

從截面上晶粒大小的面密度 分佈計算體密度分佈*

程 開 甲

(南 京 大 學)

提 要

在截面上可以測定晶粒依直徑大小分佈的面密度。利用夏耳和薩爾忒可夫方法可以將面密度換算到體密度。這些方法主要是解多元聯立一次方程。本文提出一個新的方法；直接解積分方程，利用拉普拉斯變換求出體密度的解。將所得結果和以前的結果對照，發現有一些差異；即過去的計算的結果一般使密度偏低，並且在變化較大的區間無法正確地估計及計算出來。本文的方法是嚴格的，可以知道各處的精確程度。在一個具體的例中來表示出這一點。

一. 引 論

研究重結晶或再結晶的成核成長等規律，常需作金相截面上晶粒密度依其大小的分佈曲線的測定，再用計算方法來換算到晶粒大小的體密度的分佈曲線。因此精確的計算方法為這些研究必要的工具。過去的方法有如夏爾^[1] (Scheil)，薩爾忒可夫^[2] (Салтыков)，用近似地解代數聯立方程，但在各個具體問題上尚不能精確估計其近似的程度。由於計算的結果一般沒法用實驗方法來驗證（因為我們只能觀察平面分佈），所以理論計算的精確度的保證和嚴格的求解顯得更加重要。

文中首先寫出面密度（依晶粒尺寸大小的分佈）和體密度分佈的關係式。利用拉普拉斯變換及運算數學解這積分方程。結果是很簡潔。在特別的例子，當體密度為一個 δ -函數，驗證了這解的正確性。

在一個具體的數值計算的例子，比較了新和舊方法所導出的結果。在用夏耳等法，利用薩爾忒可夫所作的計算系數表^[3]，在計算的結果中發現晶粒的分佈密度一般地偏低，因此總的密度也偏小了。由於本文中的方法比較嚴格，每處的精確度都是明確

* 1956 年 8 月 18 日收到。

的,因此,這結果說明過去的計算尚有不够精確的地方。特別,在小尺寸的晶粒計算上,過去用代數法有含糊的地方,即有關於這些系數中的發散項的計算有些任意性的。在本文中由於應用分析方法,發散項自然地在積分中變為收斂,沒有混亂之處。

順便可以提一下,以上的方法只能限制於用來研究球形的晶粒。然而,有了這新的分析方法,處理另外一些特殊情形,例如橢圓和針狀的晶粒可能會有一定的希望的。這對於研究脫溶沉澱金相分佈有重要的意義的。

二. 面密度和體密度分佈的關係

在本文中,仍假定晶粒為球形的。使 $f(r) \Delta r$ 代表在單位體積內晶粒半徑在 r 到 $r + \Delta r$ 之間的個數。在一單位體積中,半徑為 r 的晶粒給截面所切的幾率為 $(2r)/1$,而若截在距球中心 h 到 $h + dh$ 間的幾率則為

$$(2dh/2r) \cdot 2r = 2dh \quad (1)$$

使 R 為截面上圓周的半徑,

則

$$R^2 + h^2 = r^2,$$

且

$$dh = \frac{R|dR|}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2)$$

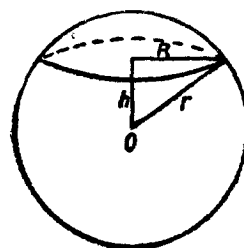


圖 1

使 $F(R) dR$ 代表在截面上,單位面積內,半徑在 R 到 $R + dR$ 之間的晶粒數,那末

$$F(R) dR = \sum_{\substack{\Delta r \\ r > R}} f(r) \Delta r \cdot \frac{2R|dR|}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

因此

$$F(R) dR = \int_R^\infty \frac{2R}{\sqrt{r^2 - R^2}} f(r) dr \cdot dR,$$

或

$$F(R) = 2 \int_R^\infty \frac{R f(r) dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (3)$$

(3) 式便是通常所知的面密度 $F(R)$ 和體密度 $f(r)$ 的關係式。利用 (3) 式可以證明總的體密度 N 為

$$N \equiv \int_0^\infty f(r) dr = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(R)}{R} dR, \quad (4)$$

或寫

$$F(R_i) \triangleq R_i \equiv F_i, \quad 2R_i = D_i,$$

則得到熟知公式:

$$N = \frac{2}{\pi} \sum_i \frac{F_i}{D_i}. \quad (5)$$

使

$$R \equiv e^\eta, \quad r \equiv Ry, \quad y = e^\xi, \quad r = e^{\eta+\xi}, \quad (6)$$

並使

$$G(\eta) \equiv \frac{1}{2R} F(R), \quad (7)$$

$$f(r) \equiv g(\xi + \eta). \quad (8)$$

代入(3)式,得到

$$G(\eta) = \int_0^\infty \frac{g(\xi + \eta)}{\sqrt{1 - e^{-2\xi}}} d\xi.$$

引用算符

$$D \equiv \frac{d}{d\eta},$$

並且

$$e^{\xi D} g(\eta) = g(\xi + \eta),$$

則

$$G(\eta) = \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{\xi D}}{\sqrt{1 - e^{-2\xi}}} d\xi \right\} \cdot g(\eta). \quad (9)$$

今在下面的積分中

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{e^{\xi D}}{\sqrt{1 - e^{-2\xi}}} d\xi,$$

使

$$\cos \phi \equiv e^{-\xi},$$

則

$$I \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{-D-1} d\phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)}, \quad (10)$$

在 $-D-1 > -1$ 或 $-D > 0$ 的條件下, 上式成立^[4]. 當然, 算符 D 本身是不講

這條件的,但是,這裏所用的算符 D , 是指在拉普拉斯變換的意義下說的. 因此,只要在具體代入拉普拉斯積分中所代入 D 的數值能適合 (10) 的條件即行, 這在以下的拉普拉斯變換中我們將證實之.

利用 (10), (9) 式變為

$$\left. \begin{aligned} G(\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right)} g(\eta), \\ g(\eta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)} G(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

使 $G(\eta)$ 展開拉普拉斯變換

$$G(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} \varphi(t) dt, \quad (12)$$

於是

$$g(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta t} \varphi(t) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)} dt. \quad (13)$$

從 (13) 式中, 我們看到, $-D$ 為 t 所代, 而 $t > 0$, 所以 (10) 式積分的條件完全符合.

令

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{2}{t} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right), \\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)} &= \frac{t}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)} = \\ &= \frac{t}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{\left(n + \frac{1+t}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}^{[5]}. \end{aligned} \quad (14)$$

將 (14) 代入 (13), 注意到 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = (-)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$,

則

$$g(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\eta t} \varphi(t) t dt \cdot \sum_0^{\infty} (-)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{2n+1+t},$$

引入

$$\int_0^{\infty} e^{-(2n+1+t)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2n+1+t},$$

$$g(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\eta)t} \varphi(t) t \sum_0^{\infty} e^{-\lambda(2n+1)} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\eta)t} \varphi(t) t dt \frac{1}{\sqrt{e^{2\lambda}-1}}.$$

令

$$G(\lambda+\eta) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\eta)t} \varphi(t) dt,$$

$$\frac{d}{d\lambda} G(\lambda+\eta) = - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\eta)t} \varphi(t) t dt,$$

故得

$$g(\eta) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\lambda} G(\lambda+\eta) \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{e^{2\lambda}-1}},$$

代回 (6), (7), (8) 的 R , r 及 $f(r)$, $F(R)$ 的定義, 則

$$f(r) = - \frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{r dR}{\sqrt{R^2-r^2}} \frac{d}{dR} \left(\frac{F(R)}{R} \right), \quad (15)$$

或

$$f(r) = \frac{r}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{F(R) dR}{R^2 \sqrt{R^2-r^2}} - \frac{r}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{R \sqrt{R^2-r^2}} \frac{dF(R)}{dR} dR. \quad (16)$$

(15), (16) 給出了體密度 $f(r)$ 爲面密度 $F(R)$ 所表示的積分形式.

很容易從 (16) 式直接積分得 (4) 式:

$$\int_0^{\infty} f(r) dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(R)}{R} dR. \quad (4)$$

三. δ -函數的例證

若 $f(r)$ 爲 δ -函數,

$$f(r) = \delta(r-a), \quad (17)$$

則由 (3) 知

$$F(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{R}{\sqrt{r^2-R^2}} f(r) dr = 0, \quad \text{若 } R > a;$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{a^2-R^2}}, \quad \text{若 } R < a. \quad (18)$$

於是從 (18), (15) 倒過來計算 $f(r)$, 證明 $f(r)$ 為一個 δ -函數. 顯然, 當 $r > a$, (15) 式給出了

$$f(r) = 0, \quad r > a, \quad (19)$$

因為由 (18) 知 $F(R) = 0$, $R > r > a$. 其次, 在 $r < a$ 時, $f(r)$ 也為零. 從 (15) 式, 得

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{r}{\pi} \int_r^\infty \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{d}{dR} \left(\frac{F(R)}{R} \right) = \\ &= -\frac{r}{\pi} \int_r^\infty \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{d}{dR} \left(\frac{F(R)}{R} - \frac{F(r)}{r} \right), \end{aligned}$$

利用部分積分,

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{r}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left\{ \frac{F(R)}{R} - \frac{F(r)}{r} \right\} \Big|_r^\infty + \\ &+ \frac{r}{\pi} \int_r^\infty \left(\frac{F(R)}{R} - \frac{F(r)}{r} \right) d \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

顯然, 前一項為零. 今使

$$R = r \sec \theta, \quad a = \sec \theta_0,$$

並由 (18) 式知

$$\begin{aligned} R < a, \quad \frac{F(R)}{R} &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - r^2 \sec^2 \theta}}, \\ r < a, \quad \frac{F(r)}{r} &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

(20) 變為

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2 \sec^2 \theta}} d \cot \theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} d \cot \theta,$$

上式經積分後, 得到

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{a^2 - r^2} \sqrt{(a^2 - r^2) \cot^2 \theta - r^2} \Big|_0^{\theta_0} - \cot \theta \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{-1}{a^2 - r^2} \sqrt{(a^2 - r^2) \cot^2 \theta - r^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

因此,

$$f(r) = 0, \quad r < a. \quad (21)$$

最後, 由 (4) 式

$$\int_0^\infty f(r) dr = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(R)}{R} dR = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{2dR}{\sqrt{a^2 - R^2}} = 1. \quad (22)$$

根據, (19), (21), (22) 式可知

$$f(r) = \delta(r-a).$$

四. 具體數字計算

爲了要運算實際問題, 我們將 (16) 式寫成求和的形式. 使 r, R 分爲若干以 δ 爲區間的積分:

$$f(n\delta) = \frac{1}{\pi} \sum_m \left\{ - \int_{\theta_{m,n}}^{\theta_{m+1,n}} \frac{dF(R)}{dR} d\theta + \frac{1}{n\delta} \int_{\theta_{m,n}}^{\theta_{m+1,n}} F(R) d \sin \theta \right\},$$

其中

$$R = r \sec \theta, \quad (n+m) \delta = n\delta \sec \theta_{m,n};$$

$$\cos \theta_{m,n} = \frac{n}{n+m}. \quad (23)$$

爲了計算方便起見, 我們取 δ 適當的小, 使得 $F(R)$ 在 R 到 $R + \delta$ 的區間中變化較少; 使得 $F(R)$ 在此區間內, 可以僅展開到 δ 的一次幕, 忽略 δ^2 ; 即取到 $\frac{dF(R)}{dR}$ 爲止, 而忽略 $\frac{d^2F}{dR^2}$ 等高次微分系數. 於是在上述的積分段落中可以使

$$\left. \begin{aligned} F(R) &= \frac{1}{2} [F(\overline{n+m} \delta) + F(\overline{n+m+1} \delta)], \\ \frac{d}{dR} F(R) &= \frac{1}{\delta} [F(\overline{n+m+1} \delta) - F(\overline{n+m} \delta)]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

使

$$\left. \begin{aligned} 2\delta &= \Delta, \\ f_n &= \Delta \cdot f(n\delta), \\ F_n &= \Delta \cdot F(n\delta), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

則

$$f_n = \frac{1}{\pi \delta} \sum_{m=0} \left\{ \frac{1}{2n} (F_{n+m} + F_{n+m+1}) \int_{\theta_{m,n}}^{\theta_{m+1,n}} \cos \theta d\theta - (F_{n+m+1} - F_{n+m}) (\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}) \right\}.$$

代入 $\theta_{m,n} = \cos^{-1} \frac{n}{m+n}$, 則

$$f_n = \frac{2}{\pi \Delta} \sum_{m=0} \left\{ \left(\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+m} \right)^2} \right) (F_{n+m+1} + F_{n+m}) \frac{1}{2n} - \right.$$

$$-\left(\cos^{-1} \frac{n}{n+m+1} - \cos^{-1} \frac{n}{n+m}\right)(F_{n+m+1} - F_{n+m}),$$

經整理後得

$$f_n = \frac{2}{\pi \Delta} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} F_{m+n}, \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{n,0} &\equiv \left(\frac{1}{2n} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2} + \cos^{-1} \frac{n}{n+1} \right), \\ A_{n,m} &\equiv \frac{1}{2n} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+m-1} \right)^2} \right) + \\ &\quad + \cos^{-1} \frac{n}{n+m+1} + \cos^{-1} \frac{n}{n+m-1} - 2 \cos^{-1} \frac{n}{n+m}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (27)$$

公式 (26) 中, n, m , 也並不一定限於整數, 也可以為分數的, 具體的選擇要看各區間所採用的精確的程度, 使區間可以靈活地放大或收縮; 這樣可以定出一系列的

$m^{(1)}, m^{(2)}, m^{(3)}, \dots$, 和 $n^{(1)}, n^{(2)}, \dots$ 的數值。

在下列的表 1 中列出了當 n, m 為整數時系數 $A_{n,m}$ 的數值。

表 1. $A_{n,m}$ 值

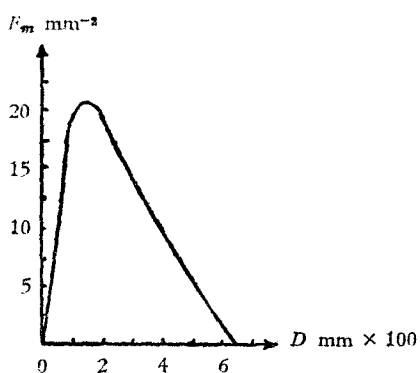
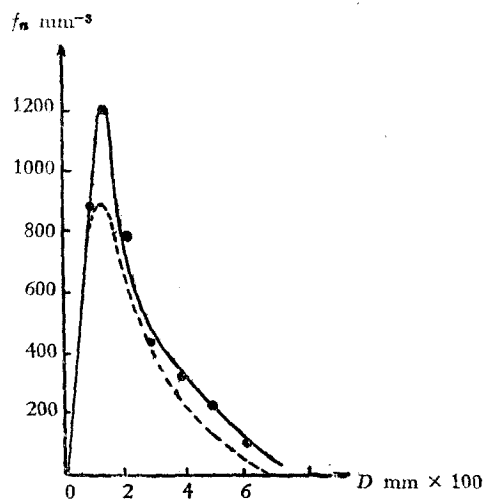
$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
1	1.4800	-0.3909	-0.0358	-0.0175	-0.0095	-0.0043	-0.0038
2	1.0375	-0.4189	-0.0407	-0.0214	-0.0112	-0.0065	
3	0.8329	-0.3848	-0.0508	-0.0215	-0.0122		
4	0.7185	-0.3426	-0.0688	-0.0319			
5	0.6509	-0.3401	-0.0362				
6	0.5839	-0.3042					
7	0.5399						

五. 計算具體一例

我們仍引用薩爾忒可夫的例^[3], 研究一種回火可鍛鑄鐵中碳粒的分佈。下列表 2 中, 列出以 0.01 毫米為直徑的間隔內分佈的面密度的觀察值。利用各個 F_m 可以畫出 $F(r)$ 的曲線, 如圖 2 中所示。在表 2 中所列的 m 值為相當於 $r = m\delta$, $\delta = 0.005\text{mm}$, $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ 。對於 m 為 0, 1, 2, 3, $\dots$ 等值的 F_m 可以近似地取兩旁 $F_{m+\frac{1}{2}}, F_{m-\frac{1}{2}}$ 的

表2. 面 密 度 F_m

碳粒直徑區間 mm	0.0—0.01	0.01—0.02	0.02—0.03	0.03—0.04	0.04—0.05	0.05—0.06
碳粒平均直徑 mm D	0.005	0.015	0.025	0.035	0.045	0.055
區 間 中 密 度 F_m mm^{-2}	9	21	16	12	9	5
m	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5

圖2. F_m 和 D 的曲線圖3. 直徑 D 和 f_n 的曲線

平均值而得之。所得的 F_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, 在表3中列出。將表3中的 F_m 值代入(26)式,並利用表1中的 $A_{m,n}$ 值,可以計算出各個 f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, 這些 f_n 也列入在表3中。將 f_n 各點對於直徑 $D = 2r$ 畫出分佈曲線,得到如在圖3所示的實線的曲線。另外,由於在 $n = 1, 2$ 二點之間 f_n 並不能相接合,因此需要在其中間再計算一點。因此,我們又利用了(26)及(27)式,並應用了表2中 F_m 的數值, $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, 算出 f_n , $n = 1.5$ 。得 $f_{1.5} = 1110$ 。這數也列入了表3的末一項。這樣,我們

表3. f_n 的計算

碳粒子直徑 mm	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.015
m	1	2	3	4	5	6	1.5
$F_m \text{ mm}^{-2}$	15	19	14	11	7	3	21
n	1	2	3	4	5	6	1.5
$f_n \text{ mm}^{-3}$	889	756	413	336	226	111	1210

得到了更平滑的曲線，在圖 3 中示出。在圖中，我們也畫了依照夏耳-薩爾忒可夫方法所得的 $f(r)$ 的曲線，在圖 3 中以虛線畫出。這兩曲線相比較，可以看見過去的計算值偏低了一些，並且，在 $n = 1, 2$ 之間沒有考慮到存在有高峯並且也沒法計算出來。對於總的晶粒數，也顯得太少。例如從夏耳等方法^[3]得到

$$\begin{aligned} N_t &= 495 + 898 + 504 + 321 + 242 + 151 \\ &= 2611 \text{ mm}^{-3} \end{aligned}$$

而根據我們的曲線計算得

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \times 889 + \frac{1}{4} (889 + 1210) + \frac{1}{4} (1210 + 756) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (756 + 413) + \frac{1}{2} (413 + 336) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (336 + 226) + \frac{1}{2} (226 + 111) + \frac{1}{2} \times 111 = \\ &= 2925 \text{ mm}^{-3}. \end{aligned}$$

依照公式 $N_2 = 0.637 \sum_i \frac{F_i}{D_i}$ ，可以計算在直徑 D_i 為 $D_i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \frac{11}{2} \times 0.001 \text{ cm}$ 處的 $\frac{F_i}{D_i}$ 及在 $D_i = \frac{12}{2} \times 0.001 \text{ cm}$ 處的 $\frac{F_i}{D_i}$ 的一半值，得到 N_2 為

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{0.637}{0.01} \left(\frac{9}{\frac{1}{2}} + \frac{21}{\frac{3}{2}} + \frac{16}{\frac{5}{2}} + \frac{12}{\frac{7}{2}} + \frac{9}{\frac{9}{2}} + \frac{5}{\frac{11}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{9}{2}}{\frac{12}{2}} \right) = \\ &= 2874 \text{ mm}^{-3}. \end{aligned}$$

N_1 和 N_2 相近而和 N_t 相差較遠，即是說由通常方法所得的結果一般地偏低了。

參 考 文 獻

- [1] Scheil, E., Statistische Gefüngenuntersuchungen I, *Ztsch. Metallkunde*, 27 (1935), 199.
- [2] Салтыков, С. А., Введение в Стереометрическую Металлографию, Изд. А. И. Арм СССР. Ереван 1950.
Блантер, М. Е., Методика Исследования Металлов и Обработка Опытных Данных, 1952, 290—302.
- [3] Блантер, М. Е. 同 [2].
- [4] Dwight, H. B., Tables of Integrals and Other Mathematical Data McMillan Inc, p. 196, 854—1.
- [5] Whittaker and Watson, Modern Analysis, Camb. 259, Miscellaneous examples 8.

AN ANALYTICAL METHOD OF SOLUTION OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF CRYSTAL SIZES IN A VOLUME

CHENG KAI-CHIA

(*Nanking University*)

ABSTRACT

The distribution function of crystal sizes on a cross-sectional surface can be obtained by direct observation. By using the well-known Scheil-Салтыков method one can deduce the volume distribution function. Their method consists chiefly in solving a system of simultaneous linear algebraic equations, in which certain approximations are adopted without explicit criterions. The present paper proposes an analytical method of solution, in which operational calculus and Laplace transform are applied. The density function thus obtained is somewhat in variance with those of Scheil and others; namely, values obtained by the previous authors appear a little lowered as compared with ours. As the present method is rigorous and the numerical computations so far performed are within criterious in accuracy, the difference may well be attributed to the errors introduced by the approximations in the old methods. This fact is fully demonstrated by a concrete example in the text.