

含有高次微商的量子理論*

張 宗 燧

(中國科學院數學研究所)

提 要

這篇短文比較了兩種含有高次微商的量子理論。一個是在某些情形下可用的，它將變數 q 表為許多適合二階方程的 Q 的綫性組合，而在量子化時，各個 Q 分別地被量子化。另一個是先將 q 的運動方程正則化，再引入量子條件。我們證明了兩個理論，無論就各種量的對易關係而言，或就總哈密頓而言，是等效的。

這篇短文的目的是比較兩種含有高次微商的量子理論。如所週知，當描寫場的變數 q 在理論中所出現的微商的階是有限的，在適當情形下，我們可以將 q 表為許多適合二階微分方程的變數 Q 的一個綫性組合^[1]。另一方面， q 的運動方程也可以依照 Ostrogradski 的方法寫為正則方程^[2]，從而量子化。這一個理論作者也曾討論過^[3]。在本文中，我們證明，無論就各個變量的對易關係而言，或就總哈密頓而言，二個理論是完全一致的。這個結果的重要性，乃是證明了在第二個理論中，能量也不是正定的，以及證明了在第一個理論中， q 及 q 的起始幾個微商也是可以相互對易的，因而在理論被推廣至含有無窮階微商時， q 與 q 的各個有限階微商都可以對易，產生了理論上的困難。

為簡單起見，我們只討論一維空間 t 及只有一個變數 q 的情形。令 D 代表 (d/dt) ，令 $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots$ ，代表 $Dq, D^2q, \dots$ ，又令 $q^{(0)}$ 代表 q 。令拉格朗日 L 為 $q^{(0)}, q^{(1)}, \dots$ 的函數， N 為拉格朗日 L 中所出現 q 的微商的最高階。那時，文獻[3]中的結果是：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \mu^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q^{(h)}} + \mu^{(h)} + \frac{d}{dt} \mu^{(h+1)} &= 0 \\ (h = 1, 2, \dots, N-2), \\ \frac{\partial L}{\partial q^{(N-1)}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \right) + \mu^{(N-1)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p^{(N-1)} &= \partial L / \partial q^{(N)}, \\ p^{(h)} &= -\mu^{(h+1)} \\ (h = 0, 1, 2, \dots, N-2), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 1957 年 8 月 24 日收到。

1) 作者在寫此論文時，不幸沒有看到文獻[2]及 Ostrogradski 的工作。

$$H = -L + \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} q^{(N)} - \sum_{h=0}^{N-2} \mu^{(h+1)} q^{(h+1)}. \quad (3)$$

這便是文獻[3]的(8), (10), (11), (12)式, 不同處是我們用 t 代替了 x_4 , (d/dt) 代替了 $\partial/\partial x_4$, 用 N, q^{N-1}, q^N, p^{N-1} 代替了 ρ_a, Q_a, Q_{a4}, P_a , 以及將(12)式的右方改變了符號(即乘上 -1)。 (1)式可以認為尤拉方程, (2), (3)認作 p, H 的定義。由(1), (2), (3), 得

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial q^{i+1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q^{i+2}} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial q^{i+3}} - \cdots +$$

$$+ (-)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j \frac{\partial L}{\partial q^{i+j+1}} + \cdots, \quad (4)$$

$$H = -L + \sum_{i=1}^N q^i p^{i-1} \quad (5)$$

(p^i 即 $p^{(i)}$, q^i 即 $q^{(i)}$, 等等)。

在文獻[1]中所討論的 q 適合

$$\prod_{i=1} (D^2 + \omega_i^2) q = 0, \quad (6)$$

式中 ω_i 等為一羣常數。因此可以令

$$\left. \begin{aligned} L &= -qF(D)q^{(1)}, \\ F(D) &= \prod_i (D^2 + \omega_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

如果我們將上式中 $F(D)$ 寫為

$$\sum_i a_i D^{2i}, \quad (8)$$

那末 L 可以改寫為

$$- \sum (-)^i a_i q^i q^i. \quad (9)$$

為與(1)–(5)比較起見, 我們令(9)式中 q 的微商的最高階為 N 。由於 $F(D)$ 的選擇, 我們得 $a_N = 1$ 。

以(9)式代入(4), (5), 得

$$p^i = 2(-)^i \sum_{j=0} a_{i+j+1} q^{i+2j+1}, \quad (10)$$

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0} 2(-)^{i-1} a_{i+j} q^i q^{i+2j} + \sum_{i=0}^N (-)^i a_i q^i q^i. \quad (11)$$

為避免注明(10), (11)式右方對 j 取和的上限, 我們令

$$a_{N+1} \equiv a_{N+2} \equiv \cdots \equiv 0, \quad (12)$$

同時, 我們也令

$$a_{-1} \equiv a_{-2} \equiv \cdots \equiv 0. \quad (12)'$$

由(11)式, 可以直接算出

$$\frac{dH}{dt} = 2q^{(1)} \sum_{j=0} a_j q^{(2j)},$$

利用(6)式, 亦即 $\sum a_j q^{(2j)} = 0$, 便獲得了

1) 文獻[1]中的 $F(D)$ 為 $\Pi(1 + D^2 \omega_i^{-2})$ 。我們將此改為 $\Pi(D^2 + \omega_i^2)$, 使我們可以討論 $\omega = 0$ 的情形。

$$dH/dt = 0. \quad (13)$$

將理論量子化時,我們令

$$\left. \begin{aligned} [q^k, q^l] &= [p^k, p^l] = 0, \\ [q^k, p^l] &= i\delta_{kl} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 $[A, B]$ 代表 $AB - BA$.

另一方面,依照文獻[1]中的辦法,我們將(7)式中的 L 寫為

$$- \sum \eta_j Q_j (D^2 + \omega_j^2) Q_j, \quad (15)$$

式中

$$Q_j \equiv \prod_{i \neq j} (D^2 + \omega_i^2) q \quad (16)$$

[以後簡寫為 $Q_j = \prod_{i \neq j} (D^2 + \omega_i^2) q$], 而 η_j 為一些常數,由

$$\sum_j \frac{\eta_j}{D^2 + \omega_j^2} = \frac{1}{F(D)} = \frac{1}{\prod (D^2 + \omega_i^2)} \quad (17)$$

決定. 將(17)雙方展為 D^{-2} 的冪級數,得

$$\begin{aligned} \sum \eta_i \omega_i^{2n} &= 0 \\ (n = 0, 1, 2, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (18)$$

將(17)式寫為

$$\begin{aligned} 1 &= \sum \frac{\eta_j}{D^2 + \omega_j^2} \sum a_i D^{2i} = \frac{1}{D^2} \sum_n \sum_j (-)^n \eta_j \frac{\omega_j^{2n}}{D^{2n}} \sum a_i D^{2i} = \\ &= \sum_k \sum_n \sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} a_{n+k+1} D^{2k}, \end{aligned}$$

我們得

$$\sum_{n=0} \sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} a_{n+k+1} = \delta_{k0}. \quad (19)$$

由於(18)式,上式也可寫為

$$\sum_{n=N-1}^{\infty} \sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} a_{n+k+1} = \delta_{k0}. \quad (19)'$$

在上式中, $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$, 均瞭解為零.

將(15)中的 L 改寫為

$$\sum \eta_j [(DQ_j)^2 - \omega_j^2 Q_j],$$

我們得

$$H = \sum_j \left[\frac{P_j^2}{4\eta_j} + \eta_j \omega_j^2 Q_j^2 \right]. \quad (20)$$

量子化條件為

$$\left. \begin{aligned} [Q_k, Q_l] &= [P_k, P_l] = 0, \\ [Q_k, P_l] &= \delta_{kl} i \quad (k, l = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

我們的目的為證明(21), (14)等效, (20), (11)的右方相同.

讓我們先證明自(21)式可以求得(14)式. 為此讓我們求出如何用 Q, P 來表出 $q^{(i)}$.

首先,利用(16), (17)式,得

$$\sum_j \eta_j Q_j = \sum_j \eta_j \prod_{i \neq j} (D^2 + \omega_i^2) q = \sum_j \eta_j \frac{F(D)}{D^2 + \omega_j^2} q = q.$$

其次,當 $n \leq N-1$ 時,

$$\begin{aligned}\sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} Q_j &= \sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} \frac{F(D)}{D^2 + \omega_j^2} q = \\ &= \sum_j (-)^n \eta_j \left[\omega_j^{2n-2} - D^2 \omega_j^{2n-4} + D^4 \omega_j^{2n-6} - \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-)^{n-1} D^{2n-2} + (-)^n \frac{D^{2n}}{D^2 + \omega_j^2} \right] F(D) q.\end{aligned}$$

由於(17),(18)式,上式可以變為

$$\sum_j (-)^n \eta_j \omega_j^{2n} Q_j = \sum_j \eta_j \frac{D^{2n}}{D^2 + \omega_j^2} F(D) q = q^{(2n)}. \quad (22)$$

值得指出:在導出(22)式時,我們沒有用到 q 或 Q 所適合的微分方程。

其次,自(20)式前的一個式子,知

$$P_j = 2\eta_j DQ_j.$$

由此得

$$\frac{1}{2} \sum_j P_j = \sum_j \eta_j DQ_j = \sum_j \eta_j \frac{F(D)}{D^2 + \omega_j^2} Dq = q^{(1)}.$$

同樣,當 $n \leq N-1$ 時,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_j (-)^n \omega_j^{2n} P_j &= \sum_j (-)^n \eta_j \frac{\omega_j^{2n}}{D^2 + \omega_j^2} F(D) Dq = \\ &= \sum_j (-)^n \eta_j \left[\omega_j^{2n-2} - \dots + (-)^n \frac{D^{2n}}{D^2 + \omega_j^2} \right] F(D) Dq = \\ &= \sum_j \eta_j \frac{D^{2n}}{D^2 + \omega_j^2} F(D) Dq = q^{(2n+1)}.\end{aligned} \quad (23)$$

(22),(23)以 Q, P 表出 $q^{(i)}$.

利用(22),(23)便可以自(21)式求出(14)式。證明是直接的。令 $\alpha, \beta, \dots$ 代表偶數, $r, s, \dots$ 代表奇數,而令 $i, j, k, \dots$ 代表一般的整數。不難看出,因 $q^\alpha, q^\beta, \dots$ 只與 Q 有關, $q^r, q^s, \dots$ 只與 P 有關,得

$$[q^\alpha, q^\beta] = [q^r, q^s] = 0. \quad (24)$$

至於 $[q^\alpha, q^r]$,我們得

$$\begin{aligned}[q^\alpha, q^r] &= \left[\sum (-)^{\alpha/2} \eta_i \omega_i^\alpha Q_i, \frac{1}{2} \sum (-)^{(r-1)/2} \omega_j^{r-1} P_j \right] = \\ &= \frac{1}{2} i \sum (-)^{(\alpha+r-1)/2} \eta_i \omega_i^{\alpha+r-1},\end{aligned} \quad (25)$$

同理,

$$[q^r, q^\alpha] = -\frac{1}{2} i \sum (-)^{(\alpha+r-1)/2} \eta_i \omega_i^{\alpha+r-1}. \quad (25)'$$

利用(18)式,便證明了當 k, l 同時 $< N$,

$$[q^k, q^l] = 0. \quad (26)$$

(14)式中的其他式也易證明的。首先

$$[q^\alpha, p^r] = [q^r, p^\alpha] = 0.$$

其次,利用(10),(24),(25),(18),(19),得

$$\begin{aligned}
[q^\alpha, p^\beta] &= \left[q^\alpha, 2 \sum (-)^\beta a_{\beta+j+1} q^{\beta+2j+1} \right] = \\
&= i \sum_{j=0} \sum_i (-)^\beta (-)^{(\alpha+\beta+2j)/2} \eta_i \omega_i^{(\alpha+\beta+2j)} a_{\beta+j+1} = \\
&= i \sum_{n=0} \sum_i (-)^\beta (-)^n \eta_i \omega_i^{2n} a_{n+1-(\alpha-\beta)/2} = \delta_{\alpha\beta} i.
\end{aligned}$$

同樣

$$\begin{aligned}
[q^r, p^s] &= \left[q^r, 2 \sum (-)^s a_{s+j+1} q^{s+1+2j} \right] = \\
&= -i \sum (-)^s (-)^{(r+s+2j)/2} \eta_i \omega_i^{(r+s+2j)} a_{s+j+1} = \\
&= -i \sum (-)^s (-)^n \eta_i \omega_i^{2n} a_{n+1-(r-s)/2} = \delta_{rs} i. \quad (27)
\end{aligned}$$

最後

$$\begin{aligned}
[p^\alpha, p^\beta] &= [p^r, p^s] = 0. \\
[p^\alpha, p^r] &= 4 \left[\sum (-)^a a_{\alpha+j+1} q^{\alpha+2j+1}, \sum (-)^r a_{r+k+1} q^{r+2k+1} \right] = \\
&= 4 (-)^{\alpha+r} \sum_{j,k,i} a_{\alpha+j+1} a_{r+k+1} (-)^{(a+r+1+2j+2k)/2} \eta_i \omega_i^{(a+r+1+2j+2k)} \left(-\frac{1}{2} i \right). \quad (28)
\end{aligned}$$

如果 $\alpha + 1 - r > 0$, 上式右方可以寫為

$$\begin{aligned}
&-2i (-)^{\alpha+r} \sum_j \sum_n \sum_i a_{\alpha+j+1} a_{-j+n+1-(\alpha-r+1)/2} (-)^n \eta_i \omega_i^{2n} = \\
&= -2i (-)^{\alpha+r} \sum_{j=0} a_{\alpha+j+1} \delta \left[j + \frac{1}{2} (\alpha - r + 1) \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

因為 $j + \frac{1}{2} (\alpha - r + 1)$ 始終大於零, 上式等於零。若 $\alpha + 1 - r \leq 0$, 那末 $r + 1 - \alpha > 0$, (28) 右方可以寫為

$$\begin{aligned}
&-2i (-)^{\alpha+r} \sum_k \sum_n \sum_i a_{n-k+1-(r-\alpha+1)/2} a_{r+k+1} (-)^n \eta_i \omega_i^{2n} = \\
&= -2i (-)^{\alpha+r} \sum a_{r+k+1} \delta [k + (r - \alpha + 1)/2] \quad (30)
\end{aligned}$$

也為零。以上證明了可以自 (21) 式求出 (14) 式。由這一點, 可以看出自 Q_i, P_i 變至 q_i, p_i 的變換是切觸變換, 因此也必然能自 (14) 式求出 (21) 式。

現在讓我們證明 (20) 式右方即是 (11) 式右方。因為 (22) 式對 Q_j 求解, 即是

$$Q_j = \Pi^j (D^2 + \omega_i^2) q, \quad (31)$$

所以 (23) 式對 P_j 求解, 即是

$$P_j = 2\eta_j \Pi^j (D^2 + \omega_i^2) Dq. \quad (32)$$

因此 (20) 右方等於

$$\begin{aligned}
&\sum \eta_j \Pi^j (D^2 + \omega^2) Dq \Pi^j (D^2 + \omega^2) Dq + \\
&+ \sum \eta_j \omega_j^2 \Pi^j (D^2 + \omega^2) q \Pi^j (D^2 + \omega^2) q. \quad (33)
\end{aligned}$$

現在將 $\Pi^j (D^2 + \omega^2)$ 寫為

$$\begin{aligned} \frac{f(D)}{D^2 + \omega_j^2} &= D^{2N-2} + (a_{N-1} - \omega_j^2)D^{2N-4} + (a_{N-2} - a_{N-1}\omega_j^2 + \omega_j^4)D^{2N-6} + \dots = \\ &= \sum_{k=0} \sum_{m=0} D^{2N-2k-2} a_{N-k+m} (-)^m \omega_j^{2m}, \end{aligned} \quad (34)$$

於是

$$\begin{aligned} \sum \eta_j \Pi^j (D^2 + \omega^2) Dq \Pi^j (D^2 + \omega^2) Dq &= \\ &= \sum \eta_j (D^{2N-2k-1}q)(D^{2N-2l-1}q) a_{N-k+m} a_{N-l+n} (-)^{m+n} \omega_j^{2(m+n)} = \\ &= \sum_{k,l,m} (D^{2N-2k-1}q)(D^{2N-2l-1}q) \sum_{j,u} a_{N-k+m} a_{u+N-l-m} (-)^u \eta_j \omega_j^{2u} = \\ &= \sum_{k,l,m} (D^{2N-2k-1}q)(D^{2N-2l-1}q) a_{N-k+m} \delta_{N-l-m-1,0} = \\ &= \sum_{k,l} (D^{2N-2k-1}q)(D^{2N-2l-1}q) a_{2N-k-l-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

用同樣方法計算(33)的第二項，證明(20)右方等於

$$\begin{aligned} \sum_{k=0} \sum_{l=0} (D^{2N-2k-1}q)(D^{2N-2l-1}q) a_{2N-k-l-1} - \\ - \sum_{k=0} \sum_{l=0} (D^{2N-2k-2}q)(D^{2N-2l-2}q) a_{2N-k-l-2}. \end{aligned} \quad (36)$$

不難驗證(36)即是(11)式右方。這完成了兩個理論的完全等效的證明。

以上的討論帶來了二個結論。

(i) (20)式不是正定的(因 $\sum \eta_j = 0$ ，因此 η 有正有負)，因此(11)式也不是正定的。這說明了用文獻[3]中的方法應用至滿足

$$\Pi(D^2 + \omega_i^2)q = 0$$

的場 q 時，我們不能獲得正定的哈密頓。

(ii) 將文獻[1]的理論，形式地推廣至 $N = \infty$ 的情形，恐怕不能帶來令人滿意的結果。理由是：我們自(21)式證明了

$$[q^i, q^j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (37)$$

因此當 N 趨近於無窮大時，

$$[q^i, q^j] = 0 \quad (\text{對於任何有限 } i, j),$$

亦即對任意的 t, t' ，

$$[q(t), q(t')] = 0, \quad (38)$$

這樣的理論顯然不能令人滿意的。

這裏應當指出：如果我們利用海森伯的一個建議^[5]來處理 $N = \infty$ 的情形，求這個情形下的對易關係，情形是並不樂觀的。事實上，對於 N 為有限數的情形，如果我們取哈密頓為(11)式或與之相等效的(20)式，海森伯的方法基本上只帶來了對易關係(21)式，亦即(14)^[6]。當 N 為無限時，我們求哈密頓的方法似乎只能將 L 展為 $q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)} \dots$ 的級數，利用 $N = \infty$ 的(5)式(因而使 H 為類如(36)，(11)的一個級數)，此外似乎沒有別的辦法。用了這個哈密頓，再應用海森伯方法去求對易關係，顯然地情形正與 N 為有限時相似，獲得了 N 為無窮大時的(37)式，亦即(38)式。這樣的理論，已經指出，是不能令人滿意的。

將以上的 N 爲有限的理論推廣至一些場 $q_a(x, y, z, t)$ 是極易的，所得的理論的相對論性也是沒有問題的(只消 L 取爲標量)。De Wet^[7] 曾經討論了 $N = 2$ 時理論的相對論性，但他的方法推廣至 N 取大值的情形是不方便的。在這裏，我們最好引入在各種時空曲面上的波函數，在各個曲面上引入了相當於(14)式的假定，再證明波函數隨曲面變化而變化的方程是可積的。這在實質上便已證明了(14)式的相對論不變性^[8]。

參 考 文 獻

- [1] Pais 與 Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** (1950), 145.
可參閱 Podolsky, *Phys. Rev.* **62** (1942), 68; **65** (1944), 228.
- [2] Whittaker, *Analytical Dynamics*, 1937, p. 265.
- [3] Chang, T. S. (張宗燧), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **42** (1946), 132.
- [4] Chang, T. S. (張宗燧), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **44** (1947), 76.
- [5] Heisenberg, *Zeits. f. Physik* **123** (1944), 93.
- [6] Yang, L. M. (楊立銘), *Phys. Rev.* **84** (1951), 788.
Wigner, *Phys. Rev.* **77** (1950), 711.
- [7] De Wet, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **44** (1948), 546.
- [8] 張宗燧, 中國物理學報, **7** (1949), 265.
- [9] Thirring, *Phys. Rev.* **79** (1950), 703.

HIGH ORDER EQUATIONS IN QUANTUM THEORY

CHANG TSUNG-SUI

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The purpose of this short paper is to compare the two existing theories of quantization of equations of motion containing high derivatives. As well known, when the order of the derivatives of field quantities q are finite, it is possible in certain cases to express q as a linear combination of quantities Q , each of which satisfies an equation of the second order. Quantization proceeds as if the various Q are independent. On the other hand, one may, following Ostrogradski, put the equations of motion for the variables q in canonical form and then perform a subsequent quantization. (Such a theory was also discussed by the author in an earlier paper.) It is obviously worthwhile to see if the two theories are identical.

In the following it is proved that the above two theories are in fact identical, both with respect to the commutation rules between q , Q and their derivatives and with respect to the total Hamiltonian.

The importance of the above result lies in:

(i) just as in the first theory, the Hamiltonian in the second theory is also not positive definite. In other words, possibilities of obtaining in the second theory positive definite Hamiltonians for field equations of certain types are

found not to exist.

(ii) just as in the second theory, q and its first few derivatives commute. This implies that in extending the first theory formally to cases containing derivatives of infinite order, q and all its derivatives of finite order commute. Since this is an undesirable feature, formal extension of the two theories to cases containing derivatives of infinite order seems difficult.