

Н. Н. Боголюбов, И. М. Лифшиц 研究工作的簡單介紹*

張 宗 燧

(中國科學院數學研究所)

由於本人對於金屬物理所知極少，對於蘇聯科學家 Н. Н. Боголюбов 及 И. М. Лифшиц 在此方面的工作亦未嘗仔細學習，所以下面的簡單介紹極不全面，並且也可能帶有錯誤，乞大家指正。

報告分三部分，一為 Боголюбов 的二次量子化的近似理論 [附帶介紹他在處理簡併(degenerate)系統的微擾論時所用的方法]，一為他的一篇關於超導理論的論文的大體內容，一為 Лифшиц 研究金屬在磁場下的性質的工作的一些情形。最末一部分還將由高聯佩同志作補充報告。

第 一 部 分

這裏的理論稱為二次量子化理論的近似理論。在某些意義上，它與 Боголюбов 研究玻色子在低溫下的性質的工作是相似的。在那裏，由於溫度極低，有許多玻色子處在最低的能級中，因此 Боголюбов 假定(作為一種近似)與這個能級相應的產生算符及湮滅算符可以用 c 數來代替。這樣，他的計算便可以照顧到在不同能級中的玻色子的相互作用能，而這一點是以前所不能做到的。在應用二次量子化的近似理論至金屬時，大體情形如下：

先用產生算符及湮滅算符將哈密頓 H 表出，一般地獲得

$$H = \sum A(\omega_1 \omega_2) a_{\omega_1}^+ a_{\omega_2} + \sum \frac{1}{2} B(\omega_1 \omega_2 \omega_1' \omega_2') a_{\omega_1}^+ a_{\omega_2}^+ a_{\omega_1'} a_{\omega_2'}, \quad (1)$$

式中 a 為電子的湮滅算符， a^+ 為產生算符。用適當的辦法，總可以使

$$n_0 \equiv a_0^+ a_0 = 1, \quad n_\omega \equiv a_\omega^+ a_\omega = 0 \quad (\omega \neq 0). \quad (2)$$

相當於整個系統的最低能的態。在

$$n_0 \doteq 1, \quad n_\omega \doteq 0 \quad (\omega \neq 0) \quad (3)$$

的近似下，引入

$$b_\omega = a_0^+ a_\omega, \quad b_\omega^+ = a_\omega^+ a_0 \quad (\omega \neq 0), \quad (4)$$

便可以將 H 表為只含有 b_ω, b_ω^+ 的式子。在同一近似下， b, b^+ 的對易關係不再是費米型的而是玻色型的。 b, b^+ 可以認為是某些“廣玻色子”的湮滅，產生算符。

如果新的 H 具有以下形式：

* 1958 年 1 月 13 日上午在固體電子論報告會上報告。

$$\sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta},$$

那末將 H 對角化是不困難的。將 H 對角化後,便可以應用量子統計力學的方法,求出這一羣電子所構成的系統的熱力學性質。但不難想像,新的哈密頓一般講來應取以下的形式:

$$H = \frac{1}{2} \sum A_{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} + \frac{1}{2} \sum A_{\alpha\beta}^* b_{\alpha} b_{\beta} + \sum B_{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}, \quad (5)$$

式中 $A_{\alpha\beta}$ 是對稱的, A^* 為 A 的共軛量, B 為厄米矩陣。將(5)式對角化的方法是這樣的:令 (u_{α}, v_{α}) 滿足

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} u_{\beta} + A_{\alpha\beta} v_{\beta} &= E u_{\alpha}, \\ A_{\alpha\beta}^* u_{\beta} + B_{\alpha\beta}^* v_{\beta} &= -E v_{\alpha}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 E 為待求的一個量。注意上式第二式中 E 前的負號。假定 u, v 可以如此選擇,使它們滿足

$$u_{\alpha}^* u_{\alpha} - v_{\alpha}^* v_{\alpha} = 1, \quad (7)$$

那末不難證明 E 都是正的實數。如果令 (u^1, v^1) 為一個解,相應的 E 為 E^1 , (u^2, v^2) 為另一個解,相應的 E 為 E^2 ,我們也能證明

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^2 - v_{\alpha}^1 v_{\alpha}^2 &= 0 \quad (\text{如果 } E^1 \neq E^2), \\ u_{\alpha}^1 v_{\alpha}^2 - u_{\alpha}^2 v_{\alpha}^1 &= 0 \quad (\text{不論 } E^1, E^2 \text{ 是什麼}), \\ u_{\alpha}^1 v_{\alpha}^{2*} - u_{\alpha}^{2*} v_{\alpha}^1 &= 0 \quad (\text{不論 } E^1, E^2 \text{ 是什麼}). \end{aligned} \quad (8)$$

將變量 $b_{\alpha}, b_{\alpha}^{\dagger}$ 變為新算符 $c_i, c_i^{\dagger}$,

$$\begin{aligned} b_{\alpha} &= \sum (c_i u_{\alpha}^i + c_i^{\dagger} v_{\alpha}^{i*}), \\ b_{\alpha}^{\dagger} &= \sum (c_i^{\dagger} u_{\alpha}^{i*} + c_i v_{\alpha}^i), \end{aligned} \quad (9)$$

利用(7),(8)式不難證明 $c_i, c_i^{\dagger}$ 也滿足玻色型的對易關係,而能量 H 成為

$$\sum E_i c_i^{\dagger} c_i + \text{常數}. \quad (10)$$

這樣,便完成了對角化的工作。(例如1949年ЖЭТФ中有一篇用這個方法討論反鐵磁的論文。)

無疑地,這個對角化的方法是極其出色的。它利用了(8)中第二、第三式,消除了含有二個產生算符(或二個湮滅算符)的項。問題是:(7)式能否在一般的 A, B 下都能被滿足,而這一點對於 E 的必須為正數以及對於(8)式中第二、第三式的導出是必要的。完成了對角化的工作,便可以求出電子們所構成的系統的熱力學性質。

在這裏,讓我們附帶地介紹 Боголюбов 在他的“量子統計力學”書中關於簡併系統的微擾論的一個理論。

令哈密頓為

$$H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \dots, \quad (11)$$

式中 $H_1, H_2, \dots$ 為微擾能。令滿足

$$(E_0 - H_0)\psi = 0$$

的 ψ 建立(span)一個空間 L 。令 P 為 L 的投影算符。規定我們所要求的乃是

$$(H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \dots - E)\psi = 0 \quad (12)$$

在 E 鄰近於 E_0 時的一個解。這個解可以認為鄰近於 L 中一個矢量。將這個解 ψ 寫為

$$c_0 + c_1, \quad (13)$$

式中 c_0 完全在空間 L 中, c_1 完全垂直於空間 L . 代入 (12) 式, 在式的左方的左邊乘以 $(1 - P)$, 得

$$[E - H_0 - \epsilon(1 - P)H_1 - \epsilon^2(1 - P)H_2 + \dots]c_1 + (\dots)c_0 = 0. \quad (14)$$

不難驗證, 上式第二項在左邊乘以 P 時成為零. 現在以

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \epsilon \Delta^1 + \epsilon^2 \Delta^2 + \dots, \\ c_1 &= \epsilon K^1 + \epsilon^2 K^2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

代入 (14), 分別取出含有 $\epsilon, \epsilon^2, \dots$ 的項, 得

$$(E_0 - H_0)K^1 = \dots, (E_0 - H_0)K^2 = \dots, \dots. \quad (16)$$

這些式子的特點是右方在乘以 P 後都等於零 (乘 P 時乘在左邊). 因此我們可在雙方除以 $(E_0 - H_0)$, 得 $K^1, K^2, \dots$ (這些式中可以含有 $\Delta^1, \Delta^2, \dots$). 將 (13), (15) 以及這些 K 的式子代入 (12) 式, 便得一個只含有 $c_0, \Delta^1, \Delta^2, \dots$ 的式子. 由此可以構成久期方程. 將這個方程對 ϵ 展開, 便可以獲得 $\Delta^1, \Delta^2, \dots$. 從而便可以進一步求出 c_0 .

這個理論顯然是極好而也極有用處的.

第二部分 超導電理論

這裏我們只介紹 Боголюбов 一系列論文中的第一篇. 這一篇說明了一個帶有電流的態, 相對於固體的激發態而言, 可以是穩定的.

出發點是 Fröhlich 的哈密頓

$$\begin{aligned} H_{Fr} &= \sum E(K) a_{Ks}^\dagger a_{Ks} + \sum \omega(q) b_q^\dagger b_q + H', \\ H' &= \sum_{\substack{K, q, s \\ K' - K = q}} g \left(\frac{\omega(q)}{2V} \right)^{1/2} a_{Ks}^\dagger a_{K's} b_q^\dagger + cc. \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\sum \omega(q) b_q^\dagger b_q$ 為聲子的哈密頓, g 為耦合常數, V 為體積, 而其他各項的意義是顯然的. 由於尋常的微擾論在此是不適用的 (因為在費米面附近電子聲波的相互作用是起顯著作用的), 所以我們援用另一個辦法. 這個辦法是引入一個正則變換

$$\begin{aligned} \alpha_{k0} &= u_k a_{k, 1/2} - v_k a_{k, -1/2}^\dagger, \\ \alpha_{k1} &= u_k a_{-k, -1/2} + v_k a_{k, 1/2}^\dagger; \end{aligned} \quad (18)$$

式中 u_k, v_k 為二個數, 滿足

$$u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (19)$$

這裏的 α_{k0}, α_{k1} 可以認為是某些“廣粒子”的湮滅算符. 當我們取

$$\begin{aligned} u_k &= 1, v_k = 0 \quad [E(k) > \text{費米能 } E_F], \\ u_k &= 0, v_k = 1 \quad [E(k) < \text{費米能 } E_F] \end{aligned} \quad (20)$$

時, α_{k0} 即是費米面外的電子的湮滅算符, 而 α_{k1} 是費米面內“空穴”的產生算符.

但是, 在引入上述的正則變換 (18) 後, 一般講來, 新的哈密頓含有只產生 (或湮滅) 二個電子的項, 而這一項在應用微擾論中產生發散現象 (因此稱為危險項), 因此 u_k, v_k 必須如此選擇, 使這些項可以相互抵消.

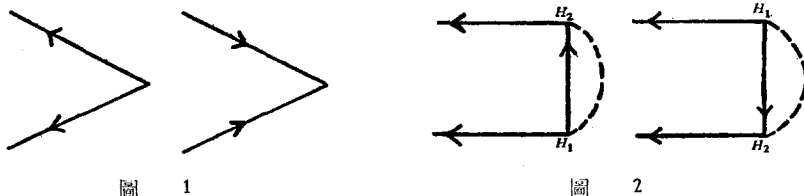
讓我們討論以下的哈密頓:

$$H = H_{Fr} - \lambda (\sum a_{ks}^\dagger a_{ks}); \quad (21)$$

λ 的地位相當於化學勢, 由 $(\Sigma a^\dagger a)$ 的平均值為已知電子數所決定. 用 $\alpha, \alpha^\dagger$ 為變數後, H 成為

$$U + H_0(\alpha^\dagger \alpha) + H_1(\alpha^\dagger \alpha^\dagger q, \alpha \alpha q, \alpha^\dagger \alpha^\dagger q^\dagger, \alpha \alpha q^\dagger) + \\ + H_2(\alpha^\dagger \alpha q, \alpha^\dagger \alpha q^\dagger) + H_3(\alpha^\dagger \alpha^\dagger, \alpha \alpha), \quad (22)$$

式中 U 不包含 α , H_0 包含類似 $\alpha^\dagger \alpha$ 的項等等. 顯然地, H_3 的 Feynmann 圖(圖 1)為:



相當於產生二個“費粒子”及消滅二個“費粒子”. 但 H_1, H_2 可以合併成為產生(或消滅)二個“費粒子”的圖樣(見圖 2). 現在我們選擇 u_k, v_k , 使相當於產生(或湮滅)二個費粒子的總矩陣素等於零, 這樣便列出了 u_k, v_k 所應滿足的式子.

顯然地, 一個解即是(20)式¹⁾. 但另有一個解, 在離費米面遠時與(20)式相同. 讓我們用這樣的 u_k, v_k 作繼續討論.

讓我們計算最低能級的態的能量. 這個態的 ψ 為

$$\psi_{vac} = \Pi \delta(v_{k0}) \delta(v_{k1}) \quad (v_{k0} = \alpha_{k0}^\dagger \alpha_{k0}, v_{k1} = \alpha_{k1}^\dagger \alpha_{k1}). \quad (23)$$

在此我們只消計算 H_1 所產生的微擾能. 注意這時尋常的微擾論的應用是沒有問題的. 用了尋常的微擾論, 便算出最低能級的態的能量. 同樣我們也可以計算激發態

$$\psi_1 = \alpha_{k0}^\dagger \psi_{vac} \quad (24)$$

的能量. 他們的能量差為

$$\tilde{\omega} e^{-1/\rho}, \quad (25)$$

式中

$$\rho = g^2 dn/dE, \quad (26)$$

$\tilde{\omega}$ 為一個自 $\omega(q)$ 導出的量, dn/dE 的意義是自明的.

為考慮有電流的態起見, 我們討論下面的哈密頓:

$$H = H_{Fr} - \lambda \Sigma a_{ks}^\dagger a_{ks} - u \Sigma k a_{ks}^\dagger a_{ks}, \quad (27)$$

式中 u 為一個常矢量, 由 $\Sigma k a_{ks}^\dagger a_{ks}$ 的平均值為已知常動量 P 而決定. 不難自(27)式所構造的廣義自由能

$$\Psi = -kT \log \text{Spe}^{-H/kT} \quad (28)$$

證明

$$P = \partial \Psi / \partial u, \quad (29)$$

因此 u 可以認為是整個系統的速度.

因為我們只討論費米面附近的電子, 我們可以令

$$E(k) = E_F + \frac{1}{2m} (k^2 - k_F^2).$$

1) 在報告時, 誤以為只有一個解. 見程開甲同志的補充報告.

這樣，將(27)中的 k 換為 $k + mu$ ，將如此獲得的 $a_{k+mu,s}$ 寫為 $a_{k,s}$ ，將 λ 換為 $\lambda - \frac{1}{2}mu^2$ ，

(27)的形式便同(21)相同了。將 H_{Fr} 用新變數寫出，便不難算出這個態的能量。

將這個態的能量與激發態的能量比較，便可以看到在 u 適合某些條件下，這個有動量 P 的態的能量比激發態能量小，因而對它而言是穩定的。因此超導的現象是可能存在的。

第三部分 И. М. Лифшиц 關於金屬在磁場 F 的性質的工作

這裏擬報告的是 1955 年及 1956 年 Лифшиц 在 ЖЭТФ 中所寫的二篇論文的大意。

第一篇討論金屬在磁場中的磁化率。如果當磁場不存在時，電子的能量 E 為 $f(p_x, p_y, p_z)$ (p 代表尋常動量)，那末當磁場存在時， E 為 $f(P_x, P_y, P_z)$ ，而

$$P_x = p_x - \frac{e}{c} A_x, \quad P_y = p_y - \frac{e}{c} A_y, \quad P_z = p_z - \frac{e}{c} A_z, \quad (30)$$

式中 A 代表電磁場的矢場勢。我們簡稱 P_x, P_y, P_z 為動量。

通常在能帶的理論中， p_x, p_y, p_z 是可以對易的，所以討論像 $E = f(p_x, p_y, p_z)$ 的式子是完全被允許的。但當磁場存在時， P_x, P_y, P_z 不對易，所以必須更小心地對待 $E = f(P_x, P_y, P_z)$ 式。

取磁場為一均勻的、沿 z 方向的場，強度為 H 。那時 $P_z = p_z$ ，

$$[P_y, P_x] = \frac{e}{c} H, \quad [P_y, P_z] = [P_x, P_z] = 0, \quad (31)$$

P_z 在運動中為一運動積分。讓我們在此引入一個與 Bohr 氫原子理論相似的理論，即讓 (P_x, P_y, P_z) 點在 P 空間中依照經典力學的運動方程來運動，而同時引入量子化條件。

$$\oint P_y d\left(P_x / \frac{e}{c} H\right) = nh \quad (32)$$

[在 Лифшиц 論文中，上式右方是 $(n + \gamma)h$ ， γ 為一常數]。於是軌道為二個數字所決定；它們是 p_z 及 n 。對於已給定的 p_z 及 n ，能量是已被決定的 [決定能量的方程是 $E = f(P_x, P_y, P_z)$ ，經典運動方程及(32)式]，

$$E = E(n, p_z). \quad (33)$$

已知了上式，便可以用標準的統計力學的理論來求磁化率。他證明了如果 $S(E^0, P_z^0)$ 為能量面 $E = E^0$ 在平面 $P_z = P_z^0$ 上的截面，而 $S_m(E^0)$ 為在各個不同 P_z^0 的 $S(E^0, P_z^0)$ 中的最大值，那末磁化率只與 $S_m(E_F)$ 有關 (E_F 代表費米能)。

另一篇論文討論了金屬在磁場下的電導率。他首先指出，有兩種性質不同的等能面。第一種面 $E = f(p_x, p_y, p_z)$ 是封閉的，另一種面是不封閉的。對於第一種面而言，等能面與 $p_z = \text{常數}$ 的平面相交的曲線是封閉的；對於第二種面而言，等能面與 $p_z = \text{常數}$ 的平面相交的曲線不一定是封閉的。對於第一種面，電導率張量(在磁場取在 z 方向的情形下)可以證明為

$$\begin{pmatrix} r_0^2 a_{xx} + O(r_0^3) & r_0 a_{xy} + O(r_0^2) & r_0 a_{xz} + O(r_0^2) \\ r_0 a_{yx} + O(r_0^2) & r_0^2 a_{yy} + O(r_0^3) & r_0 a_{yz} + O(r_0^2) \\ r_0 a_{yz} + O(r_0^2) & r_0 a_{zy} + O(r_0^2) & a_{zz} + O(r_0) \end{pmatrix}, \quad (34)$$

式中

$$\gamma_0 = \frac{2\pi m_0 c}{et_0 H}, \quad (35)$$

t_0 代表弛豫時間, m_0 代表在能量 $\epsilon = f(p)$ 式中出現的有效質量. 這便是他的主要結果.

討論的方法是這樣的: 完全用經典理論, 引入 $\tau \equiv H e t / 2\pi m_0 c$, 引入分佈函數 $f(\tau, \epsilon, p_z)$, 建立 Boltzmann 運輸過程的方程

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial p_z} \dot{p}_z + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = 0. \quad (36)$$

以

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + e\mathbf{E}, \\ \dot{\epsilon} &= e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}), \\ \dot{p}_z &= eE_z \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

代入, 再以

$$f_0 - et_0 \psi_i E_i \quad (38)$$

代替 f (f_0 代表無 $\mathbf{E}$ 時的 f , 假定與 p_z, τ 無關), 便獲得了求 ψ_i 的式子. 由這些式子, 可見 ψ 等都可以表為 γ_0 的冪級數. 現在引入 $\epsilon = f(p_x p_y p_z)$ 是封閉曲面的一點. 對於原來在這些曲面上的電子而言, 它們在動量空間的軌道 (在 $\mathbf{E}$ 可忽略時) 乃是 $p_z = \text{常數}$ 的平面與這個曲面的交綫, 因而是一個封閉曲綫. 當磁場 H 無限地增大時, 他們的動量 (p_x, p_y, p_z) 沿這條曲綫作無窮快的旋轉, 因此如果 p_z 軸穿過此曲綫, 可以假定

$$\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0,$$

亦即

$$\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0 \quad (39)$$

(字上的橫劃“—”代表對時間的平均). 因此當 γ_0 為零時, $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$. 於是

$$\begin{aligned} \psi_x &= c_{1x} \gamma_0 + c_{2x} \gamma_0^2 + \dots, \\ \psi_y &= c_{1y} \gamma_0 + c_{2y} \gamma_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

(亦即積分常數 c_{0x}, c_{0y} 必須為零), 而 ψ_z 可以成為

$$c_{0z} + c_{1z} \gamma_0 + c_{2z} \gamma_0^2 + \dots. \quad (41)$$

用這樣的 ψ_i 來計算 f , 再用這樣的 ψ 來計算電導率, 便獲得了 (34) 中的結果.

Лифшиц 學派在這方面的理論是極多的. 限於本人所知的範圍, 只能作以上的簡單介紹.

參 考 文 獻

- [1] Боголюбов, Н. Н., Лекції з квантової статистики, киев, 1949, УКР. яз. (原書烏克蘭文, 有俄譯文, 但未印行).
- [2] Боголюбов, Н. Н. и Гуров, К. И., ЖЭТФ, 17 (1947), 614.
- [3] Боголюбов, Н. Н. и Тябликов, С. В., ЖЭТФ, 19 (1949), 251, 256.
- [4] Боголюбов, Н. Н., О новом методе в теории сверхпроводимости, I (蘇聯聯合核子物理研究所單印本).
- [5] Лифшиц, И. М. и Косович, А. М., ЖЭТФ, 29 (1955), 730.
- Лифшиц, И. М., Азбель, М. Я. и Каганов, М. И., ЖЭТФ, 31 (1956), 63.