

由于中子躍迁而产生的 电多極內轉換*

朱 洪 元

(中国科学院物理研究所)

摘 要

本文討論核子的反常磁矩对于內轉換系数数值的影响。首先討論了縱光子和标量光子在內轉換过程中所起的作用。然后用对应的方法推导出具有反常磁矩的荷电粒子之間的推迟相互作用。又用量子电动力学推导推迟相互作用,得到完全相同的結果。这一推迟相互作用被用来計算內轉換系数。結果指出:核子的反常磁矩对于磁多極內轉換系数以及由于質子躍迁导致的电多極內轉換系数的影响微不足道。但是和某些作者^[4, 6]的結論相反,核子的反常磁矩对于由于中子躍迁而导致的电多極內轉換系数产生显著的影响。討論了計算中所用的規範問題,从而指出这些作者处理本問題时所引入的錯誤。

关于內轉換的理論曾經为許多人一再地討論^[1-4]。直到不久以前,內轉換系数被認為由原子核在躍迁时能量、角动量和宇称的变化以及原子序数决定。原子核的其他特点以及核子和电磁場相互作用的形式不能对內轉換系数的数值产生影响,或只能产生微不足道的影响。Сабб^[5]在1951年指出,原子核并非一点而具有有限的体积,这可能会对內轉換系数的数值产生显著的影响。本文以由于中子躍迁而产生的电多極內轉換为例,指出:核子和电磁場間相互作用的具体形式可能对內轉換系数的数值产生显著的影响。

本文第一节討論縱光子和标量光子在內轉換中的作用。指出 Rose^[6]以及另一些人^[3]的縱光子不起作用之看法的錯誤。在第二节中用对应方法求得两个具有反常磁矩的荷电粒子之間的推迟相互作用。在第三节中应用量子电动力学求得二个具有反常磁矩的荷电粒子之間的推迟相互作用,和第二节中求得的结果相符合。在第四节中应用了求得的推迟相互作用推导內轉換系数。在第五节中作了一个非相对論性的計算,具体証实了核子和电磁場之間相互作用的形式对內轉換系数的数值的显著影响。在第六节中討論了規範不变性的意义和一些文献中的錯誤看法。

* 1957年4月30日收到。

一. 縱光子和标量光子的作用

在量子电动力学中, 縱光子和标量光子通过洛倫茲条件联系起来. 縱光子和标量光子并不分別地具有独立的物理意义. 同一物理情况通过规范轉換可以由不同数目的縱光子和标量光子来反映^[7, 8]. 但是縱光子和标量光子結合起来具有完全一定的物理意义, 在一定的情况下起一定的作用. 假使討論中的荷电粒子沒有反常磁矩, 那末縱光子和标量光子的物理作用就是庫倫相互作用. 这一相互作用在某些过程中起重要的作用, 在另一些过程中則并不起作用, 或并不起显著的作用. 例如: 在氫原子的形成中庫倫相互作用起决定性的作用, 但是在氫原子从激發态躍迁至基态放出光子的过程中庫倫相互作用便毫不重要.

Taylor 和 Mott^[1]很早就認識到庫倫力在內轉換中的重要作用. 假使不考虑相对論性效应, 那末电多極內轉換主要产生于庫倫力^[9]. 与此相反, Rose^[6]認為庫倫力在內轉換中不起作用. 由于规范不变性, 縱光子不作任何貢獻. Tralli 和 Goertzel^[2]認為由于選擇定則, 縱光子不能影响电多極或磁多極內轉換. 因此有必要討論:

- 1) 在內轉換系数的計算中是否應該考虑庫倫力?
- 2) 假使應該將庫倫力考虑进去, 庫倫力是否將作重要的貢獻?

假使不考虑核子的反常磁矩, 原子核、电子、电磁場以及它們之間的相互作用可以用下列哈密頓量反映:

$$H = H_n + H_e + H_f - \sum_{p, e} \frac{e^2}{r_{pe}} + H_{nf} + H_{ef}, \quad (1)$$

其中 H 代表总哈密頓量; H_n 代表核子的动能和它們之間的相互作用; H_e 代表电子的动能和它們之間的庫倫能; H_f 代表光子, 亦即橫的电磁場的哈密頓量; $-\sum_{p, e} \frac{e^2}{r_{pe}}$ 代表質子和电子之間的庫倫能; H_{nf} 代表核子和光子之間的相互作用; H_{ef} 代表电子和光子之間的相互作用. 在本文中, 前面不加区别的形容詞的名詞“光子”即代表橫光子. 假使將內轉換当作由于微扰而产生的躍迁过程处理, 那末首先必須將总哈密頓量 H 划分为兩部分 H_0 和 H_i . 在 H_0 中, 核子, 电子和光子的力学量, 亦即代表它們的变数可以分开. 因此給出了一系列核子, 电子和光子变数分开的定态波函数:

$$\Psi_{i, j, k} = \Phi_n^i \cdot \Phi_e^j \cdot \Phi_f^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

其中 Φ_n 代表原子核的定态; Φ_e 代表电子層中的电子或电离了的电子的定态; Φ_f 代表光子的定态. 假使沒有 H_i 的作用, 它們彼此独立, 不作躍迁. H_i 代表原子核, 电子和电磁場之間的相互作用, 导致 γ 衰变, 內轉換等过程.

最簡單的划分是將式(1)中右方前面四項当作 H_0 , 將后面兩項当作 H_i . $-\sum_{p, e} \frac{e^2}{r_{pe}}$ 之所以划进 H_0 是因为电子形成原子中的电子層必須依靠庫倫能. 这样一来, 就使質子

和电子之間的庫命能對內轉換不起任何作用。但是這樣的划分并不是完全正确的。由于在 $-\sum_{p,e} \frac{e^2}{r_{pe}}$ 一項中，質子和电子的坐标結合在一起出現， H_0 中原子核和电子的变数不再可分。因此給出的定态波函数中原子核和电子的变数也不可分。原子核和电子不再分別具有定态。“在 H_i 作用下，原子核从某一定态躍迁至另一一定态，因此电子从某一定态躍迁至另一一定态。”这样的說法也不再具有意义。因此用这样的划分来处理內轉換問題是不正确的。正确的划分應該是

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= H_n + H_e + H_f - \sum_e z e^2 V(r_e), \\ H_i &= \left(\sum_e z e^2 V(r_e) - \sum_{p,e} \frac{e^2}{r_{pe}} \right) + H_{nf} + H_{ef}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $-\sum_e z e^2 V(r_e)$ 代表整个原子核对电子的庫命能，只是电子坐标和原子核重心坐标的函数，和原子核的内部自由度变数無關。这一庫命能可以用点电荷的庫命能。但是更妥当的是考虑原子核的有限体积，取分布在有限体积内的电荷的庫命能。在这样划分出来的 H_0 中原子核的内部运动变数可以分开，可以給出彼此独立的、可以分开的原子核，原子中的电子層和光子的定态波函数。同时質子和电子之間的庫命能就有一部分

$$\sum_e z e^2 V(r_e) - \sum_{p,e} \frac{e^2}{r_{pe}} \quad (4)$$

划进 H_i ，對內轉換起作用。这就是說：應該將質子和电子間的庫命能分为二部分，一部分在原子的电子層形成时起作用，另一部分在內轉換中起作用。認為質子和电子之間的庫命能對內轉換根本不起影响的想法是不正确的。它的重要性在非相論性的計算中^[10]已經充分表現出来。当然，由于縱光子和标量光子的角动量和宇称之間的关系和电多極光子相像而不同于磁多極光子，庫命能只对电多極內轉換起作用。選擇定則使庫命能对磁多極內轉換不起作用。

假使不考虑質子的反常磁矩，那末質子和整个电磁場（包括标量場和縱場在內）的相互作用是

$$-e \mathbf{a} \mathbf{A} + e \Phi, \quad (5)$$

e 代表質子电荷； $\mathbf{A}$ 代表包括縱場在內的矢势； Φ 代表标势； $\mathbf{a}$ 代表通常的狄拉克矩陣。在本文中取 $\hbar = c = 1$ 。这一相互作用在导致內轉換时，縱光子和标量光子都起作用。由于質子具有反常磁矩，所以还有附加的相互作用

$$\frac{e(\mu_p - 1)}{2M} \{-\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} + i\beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}\}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 代表磁场强度和电场强度； M 代表核子質量； $2\mu_p$ 代表質子的迴轉磁比率。不难看出，在表式(6)中的第一項和縱光子以及标量光子無關，而第二項則和縱光

子及标量光子都有关系。在計算質子躍迁所引起的电多極內轉換时,主要的貢獻出于表式(5)。表式(6)的貢獻微不足道。將表式(5)中电多極光子,縱光子和标量光子的貢獻加起来,所得到的決定內轉換系数的矩陣元就是通常計算中用“普通規範”(conventional gauge)所取得的矩陣元。

但是中子不帶电荷,只具有反常磁矩,因此中子和电磁場之間的相互作用只是

$$\frac{e\mu_N}{2M} \{-\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} + i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}\}, \quad (7)$$

在电多極內轉換中,表式(7)第一項所作的貢獻和第二項所作的貢獻屬於同一数量級。第二項所产生的矩陣元包括电多極光子,縱光子和标量光子三者的貢獻。結果在矩陣元中出現的是“普通規範”中的四元矢位。与第一項相应的矩陣元中只有电多極光子的貢獻。結果在第一部分矩陣元中出現的是“無散規範”(solenoidal gauge)中的矢勢。与Rose^[6]所断言者相反,在第五节中將証明:即使考虑了原子核内部对于矩陣元的貢獻,用“普通規範”和用“無散規範”計算出来的矩陣元并不相等。这一結果具体証明了:在內轉換中,縱光子和标量光子起一定的物理作用。在第六节中將指出,这一結果并不和规范不变性相矛盾。因此,由于中子躍迁所引起的电多極內轉換的系数和由于質子躍迁所引起的电多極內轉換的系数并不相等。內轉換系数既不是和原子核的具体結構無關,也不是和核子、电磁場之間的相互作用的具体形式無關。

二. 推迟相互作用的对应处理

假使忽略反常磁矩的貢獻,并將总哈密頓量按照(3)划分,那末決定內轉換躍迁的矩陣元的不等于零的第一近似就等于

$$H_{21} = \int \Phi_n^{2*} \Phi_e^{2*} \left\{ \sum_e z e^2 V(r_e) - \sum_{p,c} \frac{\partial^2}{r_{pc}} \right\} \Phi_n^1 \Phi_e^1 d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_e + \sum_k \frac{1}{E_1 - E_k + i\eta} \int \Phi_e^{2*} H_{ec} \Phi_e^1 d\mathbf{r}_e \int \Phi_n^{2*} H_{nf} \Phi_n^1 d\mathbf{r}_n, \quad (8)$$

其中 Φ_n^1 和 Φ_n^2 代表原子核的始态和終态; Φ_e^1 和 Φ_e^2 代表电子的始态和終态; $d\mathbf{r}_n$ 和 $d\mathbf{r}_e$ 代表原子核和电子的变数的微分; E_1 代表整个系統的始态的能量; E_k 代表有一个虛光子的中間态的能量; η 代表始态能級的半寬度。虛光子可以先由原子核發射,然后为电子所吸收,也可以先由电子發射,然后为原子核所吸收。 $\sum_k$ 代表按所有中間态求和。由于 $\sum_e z e^2 V(r_e)$ 和原子核的内部坐标無關以及 Φ_n^1 和 Φ_n^2 相互正交,表式(8)中 $\sum_e z e^2 V(r_e)$ 对于 H_{21} 的貢獻等于零。考虑了这一点,那末根据 Hulme^[10]:

$$\left. \begin{aligned} H_{21} &= \int \Phi_n^{2*} \Phi_e^{2*} \sum_{p,c} H_{pc} \Phi_n^1 \Phi_e^1 d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_e, \\ H_{pc} &= -(1 - \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_c) \frac{e^2}{r_{pc}} \cdot e^{i\omega_0 r_{pc}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 ω_0 代表原子核在躍迁时放出的能量。可以看出在內轉換中,起作用的是推迟势位 H_{pe} 。在同时考虑到反常磁矩的貢獻的时候,起作用的仍是推迟势位,但是推迟势位和式(9)中的势位不相同。必須首先求得具有反常磁矩的荷电粒子之間的推迟势位。

在本节中將用对应的方法寻求这一推迟势位。由于目前介子理論的缺陷,我們只能唯象地处理反常磁矩的作用。因此我們取下面的拉氏函数密度:

$$L = - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + M \bar{\psi} \psi - \right. \\ \left. - i e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi + \frac{i e \mu}{4 M} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi F_{\mu\nu} \right\}, \quad (10)$$

此間采用了亥維賽單位。式(10)中希臘字母可代表 1, 2, 3, 4; A_μ 代表电磁場的四元矢位; $A_4 = i\Phi$; $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ 代表电磁場强度; ψ 代表荷电粒子的波場; M 代表其質量; 2μ 代表其反常磁矩迴轉磁比率; γ^μ 为泡里引入狄拉克电子理論的矩陣。在第三节中我們將証明: $F_{\mu\nu}$ 和 $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$ 可以对易。因此式(10)右方最后一項是代表实数物理量的算符。从式(10)可得

$$\square A_\mu = -i e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \frac{i e \mu}{2 M} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi), \quad (11)$$

其中 $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\mu}$; 以及

$$\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + M \psi = i e A_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{i e \mu}{4 M} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi F_{\mu\nu} \quad (12)$$

和它的共軛式。此外再附加上洛倫茲条件,便得到一套完整的方程式。从式(11)可以看出,由于反常磁矩的存在,产生了附加的电荷和电流密度:

$$-\frac{i e \mu}{2 M} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi) \quad (13)$$

产生了附加的推迟势位。

設有二个粒子 a 和 b 。粒子 a 由定态 Φ_a^1 躍迁到定态 Φ_a^2 , 同时粒子 b 由定态 Φ_b^1 躍迁至定态 Φ_b^2 。 $E_a^1, E_a^2, E_b^1, E_b^2$ 各代表粒子 a 和 b 的始态和終态的能量; 粒子 a 的始态能量大于終能量, 并以

$$\omega_0 = E_a^1 - E_a^2 = E_b^2 - E_b^1 \quad (14)$$

代表二个粒子間的能量交換。根据对应方法, 粒子 a 所产生的推迟四元矢位在粒子 b 所在之处的大小是

$$A_\mu = \frac{1}{4\pi} \int j_a^\mu \frac{1}{r_{ab}} \cdot d\mathbf{x}_a, \quad (15)$$

其中 $d\mathbf{x}_a$ 为三度体积元。

$$j_a^\mu = i e \bar{\Phi}_a^2 \gamma_a^\mu \Phi_a^1 e^{-i\omega_0 x_a^0} - \frac{i e \mu}{2 M} \cdot \frac{\partial}{\partial x_a^\nu} (\bar{\Phi}_a^2 \gamma_a^\mu \gamma_a^\nu \Phi_a^1 e^{-i\omega_0 x_a^0}), \quad (16)$$

在式(16)中微分完成以后以 $(x_b^i - ir_{ab})$ 代替 x_a^i . 因此躍迁的矩陣元是

$$- \int j_b^\mu A_\mu \cdot d\mathbf{x}_b. \quad (17)$$

將式(16)中的 a 换成 b , 并將 ω_0 换成 $-\omega_0$, 便得到 j_b^μ 的表式. 经过簡單的运算, (17)可以写成如下的形式:

$$\int \Phi_a^{2*} \Phi_b^{2*} H_{ab} \Phi_a^1 \Phi_b^1 d\mathbf{x}_a d\mathbf{x}_b, \quad (18)$$

其中

$$H_{ab} = \frac{e^2}{4\pi r} \cdot B \cdot \frac{e^{i\omega_0 r_{ab}}}{r_{ab}}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B = & 1 - (\boldsymbol{\alpha}_a \boldsymbol{\alpha}_b) + \frac{\mu}{2M} \{ \omega_0 (\beta_a \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\alpha}_b) - \omega_0 (\beta_b \boldsymbol{\alpha}_b \cdot \boldsymbol{\alpha}_a) - \\ & - i(\beta_a \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a - i(\beta_b \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b - [\boldsymbol{\alpha}_b \times \beta_a \boldsymbol{\sigma}_a] \cdot \nabla_a - [\boldsymbol{\alpha}_a \times \beta_b \boldsymbol{\sigma}_b] \cdot \nabla_b \} + \\ & + \frac{\mu^2 \beta_a \beta_b}{4M^2} \{ \omega_0^2 (\boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\alpha}_b) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b - [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_a \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_b + \\ & + \omega_0 [\boldsymbol{\alpha}_a \times \boldsymbol{\sigma}_b] \cdot \nabla_b - \omega_0 [\boldsymbol{\alpha}_b \times \boldsymbol{\sigma}_a] \cdot \nabla_a \}. \end{aligned}$$

式(19)即为粒子 a 和 b 之間的推迟相互作用.

三. 量子电动力学中的推迟势位

为了使以后的計算具有更可靠的理論基础, 必須用量子电动力学来計算推迟势位. 由于引进了反常磁矩, 在以下不用相互作用表象而用海森堡表象. 从拉氏函数密度得到如下的正則坐标和动量:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{正則坐标} & \text{正則动量} \\ A_i & P_i = \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e\mu}{2M} \bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi \\ A_4 & P_4 = \frac{\partial A_4}{\partial t} \\ \psi & i\bar{\psi} \gamma^4 \\ \bar{\psi} & 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

其中 $i=1, 2$ 或 3 . 我們引入下列对易定則:

$$\left. \begin{array}{l} [P_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\psi_\sigma^*(x), \psi_\rho(x')\} = \delta_{\sigma\rho} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \end{array} \right\} \quad (21)$$

其中 $[A, B] = AB - BA$; $\{A, B\} = AB + BA$. 所有其余配对的算符都可以对易或反对易. 显然 F_{ik} 和 $\bar{\psi} \gamma^i \gamma^k \psi$ 可以相互对易. 在这里以及以后, 拉丁字母如 i, k 等可以是 $1, 2$ 或 3 . 由于 $[P_\mu, P_\nu] = 0$, $[P_\mu, \frac{\partial A_\nu}{\partial t}] = 0$, 由此可得 $[\bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi, \frac{\partial A_i}{\partial t}] = 0$. 因此 F_{4i} 和 $\bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi$ 也可以对易.

应用对易定則, 可以从拉氏函数密度求得下列形式的哈密頓量密度:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A_\mu}{\partial x^i} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^i} + \frac{1}{2} P_\mu P_\mu + \bar{\psi} \gamma^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + M \bar{\psi} \psi - \\ & - i e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi + \frac{i e \mu}{4 M} \bar{\psi} \gamma^i \gamma^k \psi F_{ik} - \frac{i e \mu}{2 M} \bar{\psi} \gamma^i \gamma^j \psi \frac{\partial A_4}{\partial x^i} + \\ & + \frac{e \mu}{2 M} \bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi \cdot P_i + \frac{e^2 \mu^2}{8 M^2} \bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi \bar{\psi} \gamma^4 \gamma^i \psi.\end{aligned}\quad (22)$$

式(22)中最后一項代表一种接触相互作用。在推迟相互作用的推算中將得到一項，恰巧与此項相互消去。

用式(22)中的哈密頓量密度可以推导出运动方程(11)和(12)。

除方程(11)和(12)以外，應該加上洛倫茲条件。我們为这一条件取下列形式：

$$z = \left\langle \left| \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} \right| \right\rangle = 0. \quad (23)$$

可以証明：只要在某一時間式(23)以及下式

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \left\langle \left| \frac{\partial P_i}{\partial x^i} - i \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^i \partial x^i} + e i \bar{\psi} \gamma^4 \psi \right| \right\rangle = 0 \quad (24)$$

得到滿足，則該兩式將在任何時間都得到滿足。式(23)和(24)的形式和在沒有反常磁矩的情況下的形式完全一样。

为了計算推迟相互作用，我們將电磁場分解为平面波：

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_{kj} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} + c_{kj}^* e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}}) e_j^i, \\ A_4 &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_{k4} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} + c_{k4}^* e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}}), \\ P_i &= -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}} (c_{kj} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} - c_{kj}^* e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}}) e_j^i, \\ P_4 &= -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}} (c_{k4} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} - c_{k4}^* e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}}); \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \text{当 } j=1 \text{ 或 } 2;$$

$$[\mathbf{e}^j \times \mathbf{k}] = 0, \quad \text{当 } j=3;$$

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^{j'} = \delta_{jj'}.$$

V 代表归一化体积； $\mathbf{k}$, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{e}$ 都代表三度空間中的矢量； $\mathbf{k}$ 代表波矢； ω 代表与此相应的周率。按照 Gupta^[7] 和 Bleuler^[8] 的方法，我們引用了不定度規，將 A_μ 和 P_μ ，包括 A_4 和 P_4 在內都当作厄密算符。引进厄密算符 η ， η 满足下列条件：

$$\left. \begin{aligned} \eta A_i &= A_i \eta, & \eta P_i &= P_i \eta, \\ \eta A_4 &= -A_4 \eta, & \eta P_4 &= -P_4 \eta, \\ \eta^2 &= 1, & \eta &= \eta^*, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

使 A_4 和 P_4 的期待值取虚数. 从式(21)和(25)可得

$$\left. \begin{aligned} [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] &= 0, & [c_{k\lambda}^*, c_{k'\lambda'}^*] &= 0, \\ [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^*] &= \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda=1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

洛倫茲条件式(23)成为

$$\left\langle \left| \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (c_{k3} + ic_{k4} - c_{-k3}^* - ic_{-k4}^*) \right| \right\rangle = 0,$$

亦即

$$\langle |c_{k3} + ic_{k4} - c_{-k3}^* - ic_{-k4}^*| \rangle = 0. \quad (28)$$

$-\mathbf{k}$ 代表方向与 $\mathbf{k}$ 相反的波矢. 式(24)成为

$$\left\langle \left| \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \left\{ \omega \sqrt{\frac{\omega}{2}} (c_{k3} + ic_{k4} + c_{-k3}^* + ic_{-k4}^*) + \rho_k \right\} \right| \right\rangle = 0, \quad (29)$$

亦即

$$\langle |c_{k3} + ic_{k4} + c_{-k3}^* + ic_{-k4}^* + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cdot \rho_k| \rangle = 0; \quad (30)$$

其中

$$\rho_k = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \gamma^4 \psi \cdot \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}. \quad (31)$$

从式(28), (30)和(31)可得

$$\left. \begin{aligned} \langle |c_{k3} + ic_{k4} + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k| \rangle &= 0, \\ \langle |c_{k3}^* + ic_{k4}^* + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k^*| \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

因此洛倫茲条件式(23)以及从洛倫茲条件导出的式(24)自然地將条件中的正周率部分和負周率部分分开. 式(32)可由下列假定:

$$c_{k3} + ic_{k4} + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k = 0 \quad (33)$$

满足. 令 $\langle |^*$ 代表 $\langle |$ 的复数共轭波函数, 并有 $\langle |^* = \langle |^* \eta$, 则从式(33)和(26)可得

$$\left\langle \left| (c_{k3}^* + ic_{k4}^* + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k^*) \right| \right\rangle = 0. \quad (34)$$

满足式(33)的波函数可以写成下列形式:

$$| \rangle = S | \rangle_c = S \cdot G | \rangle_T, \quad (35)$$

其中 S 为一么正矩陣

$$S = e^{\sum_k \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} (c_{k3} \rho_k^* - c_{k3}^* \rho_k)}, \quad (36)$$

$$G = \sum_{k,m} a_{km} (c_{k3}^* + ic_{k4}^*)^m. \quad (37)$$

$| \rangle_T$ 为不依赖于縱光子和标量光子变数的波函数; a_{km} 为任意的 k 和 m 的 c 数函数. 不难看出: $| \rangle_c = G | \rangle_T$ 包括了 Gupta^[7] 和 Bleuler^[8] 引进的自由电磁場的满足洛倫茲条

件的波函数。由于

$$[c_{k3} + ic_{k4}, c_{k3}^* + ic_{k4}^*] = 0, \quad (38)$$

故

$$c_{k3} + ic_{k4} | \rangle_C = G(c_{k3} + ic_{k4}) | \rangle_T = 0. \quad (39)$$

S 在形式上和在没有反常磁矩时用以消去縱光子和标量光子而得到庫倫能的么正变换矩陣

$$S = e^{i\psi}, \quad c = - \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(x')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e i \bar{\psi}(x) \gamma^4 \psi(x) d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad \left. \vphantom{\int} \right\} \quad (40)$$

一样。 S 满足下面的方程：

$$\left. \begin{aligned} S^{-1} (c_{k3} + ic_{k4} + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k) S &= c_{k3} + ic_{k4}, \\ S^{-1} (c_{k3}^* + ic_{k4}^* + \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \rho_k^*) S &= c_{k3}^* + ic_{k4}^*. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

从式(41)和(39)可以看出,表式(35)满足方程(33)。

寻求推迟势位的第一步是消去縱光子和标量光子,求得推广的庫倫相互作用。为此我們轉到薛定格表象。整个系統的哈密頓量是：

$$\left. \begin{aligned} H &= \int \mathcal{H} d\mathbf{x} = H_f + \sum_n H_n + \sum_n H_{nf}, \\ H_f &= \sum_{k, \lambda=1}^4 \omega (c_{k\lambda}^* c_{k\lambda} + \frac{1}{2}), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sum_n H_n &= \sum_n -i \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \nabla_n + M \beta_n + \sum_{n, n'} \frac{e^2 \mu^2}{8M^2} (\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\gamma}_{n'}) \delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n'}), \\ \sum_n H_{nf} &= \sum_{k, n} \frac{e}{\sqrt{2V\omega}} \left\{ -ic_{k4} \left(1 - \frac{i\mu}{2M} \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \right)_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^3 c_{kj} \left(-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}^j) - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] \cdot \mathbf{e}^j - \frac{\mu\omega}{2M} \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}^j) \right)_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} - \\ &- ic_{k4}^* \left(1 - \frac{i\mu}{2M} \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \right)_n e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} + \\ &\left. + \sum_{j=1}^3 c_{kj}^* \left(-(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}^j) - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] \cdot \mathbf{e}^j + \frac{\mu\omega}{2M} \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}^j) \right)_n e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} \right\}, \end{aligned}$$

其中 n 标志各个荷电粒子的力学量。將波函数写成为(35)的形式,即有

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \rangle_C = S^{-1} H S | \rangle_C = H' | \rangle_C, \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} H' &= S^{-1} H S = H_f' + \sum_n H_n + \sum_n H_{nf}' + H_c + H_R, \\ H_c &= \sum_{n, n'} \frac{e^2}{8\pi} \left(1 - \frac{i\mu}{M} \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_n \right) \frac{1}{r_{nn'}}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$H_R = \sum_k \frac{\omega}{2} \{ (c_{k3}^* + ic_{k4}^*) (c_{k3} - ic_{k4}) + (c_{k3}^* - ic_{k4}^*) (c_{k3} + ic_{k4}) + 1 \} - \\ - \sum_{k,n} \frac{e}{\sqrt{2V\omega}} \left\{ (c_{k3} + ic_{k4}) \left(1 - \frac{i\mu}{2M} \beta(\alpha \nabla) \right)_n e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} + \right. \\ \left. + (c_{k3}^* + ic_{k4}^*) \left(1 - \frac{i\mu}{2M} \beta(\alpha \nabla) \right)_n e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_n} \right\}.$$

H_f^T 和 H_{nf}^T 是(42)中相应表式内有关横光子的部分; H_c 是代表纵光子和标量光子的作用的推广库仑能. 其中除通常的库仑能以外, 还有一项

$$-\frac{ie^2\mu}{8\pi M} (\beta \alpha \cdot \nabla) \frac{1}{r}. \quad (45)$$

这是由于反常磁矩在运动时还呈现电矩的缘故. 显然, 略去零点振动能量不计, H_R 的作用只是改变波函数 $|\rangle_c = G|\rangle_T$ 中 G 所包含的系数 $a_{k,m>1}$. 这些系数取不同的数值只相当于取不同的规范^[7,8], 对于规范不变性的力学量的期待值不起作用. 我们可以将它们抛去而得到消去了纵光子和标量光子的变数的薛定格方程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\rangle_T = (H_f^T + \sum_n H_n + \sum_n H_{nf}^T + H_c) |\rangle_T. \quad (46)$$

荷电粒子之间由于横波而产生的势能可用常用的方法计算. 当荷电粒子 a 作跃迁, 并将能量 ω_0 传给荷电粒子 b 时, 由于横波的作用而产生的矩阵元是:

$$\int \Phi_a^{2*} \Phi_b^{2*} H_{ab}^T \Phi_a^1 \Phi_b^1 d\mathbf{x}_a d\mathbf{x}_b, \quad (47)$$

其中

$$H_{ab}^T = \frac{e^2}{2V} \sum_{k,j=1,2} \frac{1}{\omega} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\eta} \left[\mathbf{e}^j \cdot \left(-\mathbf{a} - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] - \frac{\mu\omega}{2M} \beta \boldsymbol{\alpha} \right)_b e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_b} \times \right. \right. \\ \times \mathbf{e}^j \cdot \left(-\mathbf{a} - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] + \frac{\mu\omega}{2M} \beta \boldsymbol{\alpha} \right)_a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_a} + \\ \left. + \frac{1}{-\omega_0 - \omega + i\eta} \left[\mathbf{e}^j \cdot \left(-\mathbf{a} - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] - \frac{\mu\omega}{2M} \beta \boldsymbol{\alpha} \right)_a e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_a} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{e}^j \cdot \left(-\mathbf{a} - \frac{\mu}{2M} [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla] + \frac{\mu\omega}{2M} \beta \boldsymbol{\alpha} \right)_b e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_b} \right] \right\}. \quad (48)$$

可以先按 j 相加. 按 k 相加之和可以换成一个积分. 在按波矢的立体角积分以后, 表式(48)中括号内的二部分可以合并成为一个积分:

$$H_{ab}^T = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega + i\eta} \left[(\boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\alpha}_b) - \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2M} (\boldsymbol{\alpha}_a \cdot [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_b + \boldsymbol{\alpha}_b \cdot [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_a + \omega (\boldsymbol{\alpha}_a \cdot \beta_b \boldsymbol{\alpha}_b) - \right. \\ \left. - \omega (\boldsymbol{\alpha}_b \cdot \beta_a \boldsymbol{\alpha}_a) - \frac{1}{\omega} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a (\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b + \frac{1}{\omega} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b (\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a \right] +$$

$$+ \frac{\mu^2 \beta_a \beta_b}{4M^2} \left([\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_a \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_b - (\boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\alpha}_b) \nabla_a \cdot \nabla_b + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b + \right. \\ \left. + \omega [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_a \cdot \boldsymbol{\alpha}_b - \omega [\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_b \cdot \boldsymbol{\alpha}_a \right) \left[\frac{\sin \omega r_{ab}}{r_{ab}} \right]. \quad (49)$$

在积分(47)內, $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_a$ 可以 $-i\omega_0$ 代替, $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_b$ 可以 $i\omega_0$ 代替. 不难將(49)积分. 結果除得到(19)中的推迟相互作用之外, 还得到一些項, 恰巧和(44)中的推广庫仑能 H_c 以及(42)中 H_n 內的接触相互作用

$$\frac{e^2 \mu^2}{4M^2} (\boldsymbol{\gamma}_a \cdot \boldsymbol{\gamma}_b) \delta(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \quad (50)$$

消去.

四. 中子躍迁导致的电多極輻射內轉換

在第一节中指出, 縱光子和标量光子不参加磁多極輻射的內轉換, 因此反常磁矩的存在不影响磁多極輻射的內轉換系数. 質子具有反常磁矩, 但在作电多極躍迁的时候, 反常磁矩所起的作用和質子电荷所起的作用相比較要小得多, 因此質子躍迁导致的电多極輻射的內轉換系数不受到反常磁矩显著的影响. 假使电多極輻射主要由中子的躍迁所导致, 那末反常磁矩就可能对內轉換系数起重要的影响.

电子的反常磁矩不需要在哈密頓量中附加上如(6)形式的項加以描述. 中子不帶电荷. 因此中子和电子間的推迟相互作用远較表式(19)簡單, 它是

$$H_{ne} = \frac{-e^2}{4\pi} \cdot B \cdot \frac{e^{i\omega r_{ne}}}{r_{ne}}, \quad (51)$$

$$B = \frac{\mu_N}{2M} \{ \omega (\beta_n \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_e) - i(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_n - [\boldsymbol{\alpha}_e \times \beta_n \boldsymbol{\sigma}_n] \cdot \nabla_n \},$$

其中 n 标志中子的力学量; e 标志电子的力学量. 由于中子躍迁而导致的內轉換矩陣元在略去整个荷电原子核的反冲运动影响以后是

$$\int \Phi_n^{2*} \Phi_e^{2*} H_{ne} \Phi_n^1 \Phi_e^1 d\mathbf{x}_n \cdot d\mathbf{x}_e. \quad (52)$$

可以將(51)展开成为电子坐标和中子坐标的球諧函数和立体球諧函数的乘积的級数. 引进下列函数:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{L,M}^{(1)} &= \sqrt{\frac{L}{2L+1}} g_{L+1}(\omega r) \mathbf{Y}_{L,L+1,M} + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} g_{L-1}(\omega r) \mathbf{Y}_{L,L-1,M}, \\ \mathbf{a}_{L,M}^{(2)} &= g_L(\omega r) \mathbf{Y}_{L,L,M}, \\ \mathbf{a}_{L,M}^{(3)} &= -\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} g_{L+1}(\omega r) \mathbf{Y}_{L,L+1,M} + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} g_{L-1}(\omega r) \mathbf{Y}_{L,L-1,M}, \\ \mathbf{a}_{L,M}^{(4)} &= g_L(\omega r) \mathbf{Y}_{L,M}; \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

其中 $Y_{L,M}(\theta, \varphi)$ 代表归一化的球諧函数; $Y_{L,L,M}(\theta, \varphi)$ 代表归一化的立体球諧函数,

$$g_L(\omega r) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (i)^L \cdot \frac{J_{L+1/2}(\omega r)}{\sqrt{\omega r}}, \quad (54)$$

$J_{L+\frac{1}{2}}(\omega r)$ 代表 Bessel 函数。此外，將表式 (53) 中的 Bessel 函数换成第一类 Hankel 函数，它們又引进另外四个函数 $\mathbf{b}_{L,M}^{(1)}$, $\mathbf{b}_{L,M}^{(2)}$, $\mathbf{b}_{L,M}^{(3)}$ 和 $\mathbf{b}_{L,M}^{(4)}$ 。那末在 $r_e > r_n$ 时，

$$H_{nc} = \frac{-ie^2\mu_N\omega}{32\pi^2 M} \sum_{L,M} \{ -i(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)_n \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(4)*}(n) \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(4)}(e) + \\ + \sum_{j=1}^3 \omega [\beta_n \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(j)*}(n)] [\boldsymbol{\alpha}_e \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(j)}(e)] - \sum_{j=1}^3 [\beta \boldsymbol{\sigma} \times \nabla]_n \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(j)*}(n) \cdot (\boldsymbol{\alpha}_e \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(j)}(e)) \}. \quad (55)$$

在 $r_e < r_n$ 时，將 (55) 式中的 a^* 换成 b , b 换成 a^* 。在实际的轉換过程中，由于选择定则的作用，只有具有一定的 L 和一定宇称的項作出显著的貢獻。在电多極轉換中，矩陣元等于

$$\begin{aligned} & \frac{-ie^2\mu_N\omega}{32\pi^2 M} \sum_M \left\{ \int_0^R \Phi_n^{2*}(-i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{a}_{L,M}^{(4)*} \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}(\mathbf{b}_{L,M}^{(4)}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \right. \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(1)}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(3)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(3)}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(2)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(1)}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \int_0^R \Phi_n^{2*}(-i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{b}_{L,M}^{(4)} \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*}(\mathbf{a}_{L,M}^{(4)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(1)}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(3)}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(3)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & \left. + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(2)}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e \right\}, \quad (56) \end{aligned}$$

其中 R 为原子核半径。考虑到

$$\nabla \mathbf{a}_{L,M}^{(4)} = i\omega \mathbf{a}_{L,M}^{(3)}, \quad (57)$$

并且略去較主要項小一个因素 $(\omega R)^2$ 的項，那末矩陣元就等于

$$\begin{aligned} & -\frac{ie^2\mu_N\omega}{32\pi^2 M} \cdot \sum_M \left\{ \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(2)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \right. \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(2)}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e + \\ & + \omega \int_0^R \Phi_n^{2*}(\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \times \\ & \left. \times \int_{r_n}^\infty \Phi_e^{2*}[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(1)} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{L,M}^{(3)} - \sqrt{\frac{L}{L+1}} \mathbf{b}_{L,M}^{(4)}] \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

在表式 (58) 中，最后一項内对电子坐标的积分里出现了“普通规范”的行波表式。由于这一积分在下限并不奇异，可以將它的下限 r_n 換作零而不致于产生显著的誤差。这就

是一般計算內轉換系数中所用的积分。表式(58)的第一項內对电子坐标的积分里出現的是“無散規範”的行波表式。由于 $\mathbf{b}_{L,M}^{(1)}$ 在原点附近具有較高的奇异性, 这一积分的下限 r_n 不能以零代替。另一方面, 表式(58)中的第二項代表在原子核内部区域的电子波所作的貢獻。这一貢獻的大小和其他二項的貢獻屬於同一数量級, 不能略去。Roso^[6]認為, 將表式(58)中的第一項和第二項的貢獻加起来, 就和用“普通規範”的行波表式計算的結果一样。这一估計是并不正确的。可以將(58)改写成如下的形式:

$$\begin{aligned} & -\frac{ie^2\mu_N\omega^2}{32\pi^2M}\cdot\sum_M\left\{\int_0^{r_n}\Phi_n^{2*}(\beta\sigma\cdot\mathbf{b}_{L,M}^{(2)})\Phi_n^1d\mathbf{x}_n\int_0^{r_n}\Phi_e^{2*}(\alpha\cdot\mathbf{a}_{L,M}^{(1)*})\Phi_e^1d\mathbf{x}_e- \right. \\ & -\int_0^{r_n}\Phi_n^{2*}(\beta\sigma\cdot\mathbf{a}_{L,M}^{(2)*})\Phi_n^1d\mathbf{x}_n\int_{r_n}^\infty\sqrt{\frac{L}{L+1}}\Phi_e^{2*}(\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,M}^{(3)}-b_{L,M}^{(4)})\Phi_e^1d\mathbf{x}_e+ \\ & +\int_0^{r_n}\Phi_n^2[\beta\alpha\cdot\mathbf{a}_{L,M}^{(1)*}+\beta\sigma\cdot\mathbf{a}_{L,M}^{(2)*}]\Phi_n^1d\mathbf{x}_n\times \\ & \times\int_0^\infty\Phi_e^{2*}[\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,M}^{(1)}+\sqrt{\frac{L}{L+1}}(\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,M}^{(3)}-b_{L,M}^{(4)})]\Phi_e^1d\mathbf{x}_e. \end{aligned} \quad (59)$$

在下一节中, 我們通过一个簡單的特例指出, 表式(59)中前二項并不一定相互消去, 得到的內轉換系数不一定和用“普通規範”計算的結果相同。

五. 一个特例的計算

我們討論如下的一个特例: 中子的始态的总角动量和軌道角动量各为 $J_1\hbar$ 和 $L_1\hbar$, 其終态的总角动量和軌道角动量各为 $J_2\hbar$ 和 $L_2\hbar$. 并有 $J_1=L_1+\frac{1}{2}$, $J_2=L_2+\frac{1}{2}$. 放出的光子的角动量是 $L\hbar=(J_1-J_2)\hbar$. 取 z 軸, 使中子始态总角动量在該方向的分量等于 $J_1\hbar$, 那末在式(59)中只有 $M=L$ 这一項或 $M=-L$ 这一項不等于零。內轉換系数就等于:

$$\frac{e^2\omega}{4\hbar c}\cdot\sum_\nu\frac{|A_1+A_2+(\langle\beta\sigma\cdot\mathbf{a}_{L,L}^{(2)*}\rangle_n+\langle\beta\alpha\cdot\mathbf{a}_{L,L}^{(1)*}\rangle_n)\langle\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,L}^{(1)}+\sqrt{\frac{L}{L+1}}(\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,L}^{(3)}-b_{L,L}^{(4)})\rangle_e|^2}{[\langle\beta\sigma\cdot\mathbf{a}_{L,L}^{(2)*}\rangle_n+\langle\beta\alpha\cdot\mathbf{a}_{L,L}^{(1)*}\rangle_n]^2}. \quad (60)$$

ν 按 K 層中两个电子的始态和終态求和。 n 和 e 各标志有关中子和电子波函数的矩陣元。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^{r_n}\Phi_n^{2*}(\beta\sigma\cdot\mathbf{b}_{L,-L}^{(2)})\Phi_n^1d\mathbf{x}_n\int_0^{r_n}\Phi_e^{2*}(\alpha\cdot\mathbf{a}_{L,-L}^{(1)*})\Phi_e^1d\mathbf{x}_e, \\ A_2 &= -\int_0^{r_n}\Phi_n^{2*}(\beta\sigma\cdot\mathbf{a}_{L,L}^{(2)*})\Phi_n^1d\mathbf{x}_n\int_{r_n}^\infty\sqrt{\frac{L}{L+1}}\Phi_e^{2*}(\alpha\cdot\mathbf{b}_{L,L}^{(3)}-b_{L,L}^{(4)})\Phi_e^1d\mathbf{x}_e, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Φ_e^2 按能量归一化。可以看出: 假使 A_1 和 A_2 相互消去, 得到的結果就和用“普通規範”計算的結果完全一样。 A_1 和 A_2 如不相互消去, 得到的結果就未必和用“普通規範”計

算的結果一樣。

略去較主要項小一個因素 $(\omega R)^2$ 的微小項，

$$\int_0^{r_n} \Phi_e^{2*} (\alpha \cdot \mathbf{a}_{L,-L}^{(1)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e \cong \sqrt{\frac{L+1}{L}} \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*} (\alpha \cdot \mathbf{a}_{L,-L}^{(3)*}) \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e. \quad (62)$$

注意到式(57)，經過部分積分，表式(62)等於

$$\sqrt{\frac{L+1}{L}} \left\{ \frac{i}{\omega} \int \Phi_e^{2*} a_{L,-L}^{(4)*} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O} - \int_0^{r_n} \Phi_e^{2*} a_{L,-L}^{(4)*} \Phi_e^1 d\mathbf{x}_e \right\}, \quad (63)$$

其中第一項按以 r_n 為半徑的球面積分。 $d\mathbf{O}$ 的方向向外。 不难看出，第二項較第一項小一個因素 $(E\omega R^2)$ 。 其中 E 為電子在終態的總能量。 因此可以將第二項略去。 由於

$$a_{L,-L}^{(4)*} b_{L,-L}^{(2)} = -a_{L,L}^{(2)*} b_{L,L}^{(4)}, \quad (64)$$

使得

$$A_1 = -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{L+1}{L}} \int_0^R \Phi_n^{2*} (\beta \sigma \cdot \mathbf{a}_{L,L}^{(2)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int \Phi_e^{2*} b_{L,L}^{(4)} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O}. \quad (65)$$

用類似的方法，可得

$$A_2 = -\frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{L}{L+1}} \int_0^R \Phi_n^{2*} (\beta \sigma \cdot \mathbf{a}_{L,L}^{(2)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int \Phi_e^{2*} b_{L,L}^{(4)} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O}. \quad (66)$$

因此 A_1 和 A_2 並不相互消去。 二者之和是

$$-\frac{i}{\omega} \left(\sqrt{\frac{L+1}{L}} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \right) \int_0^R \Phi_n^{2*} (\beta \sigma \cdot \mathbf{a}_{L,L}^{(2)*}) \Phi_n^1 d\mathbf{x}_n \int \Phi_e^{2*} b_{L,L}^{(4)} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O}. \quad (67)$$

不难看出，(67) 和原子核結構之間的关系較表式(59)中第三項和原子核結構之間的关系為複雜。

假使 K 電子波函數中的相對論效應可以略去，電子在終態可以當作在真空中的自由電子處理，那末

$$\int \Phi_e^{2*} b_{L,L}^{(4)} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O} \quad (68)$$

不再和作為積分區域的球面的半徑 r_n 有顯著的关系。 其中的主要項和 r_n 無關。 作者曾經指出^[11]

$$\langle \beta \alpha \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)*} \rangle \cong -\frac{L+1}{L} \langle \beta \sigma \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(2)*} \rangle. \quad (69)$$

作了這些近似，內轉換系數就等於

$$\begin{aligned} \frac{e^2 \omega}{4\hbar c} \sum_r \left| \frac{iL}{\omega} \left(\sqrt{\frac{L+1}{L}} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \right) \int \Phi_e^{2*} b_{L,L}^{(4)} \alpha \Phi_e^1 d\mathbf{O} + \right. \\ \left. + \langle \alpha \cdot \mathbf{b}_{L,L}^{(1)} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} (\alpha \cdot \mathbf{b}_{L,L}^{(3)} - b_{L,L}^{(4)}) \rangle_e \right|^2. \quad (70) \end{aligned}$$

表式(70)中前面一項和後面一項屬於同一數量級，不能略去。 因此得到的結果和用“普通規範”計算的結果

$$\frac{e^2\omega}{4\hbar c} \sum_{\nu} \left| \langle \alpha \cdot \mathbf{b}_{L,L}^{(1)} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} (\alpha \cdot \mathbf{b}_{L,L}^{(3)} - b_{L,L}^{(4)}) \rangle_c \right|^2 \quad (71)$$

并不相同。

六. 关于规范不变性的讨论

在本文中所得到的結論和 Rose^[6], Kramer^[4] 等所得的結論不同。他們認為：內轉換系数和核子及电磁場之間的相互作用的具体形式無關。本文指出：中子的反常磁矩对于由于中子躍迁而导致的电多極內轉換系数可能产生显著的影响。有必要檢查結論之所以不同导源于何处。以下將先从量子电动力学的角度分析这一問題，然后再从对应方法的角度分析这一問題。

在量子电动力学中，对易定則 (27) 之导出是和將四元矢位按完全正交系的函数展开这一步驟密切相連系的。但是“普通规范”中的函数并不形成一个完全正交系。因此假使一定要將四元矢位按普通规范中的函数展开，那末就不会得到像 (27) 那样的对易定則。因此在計算矩陣元时通常不能用普通规范中的四元矢位，只有在特殊的情况中無散规范才能由普通规范代替。在普通规范中，电多極矩辐射場由下列四元矢势位

$$\left(\mathbf{a}_{L,M}^{(1)} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \mathbf{a}_{L,M}^{(3)}, \quad \sqrt{\frac{L}{L+1}} a_{L,M}^{(4)} \right) \quad (72)$$

表示，而在無散规范中則由

$$\mathbf{a}_{L,M}^{(1)} \quad (73)$$

表示。在普通规范中，矩陣元是

$$\langle \alpha \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)} + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \alpha \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(3)} - \sqrt{\frac{L}{L+1}} a_{L,M}^{(4)} \rangle. \quad (74)$$

利用关系 (57)，經過部分积分，可得

$$\langle \alpha \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(3)} \rangle = \frac{\omega_0}{\omega} [a_L^{(4)}], \quad (75)$$

其中 ω_0 是荷电粒子始态和終态之間能量的差別； ω 是被吸收的电多極辐射的周率。因此表式 (74) 等于

$$\langle \alpha \cdot \mathbf{a}_{L,M}^{(1)} \rangle + \sqrt{\frac{L}{L+1}} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \langle a_{L,M}^{(4)} \rangle. \quad (76)$$

这一表式只有在 $\omega = \omega_0$ 时，亦即能量守恒时，才等于無散规范中的相应表式。由于在中間态中能量常常不守恒，因此在涉及中間态的高于一次近似的矩陣元的計算中常常不能以普通规范来代替無散规范。Rose^[6] 在他的討論中將他文中的表式 (4.28) 中的無散规范換作普通规范。即使在他的表式 (4.28) 中出現的是駐波的表式，这样的变换也是不容許的。(4.28) 式中积分

$$\int d\mathbf{r}_1 \psi_f^* \mathfrak{H}(A_L^H(\tau)) \psi_i \int d\mathbf{r}_2 \Phi_f^* \mathfrak{H}(A_L^H(\tau)) \Phi_i \quad (77)$$

只有在 $\omega = W$ 时, 它的数值才不会因规范的转换而改变. (77) 中用的符号沿用了 Ros3 在他的文^[6]中的符号. 在 $\omega \neq W$ 时, (77) 的数值将因规范的转换而改变. 因此, 在量子电动力学中, 规范的变化意味着纵光子和标量光子的数目的改变^[7, 8, 12], 和改变矩陣元中四元矢位的表式没有什么关系. 与此相应在规范转换中, 态矢作一形式上的转换

$$\Psi' \longrightarrow e^{ie\lambda}\Psi, \quad (78)$$

而代表四元矢位的算符则并不改变, 由于转换 (78) 测量四元矢位所得的平均期待值作一相应的规范转换.

在用对应方法的计算中, 原子核被当作电磁场的源. 这一电磁场的四元矢位由 (15) 表示. 内转换被当作一种由于这种电磁场的存在而导致的电子的跃迁过程. 在实际计算中, 只考虑和计算了第一次微扰近似的贡献. 在规范变换中, 跃迁几率按理是不会改变的. 但是在计算中考虑规范变换的影响时, 假使只是在如 (71) 的矩陣元中代入变换以后的四元矢位, 那末所得的矩陣元的数值一般地说来将不会和变换以前的矩陣元的数值一样. 因为表式 (71) 只能将规范变换的第一次近似的效应包括进去. 要将规范变换的全部效应包括进计算中去, 最好是变换电子的波函数而不改变计算矩陣元时所用的四元矢位. 设以 λ 代表规范转换中的母函数, 则可以用 $e^{ie\lambda} \cdot \Phi_0$ 代替 (71) 中的 Φ_0 . 表式 (71) 的数值显然不会因为这一代替而改变. 不难看到, 所有高次微扰计算的结果都不会因为由于 Φ_0 为 $e^{ie\lambda} \cdot \Phi_0$ 所代替而有所改变. 而这正是规范不变性所要求的.

Kramer^[4] 也讨论了核子的反常磁矩对于内转换系数的影响. 和本文的结果相反, 他发现核子的反常磁矩对于内转换系数的数值无任何影响. 但是他的计算中有错误. 在计算积分的时候, 他认为某些项的贡献等于零, 因此把它们略去了, 其实这些项是高度奇异的函数, 对积分的数值作出相当重要的贡献, 不能略去的. 例如: 在他的论文中的第 (29) 式中, 有一项

$$k^2 \mathbf{r} j_L(kr) Y_{L,M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (79)$$

被认为在积分中不作任何贡献, 因此略去了. 在 (79) 中沿用了 Kramer 文中原来的符号. 但是这一项是不能略去的. 因为在按 k 积分以后, 由于这一项的存在而产生了一个具有高度奇异性质的势位, 其形式如

$$\sim \frac{\delta(r_n - r_E)}{r_n^2}. \quad (80)$$

这样奇异的势位对于矩陣元作出显著的贡献是不能忽略的. 在 Kramer 论文中的 (37) 式中 k 为 W 所代替, 而这也是不容许的. 在他的计算中, 将电子波在原子核区域内对于 $U_n^{(2)}(\text{electr.})$ 的贡献略去, 但没有提出理由来证明这种忽略是容许的. 在本文中 (56) 表式内的相应项则显然不能忽略.

参 考 文 献

- [1] Taylor, H. M. and Mott, N. F., *Proc. Roy. Soc.* **A142** (1933), 215.
- [2] Dancoff, S. M. and Morrison, P., *Phys. Rev.* **55** (1939), 122.
- [3] Tralli, N. and Goertzel, G., *Phys. Rev.* **83** (1951), 390.
- [4] Kramer, G., *Zeits. f. Phys.* **146**(1956), 187.
- [5] Слив, Л. А., *ЖЭТФ* **21** (1951), 770.
- [6] Rose, M. E., *Multipole Fields* (1955).
- [7] Gupta, S. N., *Proc. Phys. Soc.* **63A** (1950), 681.
- [8] Bleuler, K., *Helv. Phys. Acta* **23** (1950), 567.
- [9] Blatt, J. M. and Weisskopf, V. F., *Theoretical Nuclear Physics* (1952), 614.
- [10] Hulme, H. R., *Proc. Roy. Soc.* **A154** (1936), 487.
- [11] 朱洪元, *物理学报* **13** (1957), 217.
- [12] Koba et al., *Progr. Theor. Phys.* **2** (1947), 101.

THE ELECTRIC MULTIPOLE INTERNAL CONVERSION INDUCED BY NEUTRON TRANSITION

T'ZU HUNG-YÜAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The effect of the anomalous magnetic moment of the nucleon on the value of the internal conversion coefficient is investigated. The parts played by the scalar and the longitudinal photons in the process of the internal conversion are first discussed. The retarded interaction between the charged particles with anomalous magnetic moment is derived by the correspondence method. The results obtained is then verified by the quantum electrodynamical treatment. The retarded interaction thus obtained is then applied to the calculation of the internal conversion coefficient. It turns out, that the anomalous magnetic moment of the nucleon has negligible influence upon the coefficient of the magnetic conversion and the coefficient of the electric conversion induced by the proton transition. However, the anomalous magnetic moment of the nucleon does cause considerable modification of the coefficient of the electric conversion induced by the neutron transition, contrary to the conclusion arrived at by various authors^[4, 6]. The problem of the gauge transformation is discussed and the errors contained in the treatment given by these authors are pointed out.