

## 關於中子在兩種介質中的慢化問題\*

黃 祖 洽

(中國科學院物理研究所)

### 提 要

本文根據年齡理論,考慮下列問題:二介質由球面  $r = a$  分開,球面外的介質一直延伸到無限,球面內的介質中在  $r = R$  處放有殼形單能快中子源;要求二介質中由此引起的中子慢化密度的空間分佈。

求解時應用了拉氏變換的方法,求出了適用於  $\sqrt{\tau_1} \lesssim a$  情形的展開式,這裏  $\tau_1$  是中子在球面內介質中的年齡,物理上出現的實際情形多半滿足  $\sqrt{\tau_1} \ll a$  的條件,這時展開式收斂很快。

對於二介質是重水和石墨的一個實例,我們算出了熱能處中子慢化密度的數值結果(假定快中子源的能量為 2 兆電子伏),並和用通常二羣近似方法求得的結果進行了比較。

### 一. 引 言

關於中子在兩種散射性質不同的介質中進行慢化的問題,一般即使應用年齡理論,求解也相當困難<sup>1)</sup>。因此,往往不得不應用兩羣或多羣的近似方法<sup>[1]</sup>。

本文根據年齡理論,考慮球對稱情形下中子在兩種介質中的慢化問題;並用拉氏變換的方法求解。發現,在慢化長度較兩介質的交界球面的半徑小時,問題之解可以展開成收斂很快的級數形式,其各項均具有顯明的物理意義。這樣的展開式適用於所有具有實際物理意義的情形。

對於兩介質是重水和石墨的一個實例,我們算出了熱能處中子慢化密度的數值結果,並和用通常二羣近似方法算出的結果進行比較。

### 二. 問題的表述

設有由球面  $r = a$  分開的兩種介質:充滿在球面以內的叫作介質 1,在球面外一直延伸到無限遠的叫作介質 2。設在介質 1 中球面  $r = R$  處有單位強度的殼形快中子源(球面  $r = R$  在介質 2 中時,解法完全相似),每秒放出一個能量為  $E_0$  的快中子。我們要求出由於快中子慢化的結果在二介質中引起的中子慢化密度  $x_1$  及  $x_2$ 。

因為球對稱的關係,任一能量  $E$  處的中子慢化密度將僅為源所處位置  $R$  及測量處坐標  $r$  的函數

$$x_i = x_i(E, R, r) \quad (i = 1, 2).$$

\* 1957 年 8 月 29 日收到。

1) 一快中子點源在由平面分開的二無限介質中引起的慢化密度曾由 Bellman 等用年齡理論求出。見 *Phil. Mag.* **40** (1949), 297。

如果不管介質在中子慢化時對中子的吸收，那末根據年齡理論，慢化密度  $x_1$  及  $x_2$  應由下列兩年齡方程決定<sup>[1]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rx_1) &= \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} - \frac{\delta(r-R)\delta(\tau_1)}{4\pi r^2} & (r < a), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rx_2) &= \frac{\partial x_2}{\partial \tau_2} & (r > a), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $\tau_1 = \tau_1(E)$ ,  $\tau_2 = \tau_2(E)$  分別是中子在介質 1 及 2 中慢化至能量  $E$  時的年齡；

$$\tau_i = \int_E^{E_0} \frac{l_i^2(E)}{\xi_i(1 - \cos \theta_i)} \frac{dE}{E} \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

而  $l_i(E)$  是能量為  $E$  的中子在介質  $i$  中的平均散射自由路程， $\xi_i$  是中子在介質  $i$  中散射一次的平均對數能量損耗， $\overline{\cos \theta_i}$  則是介質  $i$  中散射角餘弦在多次散射中的平均值。

如所週知<sup>[1]</sup>，慢化密度  $x$  和單位對數能區中的中子密度  $n$  有下列關係：

$$x = \frac{v\xi}{l} n, \quad (3)$$

式中  $v$  是中子速。為書寫方便計，在(1)–(3)式中及下面所有不會引起誤會的地方，宗數  $E$ ,  $R$  及  $r$  均未寫出。

在二介質的邊界處，任一能量的中子密度及合成中子流密度都應該是連續的，所以應該有下列二邊界條件：

在  $r = a$  處，

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1}{\xi_1} x_1 &= \frac{l_2}{\xi_2} x_2, \\ \frac{l_1^2}{\xi_1(1 - \cos \theta_1)} \frac{\partial x_1}{\partial r} &= \frac{l_2^2}{\xi_2(1 - \cos \theta_2)} \frac{\partial x_2}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

另外， $x_1$  在  $0 < r < a$  範圍內及  $x_2$  在  $r > a$  範圍內應為連續及有限，而  $r \rightarrow \infty$  時， $x_2$  應消失。

在  $r = R$  處，(1)中第一式右邊的  $\delta$  函數要求有下列關係：

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial r} \right)_{r=R+0} - \left( \frac{\partial x_1}{\partial r} \right)_{r=R-0} = - \frac{\delta(\tau_1)}{4\pi R^2}, \quad (5)$$

式中  $r = R + 0$  及  $r = R - 0$  分別表示從  $r > R$  及  $r < R$  趨向  $r = R$  的極限。

這些條件和方程(1)在一起，完全決定了我們的中子慢化問題。

為簡單起見，假設兩介質中平均散射自由路程  $l_1(E)$  及  $l_2(E)$  之比和能量無關，於是

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{l_2^2(E)}{\xi_2(1 - \cos \theta_2)} / \frac{l_1^2(E)}{\xi_1(1 - \cos \theta_1)} = s \quad (6)$$

為常數(和能量無關)，因而  $\tau_2 = s\tau_1$ 。利用(6)，方程(1)可換寫成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rx_1) &= \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} - \frac{\delta(r-R)\delta(\tau_1)}{4\pi r^2} & (r < a), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rx_2) &= \frac{1}{s} \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & (r > a), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

這裏  $x_1$  及  $x_2$  都看成是  $\tau_1$  及  $R$  和  $r$  的函數。

邊界條件(3)現在可以寫成：

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\tau_1, R, r = a) &= \sqrt{ps} \chi_2(\tau_1, R, r = a), \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial r}(\tau_1, R, r = a) &= s \frac{\partial \chi_2}{\partial r}(\tau_1, R, r = a), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中

$$p = \frac{1 - \overline{\cos \theta_2}}{\xi_2} / \frac{1 - \overline{\cos \theta_1}}{\xi_1}. \quad (9)$$

### 三. 解 法

以下我們將選取球半徑  $a$  作為長度單位, 即, 命球半徑為 1.

作拉氏變換：

$$\phi_i(\theta, R, r) = \int_0^\infty \chi_i(\tau_1, R, r) e^{-\theta \tau_1} d\tau_1 \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

在此變換下, (7), (8) 及 (5) 各式分別變為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi_1) &= \theta \phi_1 - \frac{\delta(r - R)}{4\pi r^2}, & (r < 1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi_2) &= \frac{1}{s} \theta \phi_2; & (r > 1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\theta, R, 1) &= \sqrt{ps} \phi_2(\theta, R, 1), \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(\theta, R, 1) &= s \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(\theta, R, 1); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=R+0} - \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=R-0} = - \frac{1}{4\pi R^2}. \quad (13)$$

和  $\chi_1$  及  $\chi_2$  一樣,  $\phi_1$  在  $0 < r < 1$  範圍內及  $\phi_2$  在  $r > 1$  範圍內為連續及有限, 而且  $r \rightarrow \infty$  時,  $\phi_2$  應消失.

滿足(12), (13) 及連續有限等條件的(11)式之解容易求出如下：

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{e^{\sqrt{\theta} r} - e^{-\sqrt{\theta} r}}{8\pi\sqrt{\theta} r R} \frac{f e^{\sqrt{\theta}(1-R)} + g e^{-\sqrt{\theta}(1-R)}}{f e^{\sqrt{\theta}} + g e^{-\sqrt{\theta}}} & (r < R), \\ \phi_1 &= \frac{e^{\sqrt{\theta} R} - e^{-\sqrt{\theta} R}}{8\pi\sqrt{\theta} r R} \frac{f e^{\sqrt{\theta}(1-r)} + g e^{-\sqrt{\theta}(1-r)}}{f e^{\sqrt{\theta}} + g e^{-\sqrt{\theta}}} & (R < r < 1); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\phi_2 = \frac{e^{\sqrt{\theta} R} - e^{-\sqrt{\theta} R}}{8\pi\sqrt{\theta} r R} \frac{2 \sqrt{\frac{\theta}{s}} e^{-\sqrt{\frac{\theta}{s}}(r-1)}}{f e^{\sqrt{\theta}} + g e^{-\sqrt{\theta}}} \quad (r > 1), \quad (14')$$

式中引用了簡寫的記號：

$$f \equiv (\sqrt{p} + 1)\sqrt{\theta} - (\sqrt{p} - \sqrt{s}), \quad g \equiv (\sqrt{p} - 1)\sqrt{\theta} + (\sqrt{p} - \sqrt{s}). \quad (15)$$

通過逆拉氏變換, 可以由(14)及(14')中的  $\phi_i$  求出介質  $i$  中的中子慢化密度  $\chi_i$ ：

$$\chi_i(\tau_1, R, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\Gamma}-i\infty}^{\Gamma+i\infty} \phi_i(\theta, R, r) e^{\theta \tau_1} d\theta \quad (i = 1, 2), \quad (16)$$

式中  $\Gamma$  爲一正實數，大於  $\phi_i(\theta, R, r)$  在  $\theta$  平面上所有極點(假如有的話)的實數部分。

$p = s = 1$  時，即兩介質的散射性質相同時，逆拉氏變換容易求得。結果給出(此時有  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ):

$$\chi_1 = \chi_2 = \frac{\tau}{rR} \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \left[ e^{-\frac{(r-R)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(r+R)^2}{4\tau}} \right]. \quad (17)$$

若  $R \rightarrow 0$ , (17) 式即給出熟知的、快中子點源在一無限介質中引起的慢化密度:

$$\chi = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}.$$

另一容易求出逆拉氏變換的情形是  $s = \infty$  的極端情形，這在介質 2 是氣體或真空時出現。這時  $f/g = -1$ , 而

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{e^{\sqrt{\theta}r} - e^{-\sqrt{\theta}r}}{8\pi\sqrt{\theta}rR} \frac{e^{\sqrt{\theta}(1-R)} - e^{-\sqrt{\theta}(1-R)}}{e^{\sqrt{\theta}} - e^{-\sqrt{\theta}}} = \\ &= \frac{1}{8\pi rR} \frac{\cosh[(1-R+r)\sqrt{\theta}] - \cosh[(1-R-r)\sqrt{\theta}]}{\sqrt{\theta} \sinh \sqrt{\theta}} \quad (r < R) \end{aligned} \quad (18)$$

( $R < r < 1$  時的  $\phi_1$  可由上式把  $r$  及  $R$  對調後得出);

$$\phi_2 = 0 \quad (r > 1). \quad (18')$$

故由逆拉氏變換表<sup>[3]</sup>得:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{8\pi rR} \left[ \theta_4 \left( \frac{1-R+r}{2} \middle| i\pi\tau_1 \right) - \theta_4 \left( \frac{1-R-r}{2} \middle| i\pi\tau_1 \right) \right] \quad (r < 1), \\ \chi_2 &= 0 \quad (r > 1); \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中

$$\theta_4(v|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(v-\frac{1}{2}+n)^2/\tau}.$$

容易看出,

$$\theta_4(v|\tau) = \theta_4(1-v|\tau)$$

或

$$\theta_4 \left( \frac{1-R+r}{2} \middle| i\pi\tau_1 \right) = \theta_4 \left( \frac{1-r+R}{2} \middle| i\pi\tau_1 \right).$$

所以在(19)中,  $\chi_1$  對於  $R$  及  $r$  爲對稱, 因而在  $r < R$  及  $R < r < 1$  兩種情形下的  $\chi_1$  可以用同一式表出。以下可以看出, 在普遍情形下也有  $\chi_1(\tau_1, R, r) \equiv \chi_1(\tau_1, r, R)$  這一對稱關係[參看(20)式].

在普遍情形( $p \neq 1, s \neq 1$ )下, 逆拉氏變換(16)就不容易這樣明顯地寫出。但不難證明, 除少數物理上不感興趣的特殊情形外, 可以把複變數  $\theta$  平面上的積分化成下列定積分:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\tau_1, R, r) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\rho} R}{\sqrt{\rho} R} \frac{\sin \sqrt{\rho} r}{\sqrt{\rho} r} \frac{\sqrt{p} \rho^{\frac{3}{2}} e^{-\rho\tau_1} d\rho}{F(p, s, \rho)} \quad (r < 1), \\ \chi_2(\tau_1, R, r) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\rho} R}{Rr} \frac{G(p, s, r, \rho) \rho^{\frac{1}{2}} e^{-\rho\tau_1} d\rho}{F(p, s, \rho)} \quad (r > 1); \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 F(p, s, \rho) &\equiv (p+1)\rho + (\sqrt{p} - \sqrt{s})^2 - 2\sqrt{p\rho}(\sqrt{p} - \sqrt{s}) \sin 2\sqrt{\rho} + \\
 &\quad + [(p-1)\rho - (\sqrt{p} - \sqrt{s})^2] \cos 2\sqrt{\rho}, \\
 G(p, s, r, \rho) &\equiv \left[ \sqrt{\frac{p}{s}} \cos \sqrt{\rho} - \left( \sqrt{\frac{p}{s}} - 1 \right) \frac{\sin \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right] \sin \frac{(r-1)\sqrt{\rho}}{\sqrt{s}} + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \sqrt{\rho} \cos \frac{(r-1)\sqrt{\rho}}{\sqrt{s}}.
 \end{aligned} \right\} (21)$$

(20)式明顯地表出了  $\kappa_1(\tau_1, R, r)$  中  $R$  及  $r$  的對稱。但實際上,由於過於麻煩,(20)式不宜用來計算  $\kappa_1$  及  $\kappa_2$  的數值。因此,我們以下還將導出適用於  $\tau_1$  小時的展開式。事實上,凡是可以用年齡理論的具體情形,一般都滿足  $\tau_1$  小(和介質 1 的半徑相比較)的條件。

#### 四. $\tau_1$ 小時適用的展開式

讓我們直接從(14)式出發,將  $\phi_i(\theta, R, r)$  展開。在展開  $\phi_1$  時,顯然可以只考慮  $r < R$  或  $r > R$  中的一個情形。因為  $\kappa_1(\tau_1, R, r) \equiv \kappa_1(\tau_1, r, R)$ ,所以不管由那種情形得出的結果都會具有同樣的形式。以下考慮  $1 > r > R$  情形下的  $\phi_1$  式。

當  $\theta$  大時,可以如下展開:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{e^{\sqrt{\theta}R} - e^{-\sqrt{\theta}R} e^{-\sqrt{\theta}r} + \frac{g}{f} e^{-\sqrt{\theta}(2-r)}}{8\pi r R \sqrt{\theta} \left( 1 + \frac{g}{f} e^{-2\sqrt{\theta}} \right)} = \\
 &= \frac{1}{8\pi r R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{g^n}{\sqrt{\theta} f^n} [e^{-\sqrt{\theta}(2n+r-R)} - e^{-\sqrt{\theta}(2n+r+R)}] + \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi r R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{g^{n+1}}{\sqrt{\theta} f^{n+1}} [e^{-\sqrt{\theta}(2n+2-r-R)} - e^{-\sqrt{\theta}(2n+2-r+R)}] = \\
 &= \frac{1}{8\pi r R} \frac{1}{\sqrt{\theta}} [e^{-\sqrt{\theta}(r-R)} - e^{-\sqrt{\theta}(r+R)}] + \frac{1}{8\pi r R} \frac{g}{\sqrt{\theta} f} [e^{-\sqrt{\theta}(2-r-R)} - \\
 &\quad - e^{-\sqrt{\theta}(2-r+R)} - e^{-\sqrt{\theta}(2+r-R)} + e^{-\sqrt{\theta}(2+r+R)}] + \dots \quad (r < 1); \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{e^{\sqrt{\theta}R} - e^{-\sqrt{\theta}R}}{4\pi r R} \frac{e^{-\sqrt{\theta} \frac{r-1}{\sqrt{s}}}}{f e^{\sqrt{\theta}} + g e^{-\sqrt{\theta}}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi r R \sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{g^n}{f^{n+1}} [e^{-\sqrt{\theta}(2n+1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}-R)} - e^{-\sqrt{\theta}(2n+1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}+R)}] = \\
 &= \frac{1}{4\pi r R \sqrt{s}} \frac{1}{f} [e^{-\sqrt{\theta}(1-R+\frac{r-1}{\sqrt{s}})} - e^{-\sqrt{\theta}(1+R+\frac{r-1}{\sqrt{s}})}] + \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi r R \sqrt{s}} \frac{g}{f^2} [-e^{-\sqrt{\theta}(3-R+\frac{r-1}{\sqrt{s}})} + e^{-\sqrt{\theta}(3+R+\frac{r-1}{\sqrt{s}})}] + \dots \quad (r > 1). \quad (22')
 \end{aligned}$$

展開式(22)及(22')收斂的條件為

$$\left| \frac{g}{f} e^{-2\sqrt{\theta}} \right| < 1.$$

此不等式在  $\theta$  不太大時就已經成立。對於大  $\theta$  值， $\left| \frac{g}{f} e^{-2\sqrt{\theta}} \right| \ll 1$ ，故展開式收斂很快，只取前面幾項就够了。

為求出與(22)及(22')相應的逆拉氏變換，要利用下列公式<sup>[2]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ e^{-\sqrt{\theta} c} \} &= \frac{c}{\sqrt{4\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{c^2}{4\tau_1}}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\sqrt{\theta} c} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_1}} e^{-\frac{c^2}{4\tau_1}}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta+b}} e^{-\sqrt{\theta} c} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_1}} e^{-\frac{c^2}{4\tau_1}} - b e^{bc+b^2\tau_1} \operatorname{erfc} \left( \frac{c}{2\sqrt{\tau_1}} + b\sqrt{\tau_1} \right), \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta}(\sqrt{\theta}+b)} e^{-\sqrt{\theta} c} \right\} &= e^{bc+b^2\tau_1} \operatorname{erfc} \left( \frac{c}{2\sqrt{\tau_1}} + b\sqrt{\tau_1} \right), \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{\theta}+b)^2} e^{-\sqrt{\theta} c} \right\} &= -2b \sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}} e^{-\frac{c^2}{4\tau_1}} + \\ &\quad + (1+bc+2b^2\tau_1) e^{bc+b^2\tau_1} \operatorname{erfc} \left( \frac{c}{2\sqrt{\tau_1}} + b\sqrt{\tau_1} \right), \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中引用了記號：

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ f(\theta) \} &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty} f(\theta) e^{\theta\tau_1} d\theta, \\ \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

將(22)及(22')中的係數  $g^n/f^n$  及  $g^n/f^{n+1}$  化成部分分數，就可以利用(23)中各公式求出下列展開式：

$$\begin{aligned} x_1(\tau_1, R, r) &= \frac{1}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau_1}{rR} \left[ e^{-\frac{(r-R)^2}{4\tau_1}} - e^{-\frac{(r+R)^2}{4\tau_1}} \right] + \\ &\quad + \frac{h}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau_1}{rR} \left[ e^{-\frac{(2-r-R)^2}{4\tau_1}} - e^{-\frac{(2-r+R)^2}{4\tau_1}} + e^{-\frac{(2+r-R)^2}{4\tau_1}} + e^{-\frac{(2+r+R)^2}{4\tau_1}} \right] + \\ &\quad + \frac{bj}{8\pi rR} [-E(b, 2-r-R, \tau_1) + E(b, 2-r+R, \tau_1) + \\ &\quad + E(b, 2+r-R, \tau_1) - E(b, 2+r+R, \tau_1)] + \dots \quad (r < 1), \quad (25) \\ x_2(\tau_1, R, r) &= \frac{k}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau_1}{rR} \left[ \exp \left\{ -\frac{\left(1-R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\left(1+R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1} \right\} \right] + \\ &\quad + \frac{bk}{8\pi rR} \left[ -E \left( b, 1-R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1 \right) + E \left( b, 1+R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{k(h+2b^2j\tau_1)}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau_1}{rR} \left[ \exp \left\{ -\frac{\left(3+R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\left(3-R + \frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1} \right\} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{bk(l+2b^2j\tau_1)}{8\pi rR} \left[ E\left(b, 3-R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) - E\left(b, 3+R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) \right] + \\
& + \frac{b^2jk}{8\pi rR} \left[ \left(3-R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right) E\left(b, 3-R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) - \right. \\
& \left. - \left(3+R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right) E\left(b, 3+R+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) \right] + \dots \quad (r > 1), \quad (25')
\end{aligned}$$

式中引用了下列簡寫記號:

$$E(b, x, \tau_1) \equiv e^{bx+b^2\tau_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau_1}} + b\sqrt{\tau_1}\right); \quad (26)$$

$$b = \frac{\sqrt{s}-\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}, \quad h = \frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1}, \quad j = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}, \quad (27)$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{s}(\sqrt{p}+1)}, \quad l = \frac{3\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1} = h+j.$$

若在(25)及(25')中命  $R \rightarrow 0$ , 我們便得出球中心處快中子點源所引起的慢化密度:

$$\begin{aligned}
\kappa_1(\tau_1, 0, r) &= \frac{1}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\tau_1}} + \frac{h}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{2-r}{r} e^{-\frac{(2-r)^2}{4\tau_1}} - \frac{2+r}{r} e^{-\frac{(2+r)^2}{4\tau_1}} \right] + \\
& + \frac{-bj}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_1}} \left[ e^{-\frac{(2-r)^2}{4\tau_1}} - e^{-\frac{(2+r)^2}{4\tau_1}} \right] + \\
& + \frac{b^2j}{4\pi r} [E(b, 2-r, \tau_1) - E(b, 2+r, \tau_1)] + \dots \quad (r < 1), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_2(\tau_1, 0, r) &= \frac{k}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}}{r} \exp\left\{-\frac{\left(1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1}\right\} + \\
& + \frac{bk}{4\pi r} \left[ \frac{-1}{\sqrt{\pi\tau_1}} \exp\left\{-\frac{\left(1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1}\right\} + bE\left(b, 1+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) \right] + \\
& + \frac{-hk}{(4\pi\tau_1)^{\frac{3}{2}}} \frac{3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}}{r} \exp\left\{-\frac{\left(3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1}\right\} + \\
& + \frac{bk(l+2b^2j\tau_1)}{4\pi r} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_1}} \exp\left\{-\frac{\left(3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right)^2}{4\tau_1}\right\} - bE\left(b, 3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) \right] + \\
& + \frac{-b^2jk}{4\pi r} \left[ 1 + b\left(3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}\right) \right] E\left(b, 3+\frac{r-1}{\sqrt{s}}, \tau_1\right) + \dots \quad (r > 1). \quad (28')
\end{aligned}$$

本節得到的展開式即使在  $\tau_1 \sim 1$  時也收斂很快。如果在  $\tau_1$  小時 (譬如說,  $\tau_1 < 0.5$  時), 則寫出的各項已經足夠。物理上出現的實際情形都滿足  $\tau_1$  小的條件, 所以我們得到的展開式可以適用於所有的實際情形。(25)式中, 第一項給出兩種介質散射性質相同時 ( $p = s = 1$  時) 的中子慢化密度, 第二項 (包含係數  $h$ ) 可以看成是因為  $p \neq 1$  引起的主要

修正項，而第三項(包含係數  $b$ )則系因為  $p \neq s$  而引起的主要修正項。同樣，可以看出(25')及(28), (28')中各項的物理意義。

### 五. 一個實例

現在考慮介質 1 是重水，介質 2 是石墨的實例。此時有<sup>[1]</sup>  $p = 3.94$ ,  $s = 2.92$ 。

假定分界面的半徑  $a = 30$  厘米，快中子源所放出中子的能量  $E_0 = 2$  兆電子伏。以  $a$  為長度單位時，中子在重水中到達熱能( $E = 0.025$  電子伏)時的年齡為<sup>[1]</sup>：

$$\tau_1 = \frac{120}{a^2} = \frac{120}{900} = 0.133. \quad (29)$$

將此值代入公式(25), (25')及(28), (28')，可以對於不同的源的位置  $r_0$ ，算出  $\chi_1$  及  $\chi_2$ 。圖 1, 2 及 3 中分別繪出了  $r_0 = 0, \frac{1}{2}$  及 1 時，由(28), (28')及(25), (25')算出的熱

能處中子慢化密度在空間的分佈( $r > 1$  時，我們繪出的曲線不是  $4\pi r^2 \chi_2$ ，而是  $\sqrt{ps} 4\pi r^2 \chi_2$ ，以便使曲線在  $r = 1$  處連續)。

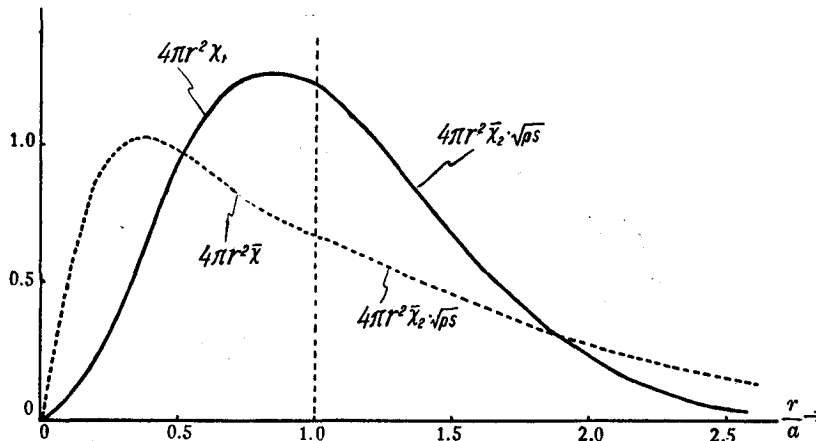


圖 1  $\frac{R}{a} = 0$  時，中子慢化密度的分佈

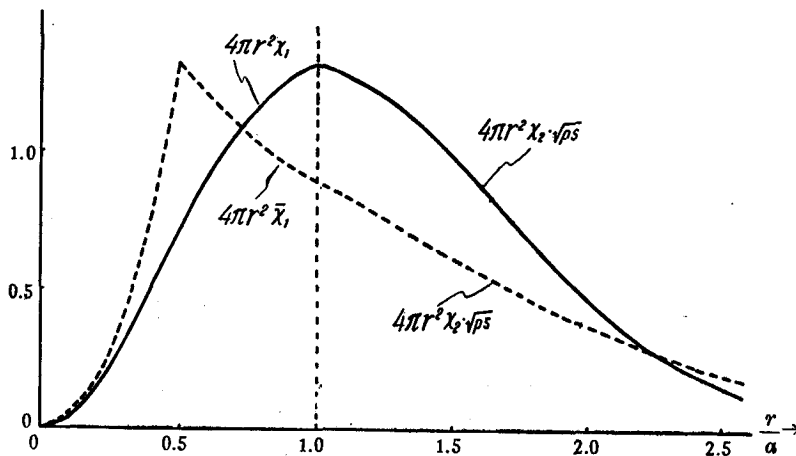


圖 2  $\frac{R}{a} = 0.5$  時，中子慢化密度的分佈

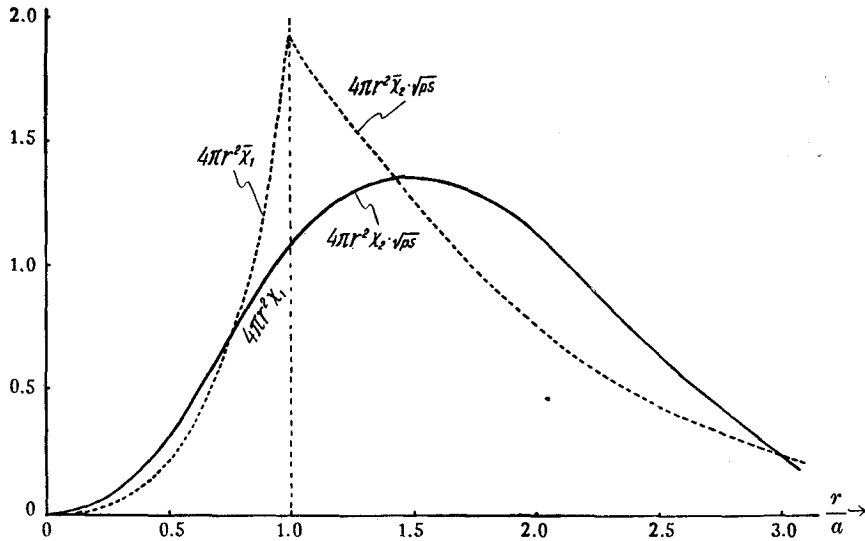


圖3  $\frac{R}{a} = 1$  時，中子慢化密度的分佈

為比較起見，在各圖中同時繪有由兩羣理論求出的熱能處中子慢化密度的分佈。在兩羣理論中，方程(1)簡化為

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{\chi}_1) &= \frac{\bar{\chi}_1}{\tau_1} - \frac{\delta(r-R)}{4\pi r^2 \tau_1} \quad (r < 1), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{\chi}_2) &= \frac{\bar{\chi}_2}{\tau_2} = \frac{\bar{\chi}_2}{s\tau_1} \quad (r > 1). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

這時  $\tau_1 = 0.133$  為固定常數，而  $\bar{\chi}_1$  及  $\bar{\chi}_2$  僅為  $r_0$  及  $r$  的函數。在邊界  $r = 1$  處，仍有下列邊界條件：

$$\bar{\chi}_1 = \sqrt{ps} \bar{\chi}_2, \quad \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial r} = s \frac{\partial \bar{\chi}_2}{\partial r} \quad (r = 1); \quad (31)$$

而在  $r = R$  處則有

$$\left( \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial r} \right)_{r=R+0} - \left( \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial r} \right)_{r=R-0} = -\frac{1}{4\pi R^2 \tau_1}; \quad (32)$$

此外， $\bar{\chi}_1$  在  $0 < r < 1$  範圍內及  $\bar{\chi}_2$  在  $r > 1$  範圍內為連續及有限，而且  $\bar{\chi}_2$  在  $r \rightarrow \infty$  時消失等要求仍舊。

滿足(31),(32)及連續有限等條件的(30)式之解可以寫出如下：

$$\left. \begin{aligned} \bar{\chi}_1 &= \frac{e^{\frac{r}{\sqrt{\tau_1}}} - e^{-\frac{r}{\sqrt{\tau_1}}}}{8\pi r R \sqrt{\tau_1}} \frac{f e^{\frac{1-R}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1-R}{\sqrt{\tau_1}}}}{f e^{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}}} \quad (r < R), \\ \bar{\chi}_1 &= \frac{e^{\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}} - e^{-\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}}}{8\pi r R \sqrt{\tau_1}} \frac{f e^{\frac{1-r}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1-r}{\sqrt{\tau_1}}}}{f e^{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}}} \quad (R < r < 1), \\ \bar{\chi}_2 &= \frac{e^{\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}} - e^{-\frac{R}{\sqrt{\tau_1}}}}{8\pi r R \sqrt{\tau_1}} \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \exp\left\{-\frac{r-1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right\}}{f e^{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}}} \quad (r > 1); \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中

$$\bar{f} \equiv (\sqrt{p} + 1) \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} - (\sqrt{p} - \sqrt{s}), \quad \bar{g} \equiv (\sqrt{p} - 1) \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} + (\sqrt{p} - \sqrt{s}). \quad (34)$$

快中子源在球心 ( $R = 0$ ) 時, (33) 變為

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{4\pi r \tau_1} \frac{\bar{f} e^{\frac{1-r}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1-r}{\sqrt{\tau_1}}}}{\bar{f} e^{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}}} \quad (r < 1), \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{4\pi r \tau_1} \frac{\frac{2}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \exp\left\{-\frac{r-1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right\}}{\bar{f} e^{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}} + \bar{g} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_1}}}} \quad (r > 1). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

圖 1, 2 及 3 中的虛曲綫即由(35)及(33)等公式算出。

### 參 考 文 獻

- [1] 參看, 例如, Glasstone and Edlund, *The Elements of Nuclear Reactor Theory*, 1952.
- [2] Carslaw and Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics*, 1948.
- [3] Bateman, *Tables of Integral Transforms*, 1954.

## ON THE SLOWING-DOWN OF NEUTRONS IN TWO ADJACENT MEDIA

HUANG TSU-CHIA

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

We have calculated the slowing-down densities of neutrons in two adjacent media of different slowing-down properties according to the age theory. The outer medium is extended to infinity. The inner medium consists of a sphere of radius  $a$ , and contains a monoenergetic fast neutron-source in the form of a concentric spherical shell of radius  $R$ .

The method of Laplace transformation is used in solving the problem. The results are given by the expansions (25), (25'), (28) & (28'), which converge rapidly for those cases we usually meet with.

For a concrete case where the two media are heavy water and graphite, and the fast neutron-source is of energy 2 Mev, numerical results for the slowing-down densities at thermal energy are obtained and compared with those obtained by the usual two-group approximation (Fig. 1, 2 & 3).