

作用表示波動方程中與面有關項*

張 宗 燧

(中國科學院數學研究所)

提 要

這篇短文的內容是：

(i) 對於量子場論中的

$$i \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = V(x, \sigma) \Psi[\sigma]$$

如何由尋常的“曲面上的薛定諤方程”導出，作一個較嚴格的討論，以及

(ii) 討論上式中的 $V(x, \sigma)$ 在什麼條件下不包含有 σ 。我們證明了所需的條件是

$$\frac{\partial L'}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial L'}{\partial \phi_\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu \partial \phi_\nu} F(\phi, \phi_\rho),$$

式中 L, L' 代表總拉格朗日及作用拉格朗日， ϕ 代表場量， ϕ_μ 代表 $\partial \phi / \partial x^\mu$ ， $F(\phi, \phi_\rho)$ 代表 ϕ 及 ϕ_μ 的一個任意函數。

這篇短文的內容是：

(i) 對於量子場論中常見到的

$$i \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = V(x, \sigma) \Psi[\sigma] \quad (1)$$

如何由尋常的“曲面上的薛定諤方程”導出，作一個較嚴格的討論，以及

(ii) 討論上式中的 $V(x, \sigma)$ 在什麼情形下不含有 σ 。對於量子電動力學，(1)式的導出的討論已見於作者的一篇論文^[1]中。在這裏，我們補入一般場的討論。事實上，(1)式的討論是極簡單的，即下面自(14)式至(17)式的幾行，但爲了討論(ii)起見，我們不得不重覆一些已知的理論^[2,3]。

一. (1)式的導出

令 x_μ 爲 (t, x, y, z) ， $g_{\mu\nu}$ 等爲

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1.$$

四維空間中一個曲面可以寫爲

$$x^\mu = x^\mu(u_1, u_2, u_3). \quad (2)$$

令 N_μ 定義爲

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\theta} \frac{D(x_\nu, x_\rho, x_\theta)}{D(u_1, u_2, u_3)} \quad (\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1). \quad (3)$$

對於我們此後所擬討論的各個空間性曲面，我們擬如此地選擇 u_1, u_2, u_3 ，使 $N_0 = N^0 > 0$ 。

* 1957 年 8 月 24 日收到。

作用積分爲拉格朗日 L 在某一體積 V 上的積分

$$\int L(\phi, \phi_\mu) d^4x \quad (4)$$

$$(d^4x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3, \quad \phi_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu).$$

在上式中，爲簡化符號起見，我們沒有寫出 ϕ 上爲了表示各種不同 ϕ 而引入的上標。 (4) 式的完全變化爲

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} \right) \delta\phi d^4x + \int (X_\mu D x^\mu + \pi D\phi) du \quad (5)$$

$$(du = du_1 du_2 du_3),$$

式中

$$D\phi = \delta\phi + \phi_\mu D x^\mu,$$

$$\pi = N_\mu (\partial L / \partial \phi_\mu),$$

$$X_\mu = L N_\mu - N_\nu \phi_\nu (\partial L / \partial \phi_\nu). \quad (6)$$

$(5), (6)$ 式的導出見文獻 $[2], [3]$ ； $(5), (6)$ 式中的 N_μ 爲包圍體積 V 的曲面的 N_μ 。稱此面爲

$$x^\mu = b^\mu(u_1, u_2, u_3),$$

稱相應的 N_μ 爲 $N_{\mu,b}$ 。令

$$\phi^r \equiv \phi_\mu (\partial b^\mu / \partial u_r). \quad (7)$$

於是 X_μ 可以表爲 $\partial b^\mu / \partial u_r, N_{\mu,b}, \phi, \phi^r, \pi$ 的函數，簡寫爲 $X_\mu(\phi, \phi^r, \pi, b)$ 。如果我們稱 b 面上的波函數爲 $\Psi(b)$ ，那末曲面上的薛定諤方程便是

$$i[\Psi(b^\mu + \delta b^\mu) - \Psi(b^\mu)] \equiv i\delta\Psi = -\int X_\mu(\phi, \phi^r, \pi, b) \delta b^\mu du \Psi, \quad (8)$$

式中 ϕ 爲算符 $\phi(u_1, u_2, u_3)$ ，

$$\phi^r = \partial\phi / \partial u_r,$$

π 爲算符 $\pi(u_1, u_2, u_3)$ ，適合

$$[\pi(u), \phi(u')] = -i\delta(u - u'), \quad (9)$$

$$[\pi, \pi] = [\phi, \phi] = 0 \quad ([A, B] = AB - BA)$$

(如果場適合波色統計)等等。詳細說明見文獻 $[3]$ 。

當 L 不包含作用項時，我們將該情形下的 X_μ 寫爲 X_μ^0 。一般情形下的 X_μ 可以寫爲 $X_\mu^0 + X_\mu^I$ 。根據文獻 $[1, 3]$ ，我們知

$$i\delta\Psi = -\int X_\mu^0(\phi, \phi^r, \pi, b) \delta b^\mu du \Psi \quad (10)$$

是可積的，因此可以引入在面 $t = -\infty$ 處等於 1 的一個解 $U_0(b)$ 。令 (8) 式中的 Ψ 寫爲

$$U_0(b)\Psi',$$

(8) 式便變爲

$$i\delta\Psi' = -\int X_\mu^I(\phi_b, \phi_b^r, \pi_b, b) \delta b^\mu du \Psi', \quad (11)$$

式中

$$\phi_b(u) = U_0^{-1}(b)\phi(u)U_0(b),$$

$$\pi_b(u) = U_0^{-1}(b)\pi(u)U_0(b), \dots \quad (12)$$

現在我們要證明 $X_\mu^I(\phi, \phi^r, \pi, b)$ 是

$$-N_\mu V(\phi, \phi^r, \pi, b) \quad (13)$$

的形式,式中的 V 代表某一個尚未決定的函數. 證明是:當作用項存在時,

$$X_\mu \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r} = \left(LN_\mu - N_\nu \phi_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_\nu} \right) \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r} = -\pi \phi^r, \quad (14)$$

而當作用項不存在時,如果我們稱該時的拉格朗日為 L^0 , 我們有

$$X_\mu^0 \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r} = \left(L^0 N_\mu - N_\nu \phi_\mu \frac{\partial L^0}{\partial \phi_\nu} \right) \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r} = -\pi \phi^r, \quad (15)$$

因此

$$X_\mu^I \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r} = 0, \quad (16)$$

亦即 X_μ^I 與 N_μ 成正比,亦即(11)式中的 $X_\mu^I(\phi_b, \phi_b^r, \pi_b, b)$ 必須取 $-N_\mu V$ 的形式.

現在便不難求出(1)式. 如果我們令 δb^μ 只在某一點 u 附近不等於零,我們可以將

$$\int N_b \delta b^\mu du$$

換為 $b + \delta b$ 面及 b 面中所包含的體積,便獲得了

$$i \frac{\delta \Psi'[b]}{\delta b(u)} = V(\phi_b(u), \phi_b^r(u), \pi_b(u), b) \Psi'[b], \quad (17)$$

即是(1)的形式.

(17)式看上去依然與(1)不同,即(17)式的 V 中的變數 $\phi_b, \pi_b, \dots$ 等與 b 有關,而(1)式的 V 的變數是 $\phi(x), \phi_\mu(x)$, 與面無關. 事實上,在討論不同 b 、不同 u 的 V 的對易關係時,我們完全可以引入一個滿足自由場方程(即無作用項的場方程)的 $\phi_f(x)$, 而以 $x_\mu = b_\mu(u)$ 代入的

$$\phi_f(x), \quad (\partial \phi_f / \partial x^\mu)(\partial b^\mu / \partial u_r), \\ N_\mu (\partial L / \partial \phi_\mu)_{\phi=\phi_f}$$

來代替 $\phi_b(u), \phi_b^r(u), \pi_b(u)$. 證明見文獻[3]. 在那裏,我們已實質地證明了各個不同 b, u 的 $\phi_b(u)$ 在 $b_\mu(u)$ 相同時是同一個算符.

這樣的代替,使(17)式中的 V 簡化. 例如在量子電動力學中,以電子場 ψ 為 ϕ 中之一,那末當 L 取為

$$-\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \psi + j_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \\ (\gamma_\mu = -i\beta, -i\beta\alpha)$$

時, ψ 的動量為

$$\pi_\psi = -\bar{\psi} N_\mu \gamma^\mu,$$

使

$$\bar{\psi} = \pi_\psi N_\mu \gamma^\mu / (N_\rho N^\rho).$$

用以上理論,算出

$$V(\phi, \phi^r, \pi, b) = A^\mu \frac{ie}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{1}{N_\rho N^\rho} [(\pi_\psi N_\rho \gamma^\rho)_\alpha \psi_\beta - \psi_\beta (\pi_\psi N_\rho \gamma^\rho)_\alpha].$$

根據以上所談的辦法,以自由場代入,便獲得了尋常的

$$A^\mu \frac{ie}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta - \psi_\beta \bar{\psi}_\alpha).$$

在這個特殊情形下， V 中便不再有 b 字樣出現。

在一般情形下，在以上所述的代替後， V 中依舊可以含有 b 字樣，例如介子場與電磁場相互作用的情形。在第三節我們將討論這個問題。

值得指出：(8)式可以經過一個表示的變換而簡化。若(8)式中原來的 Ψ 是 $\langle m' |$ ，那末我們可以定義 $\langle m'_b |$ ，

$$\langle m'_b | = \langle m' | U_0(b) |,$$

式中 m'_b , m' 代表同樣的本徵值。所以如此定義，乃是因為

$$\begin{aligned} \langle m'_b | m_b | &= \langle m' | U_0(b) m_b | = \\ &= \langle m' | U_0(b) U_0^{-1}(b) m U_0(b) | = \\ &= \langle m' | m U_0(b) | = m' \langle m' | U_0(b) | = m'_b \langle m'_b |. \end{aligned}$$

用這個表示，(8)式成為

$$i\delta \langle m_b | b \rangle = - \int \langle m_b | X_\mu^\dagger \delta b^\mu | b \rangle du.$$

二. 運動方程

作用表示理論中變數的經典運動方程已見於文獻[2]。在這裏， ϕ, π 是二個面 $b_\mu(u)$, $\sigma_\mu(u)$ 的汎函數及 u 的函數。它們的正確運動方程是

$$\frac{\delta \phi_{b\sigma}(u)}{\delta b_\mu(u')} = - \frac{\delta X^{\mu,0}(\phi_{b\sigma}(u'), \phi_{b\sigma}^\dagger(u'), \pi_{b\sigma}(u'), b)}{\delta \pi_{b\sigma}(u)}, \quad (18)$$

$$\frac{\delta \pi_{b\sigma}(u)}{\delta b_\mu(u')} = + \frac{\delta X^{\mu,0}(\phi_{b\sigma}(u'), \dots, b)}{\delta \phi_{b\sigma}(u)}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi_{b\sigma}(u)}{\delta \sigma_\mu(u')} &= - \int du'' \left\{ \frac{\delta \phi_{b\sigma}(u)}{\delta \phi_{\sigma\sigma}(u'')} \frac{\delta X^{\mu,I}(\phi_{\sigma\sigma}(u'), \dots, \sigma)}{\delta \pi_{\sigma\sigma}(u'')} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta \phi_{b\sigma}(u)}{\delta \pi_{\sigma\sigma}(u'')} \frac{\delta X^{\mu,I}(\phi_{\sigma\sigma}(u'), \dots, \sigma)}{\delta \phi_{\sigma\sigma}(u'')} \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \pi_{b\sigma}(u)}{\delta \sigma_\mu(u')} = \dots, \quad (21)$$

而(20),(21)式右方的 $\delta \phi_{b\sigma}/\delta \phi_{\sigma\sigma}$, $\delta \phi_{b\sigma}/\delta \pi_{\sigma\sigma}$ 乃是由(18),(19)兩式所決定的。由(18),... (21)不難求出

$$\frac{\delta \phi_{\sigma\sigma}(u)}{\delta \sigma_\mu(u')} = \dots, \quad \frac{\delta \pi_{\sigma\sigma}(u)}{\delta \sigma_\mu(u')} = \dots. \quad (22)$$

(18)–(21)式的可積分是可以證明的。首先，(18),(19),(22)是可積的，證明見文獻[3]。其次由(18),(20)，可以算出二個用不同次序微分所得的 $\delta^2 \phi_{b\sigma}(u)/\delta b_\nu(u'')\delta \sigma_\mu(u')$ 都等於

$$\begin{aligned} \int du''' \left\{ \left[\frac{\delta}{\delta \phi_{\sigma\sigma}(u''')} \frac{\delta X^{\nu,0}(\phi_{b\sigma}(u''), \dots, b)}{\delta \pi_{b\sigma}(u)} \right] \frac{\delta X^{\mu,I}(\phi_{\sigma\sigma}(u'), \dots, \sigma)}{\delta \pi_{\sigma\sigma}(u''')} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\delta}{\delta \pi_{\sigma\sigma}(u''')} \frac{\delta X^{\nu,0}(\phi_{b\sigma}(u''), \dots, b)}{\delta \pi_{b\sigma}(u)} \right] \frac{\delta X^{\mu,I}(\phi_{\sigma\sigma}(u'), \dots, \sigma)}{\delta \phi_{\sigma\sigma}(u''')} \right\}, \end{aligned}$$

因而相等。最後 $\delta^2 \phi_{b\sigma}/\delta \sigma_\mu(u')\delta \sigma_\nu(u'')$ 與 $\delta^2 \phi_{b\sigma}/\delta \sigma_\nu(u'')\delta \sigma_\mu(u')$ 的相等可以由(18),(19),(22)的可積性求出。

不難寫出在量子力學中的相應式子。如果令在面 $t = -\infty$ 處為 1 而滿足(17)式的 Ψ' 為 $U(b)$, 那末

$$U^{-1}(b)\phi_b(u)U(b)$$

便是海森伯算符。讓我們在此稱

$$U^{-1}(\sigma)\phi_b(u)U(\sigma) \quad (23)$$

為 $\phi_{b\sigma}(u)$ 而討論它對於 b, σ 的變化。顯然地

$$\begin{aligned} \frac{\delta\phi_{b\sigma}(u)}{\delta b_\mu(u')} &= U^{-1}(\sigma) \frac{\delta\phi_b(u)}{\delta b_\mu(u')} U(\sigma) = \\ &= U^{-1}(\sigma) i[\phi_b(u), X^{\mu 0}(\phi_b(u'), \dots, b)] U(\sigma) = \\ &= i[\phi_{b\sigma}(u), X^{\mu 0}(\phi_{b\sigma}(u'), \dots, b)], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\phi_{b\sigma}(u)}{\delta\sigma_\mu(u')} &= U^{-1}(\sigma)\phi_b(u) \frac{\delta U(\sigma)}{\delta\sigma_\mu(u')} + \dots = \\ &= iU^{-1}(\sigma)[\phi_b(u), X^{\mu i}(\phi_\sigma(u'), \dots, \sigma)] U(\sigma) = \\ &= i[\phi_{b\sigma}(u), X^{\mu i}(\phi_{\sigma\sigma}(u'), \dots, \sigma)], \end{aligned} \quad (25)$$

這些式子顯然即是(18)–(21)。

因為 $\phi_b(u)$ 可以寫為 $\phi(x)$, 所以 $\phi_{b\sigma}(u)$ 可以寫為 $\phi(x; \sigma)$ 。可以證明這樣的 $\phi(x; \sigma)$ 與楊振寧, Feldman 論文^[4]中的 $A(x, \sigma), \psi(x, \sigma)$ 性質完全相同。為證明這一點, 我們只消注意到以下二點。

- (i) $\phi(x; \sigma)$ 及 $A(x, \sigma), \psi(x, \sigma)$ 對於 x 而言都滿足自由場方程。
- (ii) 令 $\phi^H(x)$ 代表海森伯繪景中的 ϕ 。當 x 在 σ 面上, 我們可以令 $b = \sigma$, 得

$$\begin{aligned} \phi(x; \sigma) &= \phi_{b\sigma}(u)|_{b=\sigma} = \phi_{\sigma\sigma}(u) = \phi^H(x), \\ \left(N_{\mu\sigma} \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu}\right)(x; \sigma) &= \left(N_{\mu b} \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu}\right)(x; \sigma) = \pi_{b\sigma}(u)|_{b=\sigma} = \\ &= \pi_{\sigma\sigma}(u) = \pi^H(u) = \left(N_{\mu\sigma} \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu}\right)^H \end{aligned}$$

(式中 $N_{\mu\sigma}, N_{\mu b}$ 為 σ, b 面上的 N), 正與楊振寧論文中的

$$\begin{aligned} A(x|\sigma) &= A^H(x), \\ \left(\frac{\partial A(x, \sigma)}{\partial t}\right)_{(x|\sigma)} &= \frac{\partial A^H(x)}{\partial t}, \\ \psi(x|\sigma) &= \psi^H(x), \quad \bar{\psi}(x|\sigma) = \bar{\psi}^H(x) \end{aligned} \quad (26)$$

相同。(此處 $(x|\sigma)$ 的符號代表 x 在 σ 面上, 見文獻[4].) (i), (ii) 便是所需的證明。這樣, 文獻[4]所討論的

$$A(x, \infty) = S^{-1}A(x, -\infty)S$$

等式, 便極顯然了!

三. V 不含有 b (或 σ) 的條件

在這一節中, 我們討論在什麼條件下, (17) 式中的 V 在用自由場來代替其中的變數後, 不再與面有關。

為此，讓我們計算 X_μ^I 。稱 L^0, L^I 為自由及作用拉格朗日，稱

$$\pi = N_{\mu b} \partial(L^0 + L^I)/\partial \phi_\mu, \quad (27)$$

$$\phi^r = \phi_\mu (\partial b^\mu / \partial u_r) \quad (28)$$

對 ϕ_μ 的解為 $f_\mu^{(1)}(\phi, \phi^r, \pi, b)$ ，而稱

$$\pi = N_{\mu b} \partial L^0 / \partial \phi_\mu, \quad (29)$$

$$\phi^r = \phi_\mu (\partial b^\mu / \partial u_r) \quad (30)$$

對 ϕ_μ 的解為 $f_\mu^{(2)}(\phi, \phi^r, \pi, b)$ ，那末

$$X_\mu^I = N_\mu (L^0 + L^I)_1 - \pi f_\mu^{(1)} - N_\mu (L^0)_2 + \pi f_\mu^{(2)}; \quad (31)$$

式中的下標 1, 2 說明式中的 ϕ_μ 以 $f_\mu^{(1)}$ 或 $f_\mu^{(2)}$ 來代替。不難看出，

$$\begin{aligned} f_\mu^{(1)}(\phi, \phi^r, \pi, b) &= f_\mu^{(2)} \left[\phi, \phi^r, \pi - N_\nu \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} \right)_1, b \right] = \\ &= f_\mu^{(2)}(\phi, \phi^r, \pi, b) - \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} N_\nu \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} \right)_1 + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

假定 L^0, L^I 對於 ϕ_μ 而言至多是二次的，那末在 (27)–(30) 中， π, ϕ^r 對於 ϕ_μ 而言是線性的，因此 $f_\mu^{(1)}, f_\mu^{(2)}$ 對於 π 而言也是線性的，所以 (32) 式中未寫出的項是不存在的。

將 (32) 式寫為

$$f_\mu^{(1)} - f_\mu^{(2)} = - \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} \left\{ N_\nu \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} \right)_2 + N_\nu \left(\frac{\partial^2 L^I}{\partial \phi_\nu \partial \phi_\rho} \right)_2 (f_\rho^{(1)} - f_\rho^{(2)}) \right\}$$

而施用疊代法，求出 $f_\mu^{(1)} - f_\mu^{(2)}$ 為一個級數，而這個級數可以收縮成為一項，結果是

$$\begin{aligned} f_\mu^{(1)} - f_\mu^{(2)} &= - \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} g, \\ g &= N_\nu \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} \right)_2 \left\{ 1 + N_\theta \left(\frac{\partial^2 L^I}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\theta} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

代入 (31)，得

$$\begin{aligned} X_\mu^I &= N_\mu \left\{ -g \left(\frac{\partial L^0}{\partial \phi_\rho} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L^0}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\tau} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \frac{\partial f_\tau^{(2)}}{\partial \pi} g^2 + \right. \\ &\quad \left. + L_2^I - \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} g + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L^I}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\tau} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \frac{\partial f_\tau^{(2)}}{\partial \pi} g^2 \right\} + \pi \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} g. \end{aligned}$$

我們所求的 V 乃是

$$- (N_\rho N^\rho)^{-1} (N^\mu X_\mu^I),$$

亦即

$$\begin{aligned} &- L_2^I + \frac{g}{(N_\rho N^\rho)} \left\{ -\pi \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} N^\mu + N^\mu N_\mu \left(\frac{\partial L^0}{\partial \phi_\rho} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \right\} + \\ &+ g \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (L^0 + L^I)}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\tau} \right]_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \frac{\partial f_\tau^{(2)}}{\partial \pi} g + \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \right)_2 \frac{\partial f_\rho^{(2)}}{\partial \pi} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

自 (30) 式得

$$0 = \frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} \frac{\partial b^\mu}{\partial u_r},$$

因此

$$\frac{\partial f_\mu^{(2)}}{\partial \pi} = N_\mu Y_0^{-1}(\phi, \phi^r, \pi, b), \quad (35)$$

式中 Y_0 爲一待定的函數。自(29)式,得

$$1 = N_\mu \left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \phi_\mu \partial \phi_\nu} \right)_2 \frac{\partial f_\nu^{(2)}}{\partial \pi},$$

以(35)代入上式,得

$$Y_0 = N_\mu N_\nu (\partial^2 L^0 / \partial \phi_\mu \partial \phi_\nu)_2 = N_\mu N_\nu (\partial^2 L^0 / \partial \phi_\mu \partial \phi_\nu). \quad (36)$$

以(33), (35), (36)代入(34)式,不難證明第二曲括號的值爲零,而第三項等於

$$\frac{1}{2} N_\rho \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \right)_2 N_\nu \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} \right)_2 / \left(N_\mu N_\theta \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu \partial \phi_\theta} \right)_2. \quad (37)$$

以自由場代入即等於取去下標 2. (34)的第一項顯然在代替後不再包含 b 字樣,所以我們所需要的條件乃是“(37)式等於 ϕ , $\partial \phi / \partial x$ 的一個函數 F ”,亦即

$$\frac{1}{2} N_\rho \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} N_\nu \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} = F \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) N_\mu N_\theta \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu \partial \phi_\theta},$$

亦即

$$\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} = 2F \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\nu}, \quad (38)$$

亦即

$$\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} / \left(\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial L^I}{\partial \phi^\mu} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\rho \partial \phi_\nu} / \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu \partial \phi^\mu}.$$

不難將以上的理論推廣至許多 ϕ 存在時的情形。這時 $\phi = \phi^1, \phi^2, \dots, \pi = \pi_1, \pi_2, \dots$. (33)應改爲

$$f_\mu^{\alpha(1)} - f_\mu^{\alpha(2)} = - (\partial f_\mu^{\alpha(2)} / \partial \pi_\beta) g_\beta, \\ g_\beta = (1 + Z)^{-1}{}_{\beta\rho} \times \left(N_\theta \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\theta^\rho} \right), Z_{\beta\rho} = N_\nu \frac{\partial^2 L^I}{\partial \phi_\nu^\beta \partial \phi_\theta^\rho} \frac{\partial f_\theta^{\gamma(2)}}{\partial \pi_\rho}.$$

(35), (36)應改爲

$$\partial f_\mu^{\alpha(2)} / \partial \pi_\beta = N_\mu \tau^{\alpha\beta}, N_\mu N_\nu \frac{\partial^2 L^0}{\partial \phi_\mu^\alpha \partial \phi_\nu^\beta} \tau^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma.$$

因此,稱

$$N_\mu N_\nu (\partial^2 L^0 / \partial \phi_\mu^\alpha \partial \phi_\nu^\beta)$$

爲 $Y_{0,\alpha\beta}$ 後, $\tau^{\beta\gamma}$ 亦即是 $(Y_0)^{-1,\beta\gamma}$. 以上面的結果代入相應的(34)式,得

$$-L_2 + \frac{1}{2} N_\mu \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\mu^\alpha} G^{\alpha\beta} N_\rho \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho^\beta}, \quad (39)$$

式中 G 滿足

$$N_\mu N_\nu \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu^\alpha \partial \phi_\nu^\beta} G^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma,$$

因此 G 可寫爲 $(Y^{-1})^{\beta\gamma}$. 計算是直接的,因此無庸逐步寫出.

顯然地,(17)式中的 V 在以自由場的 ϕ 代入後不再含有 N 的條件是:

$$\frac{1}{2} N_\mu \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\mu^\alpha} G^{\alpha\beta} N_\rho \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho^\beta} = F \left(\phi^\alpha, \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\mu} \right), \quad (40)$$

式中 F 爲任何函數.

顯然地,(38),(40)的一個特殊情形是

$$F = 0,$$

亦即

$$\partial L'/\partial \phi_\nu = 0,$$

亦即是量子電動力學的情形。

當(38), (40)沒有被滿足時, 亦即(34)的第三項在以自由場代替原來的變數後依舊包含 b 字樣時, 如果我們所討論的是 S 矩陣, 我們通常猜想這一項的影響可以包含在各種 ϕ, ϕ_μ 的收縮 (contraction, связь) 內, 亦即我們可以忽略這一項的影響而同時將 ϕ_μ, ϕ 的收縮值作一個改變, 改為 Δ_F 或 Δ_F' 對 x 的各級微商。對於標量介子場, 這個情形是存在的^[5]。但對於一般的場, 這一點的證明是困難的。無疑地, 在證明中, 我們必須將(37), (39)式展為作用常數的冪級數。例如討論二個標量場 φ, ψ 有以下的拉格朗日時,

$$L = \frac{1}{2} \psi_\mu \psi^\mu + \frac{1}{2} \varphi_\mu \varphi^\mu + e \psi_\mu \varphi^\mu, \quad (41)$$

我們得

$$Y_{\alpha\beta} = (N_\mu N^\mu) \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-e^2)} \frac{1}{(N_\mu N^\mu)} \begin{pmatrix} 1 & -e \\ -e & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

使(39)式成為 $-e \psi_\mu \varphi^\mu$ 加上

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{(1-e^2)} \frac{1}{N_\mu N^\mu} \{ (N_\rho \psi^\rho)^2 + (N_\rho \varphi^\rho)^2 - 2(N_\rho \psi^\rho)(N_\rho \varphi^\rho) \}. \quad (43)$$

上式中的 $(1-e^2)^{-1}$ 必須瞭解為 $1 + e^2 + e^4 + \dots$ 。

取 N_ρ 為固定的數 $(1, 0, 0, 0)$, ϕ_μ, ϕ 等的收縮值為

$$\langle \phi(x), \phi(x') \rangle = \frac{1}{2} D_F(x-x'),$$

$$\langle \phi_\mu(x), \phi(x') \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} D_F(x-x'),$$

$$\langle \phi_\mu(x), \phi_\nu(x') \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} D_F(x-x') - g_\mu^0 g_\nu^0 i\delta(x). \quad (44)$$

該時不難驗證, 至少對於 S 矩陣的展開式的起始幾項而言, (43)的影響正與(44)式中的

$$-g_\mu^0 g_\nu^0 i\delta(x) \quad (45)$$

的影響完全抵消。

可以指出, 僅僅由於 S 矩陣的相對論不變性, 即可以猜想(39)式的第二項與(45)式的影響或者抵消, 或者合為一個與 N 無關的影響。但猜想不是證明而我們應該找一個證明。這一個問題將留在將來討論。

參 考 文 獻

- [1] Chang, T. S. (張宗燧), *Phys. Rev.* **75** (1949), 967.
- [2] Roberts, K. V., *Proc. Roy. Soc. A* **204** (1950), 123; *Proc. Roy. Soc. A* **207** (1951), 228.
- [3] 張宗燧, 中國物理學報, **7** (1949), 265.
- [4] Yang, C. N. (楊振寧), Feldman, *Phys. Rev.* **79** (1950), 972.
- [5] Rohrlich, F., *Phys. Rev.* **80** (1950), 666.

NORMAL-DEPENDENT TERMS IN WAVE EQUATIONS IN INTERACTION REPRESENTATION

CHANG TSUNG-SUI

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The aim of this short paper is:

(i) To provide a rigorous proof for the deduction of the well-known equation

$$i \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = V(x, \sigma) \Psi[\sigma] \quad (1)$$

from the formulation of ordinary Schroedinger wave equations for wave functions on arbitrary space-like surfaces as given by Weiss and the author, and

(ii) To study under what conditions the operator V in the above equation does not contain σ explicitly.

To prove (1) from Weiss's theory, all that is necessary is to transform away the free Hamiltonian in the usual way and to prove that, according to the resulting wave equation, the difference of Ψ on two adjacent surfaces which are different only in a small neighbourhood of a certain point on the surfaces is proportional to the volume included between the surfaces. This is actually achieved.

The terms in V which depend explicitly on σ are worked out in terms of the total Lagrangian L and the interaction Lagrangian L^I , i.e.

$$\frac{1}{2} N_\mu \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\mu^\alpha} G^{\alpha\beta} N_\nu \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu^\beta}, \quad (2)$$

where $\phi^1, \phi^2, \dots$ are the various field quantities, ϕ_μ^α denotes $\partial \phi^\alpha / \partial x^\mu$, N_μ denotes the surface normal and $G^{\alpha\beta}$ are quantities defined by

$$N_\mu N_\nu \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu^\alpha \partial \phi_\nu^\beta} G^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (3)$$

For the special case in which there is only one ϕ , the condition for V not to contain σ explicitly reduces to

$$\frac{\partial L^I}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\nu} / \frac{\partial L^I}{\partial \phi_\rho} \frac{\partial L^I}{\partial \phi^\rho} = \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_\mu \partial \phi_\nu} / \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^\rho \partial \phi_\rho}. \quad (4)$$