$

而在一級近似中則為

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\chi}_a \mathbf{r}_a^*. \quad (10c)$$

這裏 $\dot{\chi}_a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \mathcal{H}_a$ 。而且若注意到初條件 (9a), (10a), 我們可以將 (6a) 式表成

$$\frac{\varphi_p}{1+r'^2} = \epsilon_z + \left| \Phi - \mathbf{u}'^2 \frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right|_{z_a}^z =$$

$$= \epsilon_z + \left| \varphi_p - A_9^2 - 2 \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \frac{A_9}{r} - \mathbf{u}'^2 \frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right|_{z_a}^z. \quad (11)$$

I. 首先推導一級近似的軌跡方程，為此在實際軌跡方程 (8) 底係數中只須保留零級的量 (即不含軌跡 $\mathbf{u}$ 的量)，而忽略二級以及更高級的量。若將 φ_p 及 $\frac{A_9}{r}$ 的展式 (1b)，(2) 代入 (11) 式中，則不難發現 $\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2}$ 的零級近似等於

$$\left(\frac{\varphi_p}{1+\mathbf{r}'^2} \right)_0 = V_p. \quad (12a)$$

這裏我們引進了一個新的規範化軸上電勢 V_* (它不同於非浸沒物鏡系統中的規範化)：

$$V_* = \epsilon_z + V(z), \quad (12b)$$

其中 $V(z)$ 是從陰極算起的電勢 [$V(z_a) = 0$]。 V_p 是這樣規範化的相對論軸上電勢：

$$V_p = V_*(1 + \eta V_*). \quad (12c)$$

以下我們到處都採用這樣的規範化電勢 (12a,b,c)。

同樣，若利用展開式 (1b)，(2)，可以求出以下的零級近似的公式：

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_0 = V'_p, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_0 = -\frac{1}{4} (V'' \delta + \mathcal{H}^2), \quad (\delta = 1 + 2\eta V_*). \quad (13a, b)$$

最後利用零級近似式 (12a)，(13a,b)，就可以從 (8) 式中得出一級近似的軌跡方程：

$$2V_p \mathbf{u}'' + V'_p \mathbf{u}' + \frac{1}{2} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) \mathbf{u} = 0. \quad (14)$$

方程 (14) 通常稱為浸沒物鏡的線性方程，它在形式上和通常非浸沒物鏡系統的傍軸方程^[6]相似；但是必須強調線性方程和傍軸方程的意義有原則的差別，因為前者可以描寫斜率為任意值 (甚至趨於無窮) 的軌跡。線性方程 (14) 可以運用已知方法求解，所得的解可以完整地描寫全部高斯光學性質 (成像位置，放大率，像的旋轉) 以及某些像差。現在簡要說明之。方程 (14) 是關於 $\mathbf{u}$ 的二級線性常微分方程，假設 $\mathbf{u}$ 的初條件如下：

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}(z_a) = \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{u}'_a = \mathbf{r}'_a - \chi'_a \mathbf{r}_a^*, \quad (15a, b)$$

那麼 (14) 式的通解可以表成：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a u_2(z) + \dot{\mathbf{u}}_a u_1(z) \quad \text{及} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}_a u'_2(z) + \dot{\mathbf{u}}_a u'_1(z); \quad (16a, b)$$

其中 $u_1(z)$ ， $u_2(z)$ 是 (14) 式兩個線性無關的解，它們在陰極面 (z_a) 上滿足以下初條件：

$$u_1(z_a) = 0; \quad u'_1(z_a) = \sqrt{\frac{m_0}{2e\epsilon_z}}, \quad (17a)$$

$$u_2(z_a) = 1; \quad u_2'(z_a) = -\frac{\mathcal{H}_a^2}{2E_1} \text{ (若 } \varepsilon_z=0\text{), 或 } u_2'(z_a) = 0 \text{ (若 } \varepsilon_z \neq 0\text{)}. \quad (17b)$$

這裏 E_1 是陰極面上的電場強度. $u_1(z)$, $u_2(z)$ 兩特解的朗斯基行列式如下:

$$\sqrt{V_p} (u_1' u_2 - u_2' u_1) = \sqrt{\frac{m_0}{2e}}. \quad (18)$$

從 (16a) 可以知道, 像平面位置 z_b 由 $u_1(z_b) = 0$ 的條件所決定, 而放大率 m 等於 $m = u_2(z_b)$. 這樣一來, 浸沒物鏡裏對於 $\varepsilon_z = \text{常數 (或零)}$ 的電子束, 一級近似的軌跡能够理想聚焦, 因此一級近似的理論稱為高斯光學而 z_b 稱為高斯像平面.

最後我們列出 $\varepsilon_z = 0$ 情形下場和特解 $u_1(z)$, $u_2(z)$ 在陰極附近區域中的展開式:

$$V_*(z) = E_1 (z - z_a) + \frac{1}{3!} E_3 (z - z_a)^3 + \dots \text{ (設為平面陰極)}, \quad (19a)$$

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_a' (z - z_a) + \dots, \quad (19b)$$

$$u_1(z) = \sqrt{\frac{2m_0}{eE_1}} (z - z_a)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{H}_a^2}{E_1} (z - z_a) - \frac{1}{15} \left[\frac{E_3}{E_1} + \frac{3 \mathcal{H}_a \mathcal{H}_a'}{2E_1} - \frac{\mathcal{H}_a^4}{8E_1^2} \right] (z - z_a)^2 + \dots \right\}, \quad (19c)$$

$$u_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{H}_a^2}{E_1} (z - z_a) - \frac{1}{12} \left[\frac{E_3}{E_1} + \frac{2 \mathcal{H}_a \mathcal{H}_a'}{E_1} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{H}_a^4}{E_1^2} \right] (z - z_a)^2 + \dots. \quad (19d)$$

(19) 各式可以討論在陰極附近區域中場和特解的性質.

II. 其次轉向推導三級橫向像差方程, 為此在實際軌跡方程 (8) 底係數中只須保留直到二級的量而忽略四級以及更高級的量. 再次利用展開式 (1b), (2) 以及各零級近似式, 就可以求出二級近似的各式:

$$\left(\frac{\Phi_p}{1 + \mathbf{r}'^2} \right)_{0+2} = V_p + 2\eta V_*(z) \varepsilon_{\perp} - \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \cdot \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}, \quad (20a)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{0+2} = V_p' + 2\eta V'(z) \varepsilon_{\perp} - \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{d}{dz} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) - \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \cdot \mathcal{H}', \quad (20b)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{0+2} = -\frac{1}{4} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) - \frac{1}{4} \cdot 2\eta V'' \varepsilon_{\perp} + \frac{1}{16} \mathbf{u}^2 (2\eta V''^2 + \frac{1}{2} V^{IV} \delta + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'') + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \cdot \mathcal{H}''. \quad (20c)$$

我們將以上各式代入(8)中,並經整理而得到三級橫向像差方程:

$$\begin{aligned}
 2V_p \mathbf{u}'' + V_p' \mathbf{u}' + \frac{1}{2} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) \mathbf{u} = 2 \left\{ \left| \frac{\mathbf{u}^2}{4} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + \right. \right. \\
 \left. \left. + V_p \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z - 2\eta V_* \epsilon_{\perp} \right\} \mathbf{u}'' + \left\{ \frac{\mathbf{u}^2}{4} \frac{d}{dz} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}' - \right. \\
 \left. - 2\eta V' \epsilon_{\perp} \right\} \mathbf{u}' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \left(\frac{1}{2} V^{IV} \delta + 2\eta V''^2 + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' \right) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}'' - 2\eta \epsilon_{\perp} V'' \right\} \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z). \quad (21)
 \end{aligned}$$

(21) 式是複合浸沒物鏡三級橫向像差方程,它為嚴格計算這種系統的像差提供基礎,並且是計算實際問題的出發點。在以上全部推導中,我們對於軌跡的斜率未作任何限制(它們甚至可趨於無窮),這正是符合浸沒物鏡的特點。

現在要從(21)出發求出三級橫向像差,為此需證明 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 是一個不發散的三級小量。我們注意到下列性質:

(i) $\left\{ \left| \frac{\mathbf{u}^2}{4} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z - 2\eta \epsilon_{\perp} V_* \right\}$ 這個數量在陰極附近以 $(z - z_a)$ 的一次方趨於零,而且由(6b), (20a,b) 知道,它的微商正好等於 $\left\{ \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{d}{dz} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}' - 2\eta V' \epsilon_{\perp} \right\}$, 亦即等於(21)中 $\mathbf{u}'$ 的係數。

(ii) 由(16b), (19c) 可知,當 $\epsilon_z \rightarrow 0$ 時, $\mathbf{u}'$ 以 $(z - z_a)$ 的 $-\frac{1}{2}$ 次方趨於無窮,而 $\mathbf{u}''$ 以 $(z - z_a)$ 的 $-\frac{3}{2}$ 次方趨於無窮。

利用上述(i), (ii) 不難驗證,當 $\epsilon_z \rightarrow 0$ 時, $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 中含有 $\mathbf{u}''$, $\mathbf{u}'$ 的頭兩項雖然各自是發散的,但在陰極面上,它們相互抵消,結果是不發散的。這樣, $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 便是一個不發散的三級小量(它彷彿相當於一個微擾),那麼求三級橫向像差時只須用已經求出的線性方程(14)的解 $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ 代入其中;從而 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 便成為一已知量。因而(21)式成為一個非齊次的二級線性微分方程,它可以用改變隨意常數法求解而得出三級橫向像差 $\Delta \mathbf{u}_{3g}$ [這裏還利用(18)]:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{u}_{3g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ u_1(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_2(z)}{\sqrt{V_p}} dz - \right. \\
 \left. - u_2(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_1(z)}{\sqrt{V_p}} dz \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

這裏 $z = z_1$ 是考慮像差的一個任意平面。

其次,從變換式(4a,b)可以看出,三級近似的軌跡和一級近似的軌跡(即線性方程

的解)的旋轉角度之差 $\Delta\chi(z_1)$ 等於:

$$\Delta\chi(z_1) = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_1} \left(\mathcal{H} - \frac{1}{8} \mathcal{H}'' u^2 \right) \left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)_{0+2}^{-1/2} dz - \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_1} \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{V_p}} dz.$$

利用 (20a) 可以將 $\left(\frac{\varphi_p}{1+r'^2} \right)_{0+2}^{-1/2}$ 用二項式定理展成級數,於是上式化為:

$$\begin{aligned} \Delta\chi(z_1) = & \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_1} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_p^{3/2}} \left[\frac{1}{4} u^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_p u'^2 \right]_{z_a}^z - 2\eta \epsilon_{\perp} V_* \right\} - \frac{1}{4} u^2 \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_p}} \Bigg\} dz. \end{aligned} \quad (23a)$$

由於 $\Delta\chi(z_1)$ 所導致的另一部分三級像差 $\Delta\mathbf{u}_{3x}$ 等於

$$\Delta\mathbf{u}_{3x} = \{\mathbf{u}_a^* u_2(z_1) + \dot{\mathbf{u}}_a^* u_1(z_1)\} \Delta\chi(z_1), \quad (23b)$$

(23b) 的推導請查閱 [6],在推導中忽略了五級以及更高級的量。

最後,聯合 (22), (23a,b) 兩式,並且考慮到三級近似和一級近似的軌跡初條件 (10b), (10c) 之差,於是我們可以得出總的三級橫向像差 $\Delta\mathbf{u}_3(z_1)$ 等於:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_3(z_1) = & \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \mathcal{H}_a'' \mathbf{r}_a^2 \mathbf{r}_a^* u_1(z_1) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ u_1(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_2(z)}{\sqrt{V_p}} dz - \right. \\ & \left. - u_2(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_1(z)}{\sqrt{V_p}} dz \right\} + \frac{1}{4} [\mathbf{u}_a^* u_2(z_1) + \dot{\mathbf{u}}_a^* u_1(z_1)] \times \\ & \times \int_{z_a}^{z_1} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_p^{3/2}} \left[\frac{1}{4} u^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + \right. \right. \\ & \left. \left. + V_p u'^2 \right]_{z_a}^z - 2\eta \epsilon_{\perp} V_* \right\} - \frac{u^2}{4} \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_p}} \Bigg\} dz. \end{aligned} \quad (24a)$$

這樣,我們嚴格地推導了複合浸沒物鏡(還考慮了磁浸沒情形)總的三級橫向像差公式 (24a); 而且從以上的推導可以看出,在三級近似的範圍中 (24a) 代表總的三級橫向像差的精確值。最後,從 (24a) 可以求出在高斯像平面 z_b 中的像差 $\Delta\mathbf{u}_{3b}$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_{3b} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} m \int_{z_a}^{z_b} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_1}{\sqrt{V_p}} dz + m \mathbf{u}_a^* \times \\ & \times \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_p^{3/2}} \left[\frac{1}{4} u^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + \right. \right. \\ & \left. \left. + V_p u'^2 \right]_{z_a}^z - 2\eta V_* \epsilon_{\perp} \right\} - \frac{1}{4} u^2 \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_p}} \Bigg\} dz. \end{aligned} \quad (24b)$$

四. 複合浸沒物鏡特殊形式的像差係數

I. 首先我們限於討論非相對論情形下（因為實際上在陰極附近電子能量很小，可以不考慮相對論修正，即 $\eta V_* \ll 1$ ）的特殊形式像差係數。這時 (24a,b) 將變成較簡單的形式：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_3(z_1) = & \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \mathcal{H}_a'' \mathbf{r}_a^2 \mathbf{r}_a^* + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ u_1(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_2(z)}{\sqrt{V_*}} dz - \right. \\ & \left. - u_2(z_1) \int_{z_a}^{z_1} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_1(z)}{\sqrt{V_*}} dz \right\} + \\ & + \frac{1}{4} [\mathbf{u}_a^* u_2(z_1) + \dot{\mathbf{u}}_a^* u_1(z_1)] \int_{z_a}^{z_1} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_*^{3/2}} \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_* \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z - \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_*}} \right\} dz, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{u}_{3h}}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) \frac{u_1}{\sqrt{V_*}} dz + \frac{1}{4} \mathbf{u}_a^* \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_*^{3/2}} \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_* \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z - \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_*}} \right\} dz, \end{aligned} \quad (25b)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 若利用了線性方程後可以表述如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z) = & \mathbf{u}' \left\{ -\frac{V'}{V_*} \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_* \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z + \right. \\ & + \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V''' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}') + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}' \left. \right\} + \\ & + \mathbf{u} \left\{ -\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V_*} \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_* \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \mathbf{u}^2 \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}'' \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

上面 V_* 是規範化軸上電勢，以下為精簡計一律將 V_* 的 * 號略去不寫。

如果利用 (16a,b)，則可以將 (25a,b)，(26) 式中各量按 $\mathbf{u}_a$ ， $\dot{\mathbf{u}}_a$ 展開，例如：

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_a^2 u_2^2 + 2 (\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a) u_1 u_2 + \dot{\mathbf{u}}_a^2 u_1^2, \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V \mathbf{u}'^2 \right|_{z_a}^z = & \left[\frac{1}{4} u_2^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + V u_2'^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \mathcal{H}_a^2 \right] \mathbf{u}_a^2 + 2 (\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a) \left[\frac{1}{4} u_1 u_2 (V'' + \mathcal{H}^2) + V u_1' u_2' \right] + \\ & + 2 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z \right] + \dot{\mathbf{u}}_a^2 \left[\frac{1}{4} u_1^2 (V'' + \mathcal{H}^2) + V u_1'^2 \right]_{z_a}. \end{aligned} \quad (27b)$$

(27b) 的 [] 括號中各係數是正規的、不發散的函數；而且當 $\epsilon_z \rightarrow 0$ 時，它們在陰極上 ($z = z_a$) 有一級零點。再次利用 (16a,b) 及 (27a,b)，可以將高斯像平面中總的三級橫向像差 (25b) 按 $\mathbf{u}_a$, $\dot{\mathbf{u}}_a$ 展開如下：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{3b} = & (A_1 \mathbf{u}_a^3 + A_2 \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_a^*) + [2 B_1 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a^* + 2 B_2 (\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a + B_3 \mathbf{u}_a^2 \dot{\mathbf{u}}_a] + \\ & + 2 [C_1 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a + C_2 (\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a) \mathbf{u}_a^*] + [D_1 \dot{\mathbf{u}}_a^2 \mathbf{u}_a + 2 D_2 (\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a) \dot{\mathbf{u}}_a] + \\ & + [E_1 \dot{\mathbf{u}}_a^2 \mathbf{u}_a^* + 2 E_2 (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \dot{\mathbf{u}}_a] + F \dot{\mathbf{u}}_a^3, \end{aligned} \quad (28)$$

而上式中各個像差係數則由下面公式給出：

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u_2' \left[-\frac{V'}{V^{1/2}} u_2'^2 + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V'}{V} (V'' + \mathcal{H}^2) \right) u_2^2 + \frac{1}{4} \frac{V'}{V^{3/2}} \mathcal{H}_a^2 \right] + u_1 u_2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{1/2}} u_2'^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_2^2 + \frac{1}{8} \frac{V'' + \mathcal{H}^2}{V^{3/2}} \mathcal{H}_a^2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\frac{A_2}{m} = \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V^{1/2}} u_2'^2 + \frac{1}{4\sqrt{V}} \left[\frac{\mathcal{H}}{V} (V'' + \mathcal{H}^2) - \mathcal{H}'' \right] u_2^2 - \frac{1}{4} \frac{\mathcal{H}}{V^{3/2}} \mathcal{H}_a^2 \right\} dz, \quad (29b)$$

$$\frac{B_1}{m} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{\mathcal{H}}{V^{3/2}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z dz, \quad (29c)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_2}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_2' u_1 \left[-\frac{V'}{V^{1/2}} u_1' u_2' + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}' - \frac{V'}{V} (V'' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{H}^2) \right) u_1 u_2 \right] + u_1 u_2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{1/2}} u_1' u_2' + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_1 u_2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29d)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_3}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u_1' \left[-\frac{V'}{V^{1/2}} u_2'^2 + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}' - \frac{V'}{V} (V'' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{H}^2) \right) u_2^2 + \frac{1}{4} \frac{V'}{V^{3/2}} \mathcal{H}_a^2 \right] + u_1^2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{1/2}} u_2'^2 + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_2^2 + \frac{1}{8} \frac{V'' + \mathcal{H}^2}{V^{3/2}} \mathcal{H}_a^2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29e)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{m} = & -\frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u_2' \left[-\frac{V'}{2V^{3/2}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{H}'}{\sqrt{V}} \right] + u_1 u_2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{4V^{3/2}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z + \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V}} \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29f)$$

$$\frac{C_2}{m} = \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V^{1/2}} u'_1 u'_2 + \frac{1}{4\sqrt{V}} \left[\frac{\mathcal{H}}{V} (V'' + \mathcal{H}^2) - \mathcal{H}'' \right] u_1 u_2 \right\} dz, \quad (29g)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u'_2 \left[-\frac{V'}{V^{3/2}} \left| V u_1'^2 \right|_{z_a}^z + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2\mathcal{H}\mathcal{H}' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V'}{V} (V'' + \mathcal{H}^2)) u_1^2 \right] + u_1 u_2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{3/2}} \left| V u_1'^2 \right|_{z_a}^z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2\mathcal{H}\mathcal{H}'' - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_1^2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29h)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u'_1 \left[-\frac{V'}{V^{1/2}} u'_1 u'_2 + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2\mathcal{H}\mathcal{H}' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V'}{V} (V'' + \mathcal{H}^2)) u_1 u_2 \right] + u_1^2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{1/2}} u'_1 u'_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2\mathcal{H}\mathcal{H}'' - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_1 u_2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29i)$$

$$\frac{E_1}{m} = \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V^{3/2}} \left| V u_1'^2 \right|_{z_a}^z + \frac{1}{4\sqrt{V}} \left[\frac{\mathcal{H}}{V} (V'' + \mathcal{H}^2) - \mathcal{H}'' \right] u_1^2 \right\} dz, \quad (29j)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{m} = & -\frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u'_1 \left[-\frac{V'}{2V^{3/2}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{H}'}{\sqrt{V}} \right] + u_1^2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{4V^{3/2}} \left| \mathcal{H} \right|_{z_a}^z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V}} \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29k)$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ u_1 u'_1 \left[-\frac{V'}{V^{3/2}} \left| V u_1'^2 \right|_{z_a}^z + \frac{1}{4\sqrt{V}} (V'''' + 2\mathcal{H}\mathcal{H}' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V'}{V} (V'' + \mathcal{H}^2)) u_1^2 \right] + u_1^2 \left[-\frac{V'' + \mathcal{H}^2}{2V^{3/2}} \left| V u_1'^2 \right|_{z_a}^z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8\sqrt{V}} \left(\frac{1}{2} V^{IV} + 2\mathcal{H}\mathcal{H}'' - \frac{(V'' + \mathcal{H}^2)^2}{V} \right) u_1^2 \right] \right\} dz, \end{aligned} \quad (29l)$$

О. И. Семан (謝曼) 曾經正確地指出：在磁浸沒的系統中(即 $\mathcal{H}_a \neq 0$)，“通常的像差係數不表徵相應的特殊形式像差，需要導出符合這種系統特點的像差展式以及表徵此種系統像差的各個係數。”因此，我們必須將總的三級橫向像差(28)變換成按照 $\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a$ 展開的公式，為此祇須利用(10c)，(15a)，並經過適當的整理，得出如下結果：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{3b} = & -\sqrt{\frac{2e}{m_0}} \boldsymbol{\varepsilon}_\perp [C_r \mathbf{r}_a^* + C_m \mathbf{r}_a] m + 2K_{00} (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a) \mathbf{r}_a^* + K_{10} [\dot{\mathbf{r}}_a^2 \mathbf{r}_a^* + 2(\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a) \dot{\mathbf{r}}_a] - \\ & - 2K_{11} [(\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{r}}_a) \mathbf{r}_a^* + (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a) \mathbf{r}_a] + K_{12} \mathbf{r}_a^2 \mathbf{r}_a^* + K_{20} \mathbf{r}_a^3 - \end{aligned}$$

$$-K_{21} [\dot{\mathbf{r}}_a^2 \mathbf{r}_a + 2 (\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{r}}_a) \dot{\mathbf{r}}_a] + K_{22} [\mathbf{r}_a^2 \dot{\mathbf{r}}_a + 2 (\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{r}}_a) \mathbf{r}_a] - K_{23} \mathbf{r}_a^3. \quad (30)$$

這裏 K_{pk} 是特殊形式的像差係數, 它們的公式如下:

$$\begin{aligned} \text{Petzval 係數,} \quad K_{00} &= B_1 + \frac{1}{3} (B_3 - B_2) - \left(E_1 + \frac{5}{3} E_2 \right) \dot{\chi}_a + \\ &+ \frac{4}{3} F \dot{\chi}_a^2, \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\text{各向異性彗形差係數,} \quad K_{10} = E_2 - F \dot{\chi}_a, \quad (31b)$$

$$\text{各向異性像散係數,} \quad K_{11} = -C_2 + D_2 \dot{\chi}_a \text{ [注意 } C_2 = C_1 - (D_1 - D_2) \dot{\chi}_a], \quad (31c)$$

$$\text{各向異性畸變係數,} \quad K_{12} = A_2 - (2B_1 + B_3) \dot{\chi}_a + (E_1 + 2E_2) \dot{\chi}_a^2 - F \dot{\chi}_a^3, \quad (31d)$$

$$\text{中心像差係數,} \quad K_{20} = F, \quad (31e)$$

$$\text{各向同性彗形差係數,} \quad K_{21} = -D_2, \quad (31f)$$

$$\text{子午彎曲係數,} \quad K_{22} = \frac{1}{3} (2B_2 + B_3) - \frac{2}{3} E_2 \dot{\chi}_a + \frac{1}{3} F \dot{\chi}_a^2, \quad (31g)$$

$$\text{各向同性畸變係數,} \quad K_{23} = -A_1 + 2C_2 \dot{\chi}_a + (D_1 - 2D_2) \dot{\chi}_a^2; \quad (31h)$$

此外, 還有兩個色差係數:

$$C_m = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} (D_2 - D_1) / m, \quad C_r = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} (E_2 - E_1) / m. \quad (31i, j)$$

這裏我們得到了非相對論情形下複合浸沒物鏡的特殊形式像差係數 (31a—j). 而且, 從 (29) 各式可見, 各個像差係數積分號中只含有以 $(z - z_a)$ 的 $-1/2$ 次方趨於無窮的項, 這些項的積分是收斂的, 可以藉助適當方法進行數值積分. 因此, 這裏得到的不發散的像差係數公式 (29), (31) 是便於進行實際計算的.

最後作為一個檢驗, 我們將 (29) 各式過渡到靜電浸沒物鏡中, 為此只須令 $\mathcal{E} \equiv 0$ 即得出該情形下的像差係數. 利用線性方程 (14), 並經多次部分積分, 最後得到如下公式:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{m} &= \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V'' u_1 u_2^3 + \frac{1}{64} V' V'' \left(17 u_1 u_2^2 u_2' + 3 u_1' u_2^3 - \frac{3V'}{2V} u_1 u_2^3 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{8} V'^2 u_1 u_2 u_2'^2 \right\} dz - \frac{1}{8} \int_{z_a}^{z_b} \frac{V'}{V} u_2'^2 dz + \frac{1}{8} [u_2'^2]_{z_a}^{z_b} - \frac{1}{32} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left[V''' \frac{u_1 u_2^3}{\sqrt{V}} - \right. \\ &- \left. V'' \left(\frac{u_1}{\sqrt{V}} \right)' u_2^3 \right]_{z_a}^{z_b}, \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\frac{B_2}{m} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V'' u_1^2 u_2^2 + \frac{1}{64} V' V'' \left(10 u_1^2 u_2 u_2' + 10 u_2^2 u_1 u_1' - \frac{3}{2} \frac{V'}{V} u_1^2 u_2^2 \right) + \right.$$

$$+ \frac{3}{8} V'^2 u_1 u_2 u'_1 u'_2 \Big\} dz + \frac{1}{4} [u'_1 u'_2]_{z_a}^{z_b}, \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_3}{m} = & \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V''^2 u_1^2 u_2^2 + \frac{1}{64} V' V'' \left(14 u_1^2 u_2 u'_2 + 6 u_2^2 u_1 u'_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} \frac{V'}{V} u_1^2 u_2^2 \right) + \frac{3}{8} V'^2 u_1^2 u_2'^2 \right\} dz - \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_b} \frac{V'}{V} u'_1 u'_2 dz - \frac{1}{4} [u'_1 u'_2]_{z_a}^{z_b}, \quad (32c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{m} = & \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V''^2 u_1^3 u_2 + \frac{1}{64} V' V'' \left(3 u_1^3 u'_2 + 17 u'_1 u_2 u_1^2 - \frac{3}{2} \frac{V'}{V} u_1^3 u_2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} V'^2 u_1 u_2 \left(u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right) \right\} dz + \frac{1}{8} \int_{z_a}^{z_b} \frac{V'}{V} \left(u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right) dz + \\ & + \frac{3}{8} \left[u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right]_{z_a}^{z_b}, \quad (32d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{m} = & \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V''^2 u_1^3 u_2 + \frac{1}{64} V' V'' \left(7 u_1^3 u'_2 + 13 u'_1 u_2 u_1^2 - \frac{3}{2} \frac{V'}{V} u_1^3 u_2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} V'^2 u'_1 u'_2 u_1^2 \right\} dz - \frac{1}{8} \int_{z_a}^{z_b} \frac{V'}{V} \left(u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right) dz - \frac{1}{8} \left[u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right]_{z_a}^{z_b}, \quad (32e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} = & \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{dz}{V^{3/2}} \left\{ \frac{5}{64} V''^2 u_1^4 + \frac{1}{64} V' V'' \left(20 u_1^3 u'_1 - \frac{3}{2} \frac{V'}{V} u_1^4 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} V'^2 u_1^2 \left(u_1'^2 - \frac{m_0}{2eV} \right) \right\} dz. \quad (32f) \end{aligned}$$

[(28), (29) 式中其他係數現在均變為零.] 這些像差係數的公式 (32a—f) 中, 軸上電勢微商降低到二次, 而且也沒有包含發散的積分, 因此便於進行實際的計算。

順便指出, 若注意到我們的特解 u_1, u_2 和 A. Reknagel^[2] 的特解 r_a, r_β 的關係為:

$$\sqrt{\frac{2e}{m_0}} u_1 = \frac{1}{\sqrt{U}} r_a, \quad u_2 = r_\beta;$$

於是立刻看出我們所得公式 (32) 和 A. Reknagel^[2] 的公式完全符合, 彼此的對應關係如下:

$$A_1 \sim A, B_2 + B_3 \sim B, B_2 \sim C, D_2 \sim D, D_1 + D_2 \sim E, F \sim F$$

(A, B, C, D, F 是 [2] 中的像差係數)。

不過 A. Reknagel^[2] 中的公式限制於像平面處沒有場的情形, 而我們的公式 (32) 則無此限制, 故比前者較為普遍。

II. 由於非浸沒物鏡系統的簡正形式像差理論已經建立^[5,6], 因此, 為完整起見, 現在來討論複合浸沒物鏡簡正形式像差理論。這就是說, 需要將上面的總的橫向像差公

式 (24a,b) 化成簡正形式, 然後求出簡正形式的像差係數。

根據第三節我們知道, $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_z \mathbf{r}_a'^2$, 若再考慮到變換 (4a,b), 則得出

$$\varepsilon_{\perp} = \left[\frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}'^2 \right]_{z=z_a}.$$

利用這關係式可將 (21) 及 (23a) 中的 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 及 $\Delta\chi$ 重新寫成如下形式:

$$\begin{aligned} 2V_p \mathbf{u}'' + V_p' \mathbf{u}' + \frac{1}{2} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) \mathbf{u} = & -\varepsilon_{\perp} \left\{ 2(1+2\eta V_*) \mathbf{u}'' + 2\eta V' \mathbf{u}' + \right. \\ & + \frac{1}{2} 2\eta V'' \mathbf{u} \left. \right\} + 2 \mathbf{u}'' \left[\frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}'^2 \right] + \\ & + \left[\frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{d}{dz} (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}' \right] \mathbf{u}' + \left[\frac{1}{8} \mathbf{u}^2 \left(\frac{1}{2} V^{IV} \delta + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\eta V''' + 2 \mathcal{H} \mathcal{H}'' \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H}'' \right] \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z); \quad (33a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\chi(z_1) = & \frac{1}{4} \int_{z_a}^{z_1} \left\{ \frac{\mathcal{H}}{V_p^{3/2}} \left[\frac{1}{4} \mathbf{u}^2 (V'' \delta + \mathcal{H}^2) + \sqrt{\frac{m_0}{2e}} (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a) \mathcal{H} + V_p \mathbf{u}'^2 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \mathbf{u}^2 \frac{\mathcal{H}''}{\sqrt{V_p}} \right\} dz - \frac{\varepsilon_{\perp}}{4} \int_{z_a}^{z_1} \frac{\mathcal{H} \delta}{V_p^{3/2}} dz. \quad (33b) \end{aligned}$$

由 (33a,b) 可以看出, $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 及 $\Delta\chi$ 中含有 $\varepsilon_{\perp}$ 的部分表徵由於垂直於軸的方向初速度的分佈所導致的色差; 這部分色差可以按照 [6] 的方法化成簡正形式。其次, $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', z)$ 及 $\Delta\chi$ 中不含 $\varepsilon_{\perp}$ 的部分表徵着場的微擾, 它們導致通常的三級橫向像差; 這部分像差可以按照 [5] 的方法化成簡正形式。這兩部分簡正形式像差合併以後可以得出如下結果:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_3(z_1) = & \varepsilon_{\perp} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ u_1(z_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \left[\sum_{p=0}^1 B^{1-p} C^{1-p} \left(\int_{z_a}^{z_1} G_p \mathbf{u}^{2p} dz + \frac{1}{8} \left| \sum_{n=0}^{2p} h_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_1} \right) \right] - \right. \\ & - u_2(z_1) \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} \left[\sum_{p=0}^1 B^{1-p} C^{1-p} \left(\int_{z_a}^{z_1} G_p \mathbf{u}^{2p} dz + \frac{1}{8} \left| \sum_{n=0}^{2p} h_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_1} \right) \right] - \\ & - u_1(z_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \left[\sum_{p=0}^2 \frac{B^{2-p} C^{1-p}}{(p!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_1} S_p \mathbf{u}^{2p} dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} g_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_1} \right\} \right] + \\ & + u_2(z_1) \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} \left[\sum_{p=0}^2 \frac{B^{2-p} C^{1-p}}{(p!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_1} S_p \mathbf{u}^{2p} dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} g_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_1} \right\} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \mathcal{H}_a'' \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_a^* u_1(z_1); \quad (34a) \right\} \end{aligned}$$

而在高斯像平面中, 則有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{u}_{3b}}{m} = & \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} \left[\sum_{p=0}^2 \frac{B^{2-p} C^{1-p}}{(P!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_b} S_p \mathbf{u}^{2p} dz + \left| \sum_{n=0}^{2p} g_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_b} \right\} - \right. \\ & \left. - \epsilon_{\perp} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} \left[\sum_{p=0}^1 B^{1-p} C^{1-p} \left(\int_{z_a}^{z_b} G_p \mathbf{u}^{2p} dz + \frac{1}{8} \left| \sum_{n=0}^{2p} h_{pn} \tau_{pn} \right|_{z_a}^{z_b} \right) \right] \right]. \quad (34b) \end{aligned}$$

(34a,b) 中含有 $\epsilon_{\perp}$ 的部分代表色差,它們由兩個通用色差函數 G_0, G_1 及 h_{pn} 所描寫: 這些函數公式如下:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{4} \frac{\mathcal{H}}{V_p^{3/2}} \delta, \\ G_1 &= \left[\frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}^2}{V_p^{3/2}} + \frac{3}{16} \frac{V'^2}{V_p^{5/2}} K_1 \right] \delta, \quad K_1 = 1 + \frac{2}{3} \eta V_p, \\ h_{00} &\equiv 0, \quad h_{11} = \frac{1}{V_p^{1/2}} \delta, \quad h_{12} = \frac{V'}{V_p^{3/2}} [1 + 2\eta V_p]. \end{aligned}$$

(34a,b) 中不含有 $\epsilon_{\perp}$ 的部分代表三級橫向像差,它們由三個通用像差函數 S_0, S_1, S_2 及 g_{pn} 所描寫: 這些函數可查 [5]. 上面公式中 $B = (\mathbf{u}_a \times \dot{\mathbf{u}}_a)$, $C = \sqrt{\frac{m_0}{2e}}$, τ_{pn} 可查 [5].

根據 [5] 可以將總的橫向像差 $\Delta \mathbf{u}_{3b}$ (34b) 按照 $\mathbf{u}_a, \dot{\mathbf{u}}_a$ 展開為特殊形式的像差,而展開式中的像差係數如下:

$$\frac{G_{00}^*}{m} = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \int_{z_a}^{z_b} S_0 dz, \quad (35a)$$

$$\frac{G_{10}^*}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 u_1^2 dz + \left| \sum_{n=1}^2 g_{1n} T_{10n} \right|_{z_a}^{z_b}, \quad (35b)$$

$$\frac{-G_{11}^*}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 u_1 u_2 dz + \left| \sum_{n=1}^2 g_{1n} T_{11n} \right|_{z_a}^{z_b}, \quad (35c)$$

$$\frac{G_{12}^*}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 u_2^2 dz + \left| \sum_{n=1}^2 g_{1n} T_{12n} \right|_{z_a}^{z_b}, \quad (35d)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{20}}{m} = & \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{5}{32} \int_{z_a}^{z_b} S_2 u_1^4 dz + \left| \sum_{n=1}^4 g_{2n} T_{20n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\} - \\ & - \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \left\{ 2 \int_{z_a}^{z_b} G_1 u_1^2 dz + \frac{1}{4} \left| \sum_{n=1}^2 h_{1n} T_{10n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}, \quad (35e) \end{aligned}$$

$$\frac{-G_{21}^*}{m} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{5}{32} \int_{z_a}^{z_b} S_2 u_1^3 u_2 dz + \left| \sum_{n=1}^4 g_{2n} T_{21n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}, \quad (35f)$$

$$\frac{G_{22}^*}{m} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{5}{32} \int_{z_a}^{z_b} S_2 u_1^2 u_2^2 dz + \left| \sum_{n=1}^4 g_{2n} T_{22n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}, \quad (35g)$$

$$\frac{-G_{23}^*}{m} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{5}{32} \int_{z_a}^{z_b} S_2 u_1 u_2^3 dz + \left| \sum_{n=1}^4 g_{2n} T_{23n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}. \quad (35h)$$

此外還有兩個色差係數 C_r , C_m :

$$C_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0}{2e} \int_{z_a}^{z_b} \frac{\mathcal{H} \delta}{V_p^{3/2}} dz - \mathcal{H}_a \left[2 \int_{z_a}^{z_b} G_1 u_1^2 dz + \frac{1}{4} \left| \sum_{n=1}^2 h_{1n} T_{10n} \right|_{z_a}^{z_b} \right] \right\}, \quad (35i)$$

$$C_m = 2 \int_{z_a}^{z_b} G_1 u_1 u_2 dz + \frac{1}{4} \left| \sum_{n=1}^2 h_{1n} T_{11n} \right|_{z_a}^{z_b}. \quad (35j)$$

以上公式中 T_{pkn} 是所謂的線束乘子, 可查 [5].

對於磁浸沒情形(即 $\mathcal{H}_a \neq 0$), 根據前述理由, 必須將總的橫向像差 Δu_{yb} (34b) 按照 $\mathbf{r}_a$, $\dot{\mathbf{r}}_a$ 展開成 (30) 式. О. И. Семан 指出, 展開式 (30) 中的像差係數 K_{pk} 是由上面的 G_{pk}^* 線性組合而得:

$$K_{00} = G_{00}^* - \frac{3}{8} \dot{\chi}_a G_{10}^* + \frac{4}{3} \dot{\chi}_a^2 G_{20}^*, \quad (36a)$$

$$K_{10} = G_{10}^* - \dot{\chi}_a G_{20}^*, \quad (36b)$$

$$K_{11} = G_{11}^* - \dot{\chi}_a G_{21}^*, \quad (36c)$$

$$K_{12} = G_{12}^* - \dot{\chi}_a (G_{22}^* + 2 G_{00}^*) + 3 \dot{\chi}_a G_{10}^* - \dot{\chi}_a^3 G_{20}^*, \quad (36d)$$

$$K_{20} = G_{20}^* - m \sqrt{\frac{m_0}{2e}} \left\{ 2 \int_{z_a}^{z_b} G_1 u_1^2 dz + \frac{1}{4} \left| \sum_{n=1}^2 h_{1n} T_{10n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}, \quad (36e)$$

$$K_{21} = G_{21}^* \quad (36f)$$

$$K_{22} = G_{22}^* - \frac{2}{3} \dot{\chi}_a G_{10}^* + \frac{1}{3} \dot{\chi}_a G_{20}^*, \quad (36g)$$

$$K_{23} = G_{23}^* - 2 \dot{\chi}_a G_{11}^* + \dot{\chi}_a^2 G_{21}^*; \quad (36h)$$

其中 $\frac{G_{20}^*}{m} = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \left\{ \frac{5}{32} \int_{z_a}^{z_b} S_2 u_1^4 dz + \left| \sum_{n=1}^4 g_{2n} T_{20n} \right|_{z_a}^{z_b} \right\}.$

這樣一來, 我們得到了複合浸沒物鏡簡正形式像差係數. 如果利用 (19a—d) 各式對於 (35), (36) 式進行驗算, 那麼可以發現:

(i) 對於 $\mathcal{H}_a = 0$ 的情形(非磁浸沒), 即使當 $s_z \rightarrow 0$ 時, (35a—j) 各像差係數是不發散的(因為發散項互相抵消);

(ii) 對於 $\mathcal{H}_e \neq 0$ 的情形(磁浸沒),即使當 $\epsilon_z \rightarrow 0$ 時,(36a—h) 各像差係數及色差係數 C_r, C_m (35i,j) 是不發散的(因為發散項互相抵消)。

可是,因為簡正形式像差係數公式中含有發散的積分(雖則它們可以和積分號外發散項互相抵消),所以就不能進行數值積分,因此簡正形式公式(35), (36) 不適合於直接應用於實際計算。然而,從簡正形式的公式(34), (35), (36) 却顯然可以看出:當電子能量為有限時,只須將我們的規範化電勢(12b,c) 換成通常的規範化電勢,則本節 II 的公式就過渡到通常非浸沒物鏡系統中相應的公式^[5,6]。由此表明我們的結果與電子光學中已有的結果符合。

五. 結 論

上面我們研究了足夠普遍情形下浸沒物鏡的像差理論,即研究了平面陰極的複合浸沒物鏡,並且考慮了磁浸沒的情形(此外,為完整起見,我們還考慮了相對論修正)。我們得到了以下結果:

1. 第三節裏我們嚴格地證明了複合浸沒物鏡的線性方程(14) (對軌跡的斜率沒有任何限制)。它可以完整地描寫複合浸沒物鏡的高斯光學性質以及某些像差。其次,我們導出了複合浸沒物鏡三級像差方程(21),它為嚴格地研究複合浸沒物鏡的電子光學性質及像差提供了基礎。從這方程出發,推導了在任意平面 x_1 及高斯像平面中的總的三級橫向像差(24a,b)。這樣一來,我們便推廣了 A. Reknagel^[2] 和 Л. А. Арцимович^[3] 的工作。

2. 在第四節裏導出了非相對論情形下複合浸沒物鏡特殊形式像差係數的公式(28), (29), (30), (31)。它們不含發散的積分,因而便於進行實際的計算。若過渡到靜電浸沒物鏡中,我們的公式(32)和 A. Reknagel^[2] 中的公式相符合。其次,我們還導出了複合浸沒物鏡簡正形式像差公式(34a,b) 以及像差係數公式(35), (36); 若過渡到電子能量為有限的情形,則這些簡正形式的公式就轉化成通常非浸沒物鏡系統相應的公式^[5,6]。

最後,作者對蘇聯專家 О. И. Семан 同志的指導表示衷心的感謝。

參 考 文 獻

- [1] Morton, G. A., Ramberg, E. G., *Physica*, 7 (1936), 451.
- [2] Reknagel, A., *Zs. f. Phys.*, 117 (1941), 689.
- [3] Арцимович, Л. А., *Изв. АН СССР, Сер. физ.* 6 (1944), 313.
- [4] Воробьев, Ю. В., *ЖТФ* 26 (1956), 2269.
- [5] Семан, О. И. (謝曼), *ДАН СССР* 81 (1951), 775; *ДАН СССР* 96 (1954), 1151; *Тр. Ин-та физики и астрономии Ан Эст. ССР* 2 (1955), 3—49.
- [6] Семан, О. И. (謝曼), *電子光學理論基礎講義* (將出版), 北京。
- [7] Boersch, H., *Z. f. techn. Phys.* 23 (1942), 129.

К ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ И ТЕОРИИ АБЕРРАЦИИ КОМБИНИРОВАННЫХ ИММЕРСИОННЫХ ОБЪЕКТИВОВ

Симэн Тий-е

(Пекинский университет)

Резюме

В электронной оптике иммерсионными объективами называют системы, в которых отображаемый катод, являющийся источником медленных электронов, находится в сильном электрическом поле (или также в магнитном поле). Иммерсионные объективы резко отличаются от обычных электронно-оптических систем с большой начальной скоростью электронов, что приводит к необходимости построить теорию, учитывающую физические особенности иммерсионных объективов. Теория иммерсионного объектива не завершена (в особенности это относится к комбинированному иммерсионному объективу).

Главная задача нашей работы состояла в построении теории абберации комбинированного иммерсионного объектива и распространении теории А. Reknagel^[2] и Л. А. Арцимовича^[3] на комбинированный иммерсионный объектив с плоским катодом, учитывая также наличие магнитной иммерсии (т. е. погружение катода в магнитное поле). Для полноты нами учитывалась релятивистская поправка, хотя она в прикатодной области не играет практической роли.

В данной работе были получены следующие результаты:

(1) Выведено линейное уравнение (14) для электронных пучков, выходящих из точек катода под большими углами (до $\pi/2$), и получено уравнение абберации (21), что представляет собой развитие теории комбинированных иммерсионных объективов. Из (21) установлены формулы полной поперечной абберации третьего порядка (24_{a,b}). Таким образом, работа А. Reknagel^[2] и Л. А. Арцимовича^[3] распространена на комбинированный иммерсионный объектив.

(2) Для не релятивистского случая выведены формулы коэффициентов частных видов абберации (28,29,30,31), которые не содержат расходящихся интегралов и удобны для практического вычисления в комбинированных иммерсионных объективах. В случае чисто электрического иммерсионного объектива наши формулы коэффициентов частных аббераций (32) совпадают с формулами А. Reknagel^[2].

Кроме того, получены формулы нормальных коэффициентов аббераций (34_{a,b}, 35, 36), которые могут переходить в обычные выражения коэффициентов аббераций^[5,6] для системы с большой начальной энергии электронов (т. е. не иммерсионной системы).

В заключение автор выражает благодарность советскому специалисту О. И. Семан за руководство данной работой.