

关于 $p-n$ 合金結中少数載流者的 注射理論*

王 守 武

(中国科学院应用物理研究所)

提 要

本文用一維模型計算了 $p-n$ 合金結中少数載流者的一般注射理論。这里假設复合率是与注入載流者的密度成正比。首先,我們討論了大注射和小注射的兩種極端情况,这样得到的結果被用作零級近似解來計算 $p-n$ 結中注入少数載流者的分布情况。用逐步近似的方法我們得到了注射效率和注射强度(即注入少数載流者的密度与原有多数載流者的密度之比)間的解析关系。在同样的基础上也得到了通过結的总电流密度和注射强度間的类似关系。这理論的結果表明,对一个平常的合金結晶体三極管來說,当發射極电流增加时,發射極的注射效率逐渐下降。在很大的注射强度下,注射效率趋近于極限值 $\frac{1}{1+b}$, 其中 b 是电子迁移率与空穴迁移率之比。对一个具有很低注射效率的 $p-n$ 合金結來說,在注射电流小的时候,注射效率是正比于通过結的总电流;当注射电流很大时,注射效率趋近于極限值 $\frac{1}{1+b}$ 。理論結果还表明,在小注射情况下,通过 $p-n$ 合金結的总电流是正比于注射强度;而在大注射情况下,它是正比于注射强度的平方。

一. 引 言

自从1948年 Bardeen 和 Brattain^[1] 發現半导体的放大效应之后,少数載流者的注射問題引起了很多人的注意。Shockley^[2,3] 首先建立了在小訊号下 $p-n$ 結中少数載流者的注射理論。在他的理論中,他假定注入少数載流者的密度要比原有多数載流者的密度低得多,因而他忽略了少数載流者的迁移电流而只考虑它們的扩散电流。1954年 Webster^[4] 指出,在半导体功率放大器中,实际注入基板的少数載流者的密度往往要比基板中原有的多数載流者的密度大得多,因此少数載流者在基板中的迁移电流不能被忽略,同时大量少数載流者注入基板后可以使發射結的注射效率减低,这是使半导体功率放大器的电流放大系数 α_{cb} 在大电流密度下迅速降低的主要原因。Webster 在計算發射結的注射效率时,只考虑了基板中由于大量注入少数載流者所引起的电导率的調制,忽视了基板中电场对注射效率的影响,这影响是有助于增加注射效率的,因此他过分地估計了注射效率随發射結电流的增加而减少的程度。Rittner^[5] 用比較仔細的方法計算了由注射效

* 1957年6月24日收到。

率所引起的 α_{cb} 的下降部分。在他的計算中，他忽略了基板中少数載流者的复合，同时假設發射結的注射效率是非常接近于 1 的，因而在某些地方忽略了基板中的多数載流者的电流。Misakava^[6] 利用准費米能級的观念得到了和 Rittner 相类似的結果。Толпыго 和 Заславская^[7] 在忽略了少数載流者的扩散电流的情况下，得到大电流下的注射效率的極限值。Толпыго 在另一篇論文^[8] 中更詳細地計算了 $p-n$ 結的注射效率，但是他假設 $p-n$ 結兩边半导体的厚度都是無限大，因此，他的結果不适用于晶体三極管的情况。本文的目的是要建立一个更为普遍的少数載流者的注射理論，这里所用的方法是逐步近似法。我們首先討論了在注射电流極大和極小的兩种極端情况下，少数載流者的分布；然后以注射电流極大的情况作为我們的零級近似解答，代入少数載流者連續方程中的复合項和其他校准項內以求得一級近似。由于这里考虑了少数載流者的复合和多数載流者的电流，因此它可以适用于具有較厚的基板的晶体三極管在各种不同的注射效率的情况。此外，在对半导体所做的各种物理实验中，我們往往在样品上只加上一个發射極而沒有集電極，同时發射極的注射效率也不高，这种情况也可以用本文中的理論来分析，分析的結果表明，当注射效率很低而注入的少数載流者密度也相当低时，注射效率应该与通过 $p-n$ 結的总电流成正比。这个現象已經在 1954 年被 Many^[9] 在实验中观察到。

二. 基本假設和基本方程

在处理少数載流者的注射理論时，我們首先假定全部的变数都只是一个坐标 x 的函数，也就是說，我們考虑的只是定态的一維性的問題。在这种情形下，半导体中的电子电流密度 I_n 和空穴电流密度 I_p 应该滿足下列方程¹⁾：

$$I_n(x) = D_n \left\{ \frac{dn}{dx} + \beta n E \right\}, \quad (1)$$

$$I_p(x) = D_p \left\{ -\frac{dp}{dx} + \beta p E \right\}. \quad (2)$$

其中 n 和 p 是电子和空穴的密度； D_n 和 D_p 是电子和空穴的扩散系数； E 是半导体中的电场； $\beta = \frac{e}{kT}$ 在室温下約为 40 伏⁻¹。

現在我們假定半导体本身是 n -型鍺，也就是說少数載流者是空穴。讓我們首先討論一下在各种不同的注射程度下，空穴的复合情况。根据 Shockley 和 Read^[10] 的理論，当少数載流者的密度很大时，每秒每單位体积內复合的少数載流者数目正比于它的密度；当少数載流者的密度很小时，每秒每單位体积內复合的少数載流者数目正比于它在热平衡时增加的密度。前后兩种情形的比例常数一般是不相等的，这比例常数的倒数可以称为少数載流者的寿命。Armstrong, Carlson 和 Bentivegna^[11] 用实验証明空穴在鍺中的寿命在很大的範圍內基本上是不随注射程度而变的，因此我們在整个計算过程中將假定：每秒每單位体积內复合的空穴数目正比于空穴的密度，这比例常数是不随注射程度而变的常数 $\frac{1}{\tau}$ 。这样空穴的連續方程成为：

¹⁾ 这里省去了一个电子电荷 e 的因子，因此实际的电流密度应该是 $I_n e$ 和 $I_p e$ 。

$$-\frac{dI_p}{dx} = \frac{p}{\tau}. \quad (3)$$

除此以外，我們还需要两个方程来解出 p , n , I_p , I_n 和 E 五个未知量。这两个方程应该是：

$$I_n + I_p = I = \text{总电流密度} = \text{常数} \quad (4)$$

和泊松方程

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e}{\epsilon}(p - n + N), \quad (5)$$

其中 ϵ 是半导体的电容率； N 是 n -型锗中离化施主杂质的密度¹⁾。Herring^[12] 指出，除了在过渡层或表面附近的空电荷层里所产生的强电场以外，对在均匀锗内部所能引起的电场 E 来说，在一般情况下 $\frac{\epsilon}{4\pi e} \frac{dE}{dx}$ 总要比 p , n 或 N 都小得多。因此，(5)式可以简化为

$$n - p = N, \quad (6)$$

上式的物理意义就是说半导体内部应该保持电中性。

(1), (2), (3), (4) 和 (6) 式是决定两种载流者在 n -型锗中运动的基本方程。我們可以从 (1), (2) 式中消去 E , 再利用 (4) 和 (6) 得

$$\frac{(2p+N)D_n}{(1+b)p+bN} \frac{dp}{dx} - \frac{Ip}{(1+b)p+bN} = -I_p, \quad (7)$$

其中 $b = \frac{D_n}{D_p}$ 。将上式对 x 微分，同时利用 (3)，得

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(2p+N)D_n}{(1+b)p+bN} \frac{dp}{dx} - \frac{Ip}{(1+b)p+bN} \right] = \frac{p}{\tau}. \quad (8)$$

(8) 式是决定少数载流者密度 p 的基本微分方程。因为它是非线性的，准确的解很难得到，我們必须作一些近似的计算。在得到 p 与 x 的关系后，可以利用 (7) 式来计算空穴电流密度 I_p 。

三. 一般理論

在近似地解微分方程 (8) 之前，我們先讨论一下两个特殊情况。第一种情况，当 $p \gg N$ 时，(8) 式成为

$$\frac{2D_n}{1+b} \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{p}{\tau}. \quad (9)$$

第二种情况，当 $p \ll N$ 时，(8) 式成为

$$\frac{D_n}{b} \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{p}{\tau}. \quad (10)$$

上面 (9), (10) 两式可以统一起来写成

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{p}{L^2}, \quad (11)$$

¹⁾ 如果锗中同时存在着施主和受主杂质，则 N 应该是离化施主杂质的密度减去离化受主杂质的密度。

其中

$$L = \begin{cases} \sqrt{\frac{2D_n\tau}{1+b}} & \text{当 } p \gg N, \\ \sqrt{\frac{D_n\tau}{b}} & \text{当 } p \ll N. \end{cases} \quad (12)$$

現在讓我們假定少数載流者(空穴)密度的边界条件是

$$p = \begin{cases} p_0 & \text{当 } x=0, \\ p_w & \text{当 } x=w, \end{cases} \quad (13)$$

則滿足上述边界条件的(11)式的解是

$$p = \frac{p_0 \sinh(\omega - z) + p_w \sinh z}{\sinh \omega}, \quad (14)$$

其中 $\omega = \frac{w}{L}$, $z = \frac{x}{L}$.

从(11)式还可以得到 $\frac{dp}{dx}$ 和 p 之間的关系:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{L} \sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}, \quad (15)$$

其中 p_0' 是 $\frac{dp}{dx}$ 在 $x=0$ 处的值¹⁾. 上式也可以写成

$$-\frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} = dz. \quad (16)$$

上面已經把两种極端情况討論过, 現在我們要討論一般情况下(8)式的解. 先將(8)式兩边对 x 积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{(2p+N)D_n}{(1+b)p+bN} \frac{dp}{dx} - \frac{Ip}{(1+b)p+bN} - \frac{(2p_0+N)D_n}{(1+b)p_0+bN} p_0' + \frac{Ip_0}{(1+b)p_0+bN} = \\ = \frac{1}{\tau} \int_0^x p \, dx. \end{aligned} \quad (17)$$

上式左边第一第二兩項是代表在 x 处的空穴电流密度 I_p , 第三第四兩項是代表在 $x=0$ 处的空穴电流密度. 这两电流密度之差是等于从 0 到 x 之間每秒复合的空穴数 $\frac{1}{\tau} \int_0^x p \, dx$. 这个数值在一般的晶体三極管中是不大的, Rittner 就把这一項略去了. 我們現在將以 $p \gg N$ 的極端情况作为零級近似解, 由此計算出这一項与 p , p_0 和 p_0' 的关系, 从(16)式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^x p \, dx &\approx -\frac{L}{\tau} \int_{p_0}^p \frac{p \, dp}{\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} = \\ &= -\frac{L}{\tau} (\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2} - |Lp_0'|). \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $L = \sqrt{\frac{2D_n\tau}{1+b}}$, p_0' 是一个未确定的常数, 待微分方程的解得到后, 校准 p_0' 使它等于 $\frac{dp}{dx}$ 在 $x=0$ 处之值. 从上式还可以看到, 当 $(Lp_0')^2 \gg p_0^2 - p^2$ 时(在晶体三極管中, 这条件是往

¹⁾ 这里我們假定 $\frac{dp}{dx} < 0$, 因此在根号前取了負号. 我們可以得到同样的最后結果, 如果我們假定 $\frac{dp}{dx} > 0$ 而在根号前取正号.

往滿足的), 我們得

$$\frac{1}{\tau} \int_0^x p dx \approx \frac{p_0^2 - p^2}{2\tau |p_0'|}.$$

上式的右边并不包含 L . 但从(12)式可以知道, 小注射情形和大注射情形的区别只在于 L 之值不同, 因此这样的近似解应该不仅适用于大注射情形, 同样也适用于小注射情形.

將(18)式代入(17)式并經過整理后得

$$-\frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} = \frac{dx}{L} \left\{ \frac{(1+b)p + bN}{(1+b)\left(p + \frac{N}{2}\right)} + \frac{[H(1+b) - I]pL + HbNL}{2D_n\left(p + \frac{N}{2}\right)\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} \right\}, \quad (19)$$

其中 H 为一常数:

$$H = \frac{I p_0}{(1+b)p_0 + bN} + p_0' \frac{(b-1)ND_n}{(1+b)[(1+b)p_0 + bN]}. \quad (20)$$

現在讓我們变换变数, 使

$$dz' = \frac{dx}{L} \left\{ \frac{(1+b)p + bN}{(1+b)\left(p + \frac{N}{2}\right)} + \frac{[H(1+b) - I]pL + HbNL}{2D_n\left(p + \frac{N}{2}\right)\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} \right\}, \quad (21)$$

并且当 $x=0$ 时令 $z'=0$, 則(19)式成为

$$-\frac{dp}{\sqrt{p^2 - p_0^2 + (Lp_0')^2}} = dz'. \quad (22)$$

以上式和(16)式相比, 不难知道上式能滿足边界条件(13)的解应该是

$$p = \frac{p_0 \sinh(\omega' - z') + p_w \sinh z'}{\sinh \omega'}, \quad (23)$$

其中 ω' 是当 $x=w$ 时的 z' 之值.

为了求出在 $x=0$ 处注入的空穴电流密度 I_p^0 , 我們需要先求得在 $x=0$ 处的 $\frac{dp}{dx}$. 我們不难証明, 当 $x=0$ 时(也就是 $p=p_0$ 时), (21)式右边括弧內的数值等于 1, 因此得

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{L}. \quad (24)$$

由此得

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{dp}{dz'}\right)_{x=0} \left(\frac{dz'}{dx}\right)_{x=0} = \frac{-p_0 \cosh \omega' + p_w}{L \sinh \omega'}. \quad (25)$$

將上式代入(7)式, 得

$$I_p^0 = \frac{I p_0}{(1+b)p_0 + bN} + \frac{(2p_0 + N)D_n}{(1+b)p_0 + bN} \left(\frac{p_0 \cosh \omega' - p_w}{L \sinh \omega'}\right). \quad (26)$$

令 I_n^0 代表流过 $x=0$ 处的电子电流密度; $A = \frac{N}{2p_0}$ 代表 n -型锗原有电子密度与在 $x=0$ 处注入空穴密度的兩倍之比, 則(26)式又可改写为

$$I_p^0 = \frac{I_n^0}{b(1+2A)} + \frac{2D_n(1+A)}{b(1+2A)} \left(\frac{p_0 \cosh \omega' - p_w}{L \sinh \omega'}\right). \quad (27)$$

現在, 求 I_p^0 的問題已归結为求 ω' 的問題.

为了解决这个问题，我們應該利用(21)式找出 z' 与 x 之間的依賴关系。我們不难証明，在 $p \gg N$ 和 $p \ll N$ 两种極端情况下，(21)式右边括弧內的数值都趋于 1，而(21)式就成为

$$dz' = \frac{dx}{L} = dz \quad \text{或} \quad z' = z. \quad (28)$$

上式可以作为(21)式的零級近似解，將它代入(23)式，得

$$p = \frac{p_0 \sinh(\omega - z) + p_w \sinh z}{\sinh \omega}. \quad (29)$$

將上面的零級近似解再代入(21)式右边的括弧內，我們得到(21)式的一級近似解：

$$\begin{aligned} z' = z + & \frac{N}{2} \left(\frac{b-1}{b+1} \right) \frac{1}{R(Q-P)} \ln \left| \frac{(e^z - P)(1-Q)}{(e^z - Q)(1-P)} \right| + \\ & + \frac{LN}{4D_n \Delta} \left[H(b-1) + I \right] \ln \frac{\left(-R + \frac{N}{2} + S \right) (Re^{2z} + S)}{\left(-Re^{2z} + \frac{N}{2} e^z + S \right) (R+S)} + \\ & + \frac{L}{2D_n \Delta} \left\{ 4RS [H(1+b) - I] + \frac{HbN^2}{2} \right\} \frac{1}{\sqrt{RS}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{RS}(e^z - 1)}{Re^z + S}, \quad (30) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \frac{p_0 e^{-\omega} - p_w}{2 \sinh \omega}, \quad S = \frac{p_0 e^{\omega} - p_w}{2 \sinh \omega}, \\ \Delta &= \frac{N^2}{4} + 4RS, \quad Q = \frac{1}{2R} \left(\frac{N}{2} + \sqrt{\Delta} \right), \quad P = \frac{1}{2R} \left(\frac{N}{2} - \sqrt{\Delta} \right). \end{aligned}$$

(30)式給出了 z' 与 z 的关系。如果使(30)式中的 $z = \omega$ ，則我們就可以求得 ω' 。为計算簡單起見，我們將假定在 $x = w$ 处的空穴密度 p_w 为 零。

这样以 ω 代 z ，(30)式可以簡化为

$$\begin{aligned} \omega' = \omega + & \left(\frac{b-1}{b+1} \right) \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \ln \left| \frac{(1-e^\omega)(1+\sqrt{1+B^2}) - B(1+e^\omega)}{(1-e^\omega)(1-\sqrt{1+B^2}) - B(1+e^\omega)} \right| + \\ & + \frac{L}{D_n N} \frac{B^2}{1+B^2} \left[H(b-1) + I \right] \ln \frac{1 + \frac{1}{A}}{\cosh \omega} + \\ & + \frac{2L}{D_n N} \frac{B}{1+B^2} [H(1+b) - I + 2HbB^2] \tan^{-1} \frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1}, \quad (31) \end{aligned}$$

其中

$$B = \frac{N}{2p_0} \sinh \omega = A \sinh \omega.$$

我們可以利用(31)式先求得 ω' ，然后代入(27)式求出注入的空穴电流密度 I_p^0 。在求 ω' 时，(31)式中的 I 值應該由边界条件来决定。

四. 半导体放大器的注射效率

在半导体放大器中，基板的厚度一般要比少数載流者的扩散長度小得多，因此在这里我們可以假定 $\omega \ll 1$ 。放大器的發射極的电导率总要比基板的大得多，因此發射極中少数載流者的电流在任何情况下基本上都是扩散电流。設發射極內靠近 $p-n$ 結处电子的密度

为 n_e , 而远离 p - n 結处电子的密度为 n_0 , 則通过發射結的电子电流密度应为

$$I_n^0 = D_n \frac{n_e - n_0}{L_0}, \quad (32)$$

其中 L_0 是發射極中电子的扩散長度. 为了要求得 n_e , 我們先考虑靠近發射結兩边的电子密度 n_0 和 n_e 之比. 当發射結处于热平衡而没有电流通过时, 我們应该有

$$\frac{n_0}{n_e} = e^{eV}, \quad (33)$$

其中 V 代表在發射結兩边的电势差. 当热平衡时, 这电势差也就等于两种类型半导体之間的接触势差. Kleinman^[13]指出, 当發射結空間电荷層的厚度比起电子在發射極中的扩散長度来要小得多时, 在有电流通过的情况下, (33)式依旧可以近似地成立. 但是, 这时在發射結兩边的电势差 V 应该是等于两种类型半导体之間的接触电势差减去在發射結上外加的正向电压. 对空穴来講, 我們也应该有相应于(33)式的关系¹⁾:

$$\frac{p_e}{p_0} = e^{eV}, \quad (34)$$

其中 p_e 是發射極內靠近 p - n 結处空穴的密度.

由于發射極內远离 p - n 結处空穴的密度 p_0 本身就很大, 因此 $p_e \approx p_0$. 由(33)和(34)式得

$$n_e = \frac{p_0 n_0}{p_e} \approx \frac{p_0 (p_0 + N)}{p_0}. \quad (35)$$

將上式代入(32)式并忽略 n_0 , 得

$$I_n^0 = \frac{D_n}{L_0} \frac{p_0 (p_0 + N)}{p_0} = \frac{D_n N^2}{4L_0 p_0} \frac{1 + 2A}{A^2}. \quad (36)$$

从(27)和(36)式得(注意 $p_w = 0$)

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{I_p^0}{I_n^0} = \frac{1}{b(1 + 2A)} + \frac{\sigma_e L_0}{\sigma_b w} \frac{4A(1 + A)}{(1 + 2A)^2} \frac{\omega}{\tanh \omega'}, \quad (37)$$

其中 γ 就是發射極的注射效率; $\sigma_e = e\mu_p p_0$ 是發射極的电导率; $\sigma_b = e\mu_n N$ 是基板的电导率; 而 w 在这里就代表基板的厚度.

要明显地求出注射效率 γ 与 A 的关系, 我們必須利用(31)式来求 ω' . 这里的 I 我們用下式代入:

$$I = I_n^0 + I_p^0 \approx \frac{D_n N^2}{4L_0 p_0} \frac{1 + b + 2bA}{bA^2} + \frac{2D_n(1 + A)}{b(1 + 2A)} \frac{p_0 \cosh \omega}{L \sinh \omega}. \quad (38)$$

現在如果我們考虑到在半导体放大器中 $\omega \ll 1$, 因而忽略 ω^2 以上各項, 則由(31)式不难証明:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 + A}{1 + 2A} \left\{ 1 + A \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) \right\} + \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_0} \frac{1}{2b} \left[(1 + A) \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) - 1 \right]. \quad (39)$$

將上式代入(37)式, 得

$$\gamma = \frac{1 + \frac{1}{b(1 + 2A)} X}{1 + \frac{1 + b + 2bA}{b(1 + 2A)} X}, \quad (40)$$

1) 这里我們需要假设發射結空間电荷層的厚度比基板的厚度小得多.

其中

$$X = \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \frac{1+2A}{4A} \left[1 + A \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) \right] + \left(\frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \right)^2 \frac{(1+2A)^2}{8bA(1+A)} \left[(1+A) \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) - 1 \right]. \quad (41)$$

在計算得到(40)式的过程中，我們有三处用了大注射情况下的解作为零級近似。第一，在計算复合項时用了近似解(18)；第二，在計算 z' 与 z 的关系时用了近似解(29)；第三，在計算 ω' 与 ω 的关系时用了近似解(38)。前面已經說过，近似解(18)不仅适用于大注射情形，同样也适用于小注射情形。对近似解(29)和(38)來說，由于从(21)式可以証明当 $p \ll N$ 时， $z' = z$ ；因而它們也应该同样适用于小注射情形。所以，計算的最后結果(40)式应该不仅适用于大注射情形，也适用于小注射情形。

现在分几个情况来討論。第一种情况假設 $\frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \ll 1$ 而 $A \gg \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e}$ ，这相应于一个良好的半导体放大器在發射極电流不是太大的情况下。这时 $X \ll 1$ ，因此(40)式可以簡化成

$$\gamma \approx 1 - X \approx 1 - \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \frac{1+2A}{4A} \left[1 + A \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) \right]. \quad (42)$$

圖 1 中表明 (42) 式的結果和 Webster 的結果的比較。圖中的縱坐标代表 $\frac{1-\gamma}{1-\gamma_0}$ ，其中

$\gamma_0 = 1 - \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e}$ 是小訊号注射时的注射效率；橫坐标代表注射强度 $\frac{1}{2A} = \frac{p_0}{N}$ ，也就是注入空

穴密度和基板中原有电子密度之比。从圖中可以看到，Webster 的結果是过分地估計了

注射强度对注射效率的影响，在

比較大的注射强度下，Webster

得到的 $\frac{1-\gamma}{1-\gamma_0}$ 比实际的大了一

倍。

第二种情况是設 $A \rightarrow 0$ 。这相应于極大的發射極电流，这时

$X \rightarrow \infty$ ，因此由(40)式得

$$\gamma \rightarrow \frac{1}{1+b}. \quad (43)$$

这結果和 Толпыго 和 Заславская

所得的結果相同。这时 γ 有一个

極限值是因为在極大的發射極电

流的情况下，基板中的电流主要是

迁移电流，而对迁移电流來說，

当电子和空穴的密度几乎相等时

电子电流和空穴电流之比应该等

于 b 。

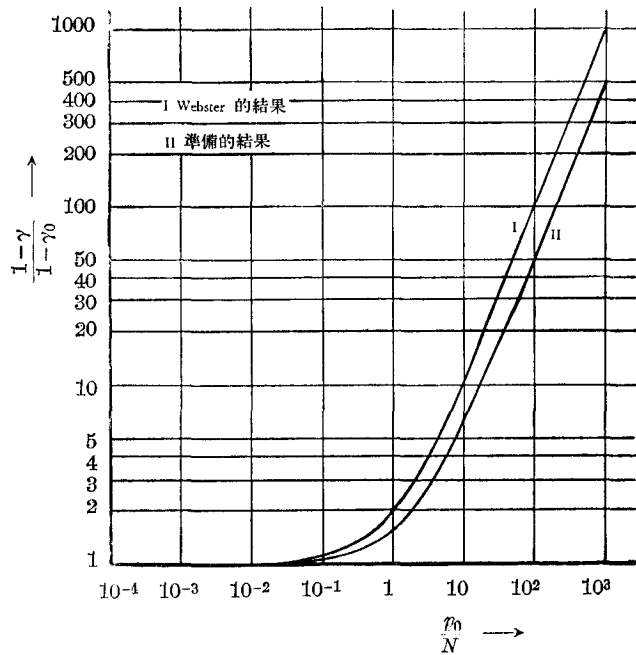


圖 1.

第三种情况是設 $\frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \gg 2bA \gg 1$ 。这相应于注射效率很差的發射結在注射强度相当

低的情况下¹⁾, 这时 $X \gg \frac{1}{b(1+2A)}$ $X \gg 1$, 因此(40)式可简化成

$$\gamma \approx \frac{1}{2bA} \propto \frac{p_0}{N}. \quad (44)$$

上式表明这时注射效率 γ 正比于注射强度 $\frac{p_0}{N}$.

第四种情况相应于一般物理实验中在样品上所作的发射极, 这种发射极的注射效率都是很低的, 但由于样品很长, 因此这时 $\omega \gg 1$. 这种情况的分析可以把(37)式改写成

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{b(1+2A)} + \frac{\sigma_e L_e}{\sigma_b L} \frac{4A(1+A)}{(1+2A)^2} \frac{1}{\tanh \omega'}, \quad (45)$$

因这时的 $\omega' \gg 1$ 而 $\tanh \omega' \approx 1$; 如果这个发射极的注射效率很低, 同时假定注射强度相当小, 即 $\frac{\sigma_b L}{\sigma_e L_e} \gg 2bA \gg 1$, 则我们可得

$$\gamma \approx \frac{\gamma}{1-\gamma} \approx \frac{1}{2bA} \propto \frac{p_0}{N}. \quad (46)$$

这结果与(44)式一样²⁾, γ 也是和注射强度 $\frac{p_0}{N}$ 成正比.

图2是根据(40)式表明在各种不同的 $\frac{\sigma_b \omega}{\sigma_e L_e}$ 数值下, γ 随注射强度 $\frac{p_0}{N}$ 的变化. 这

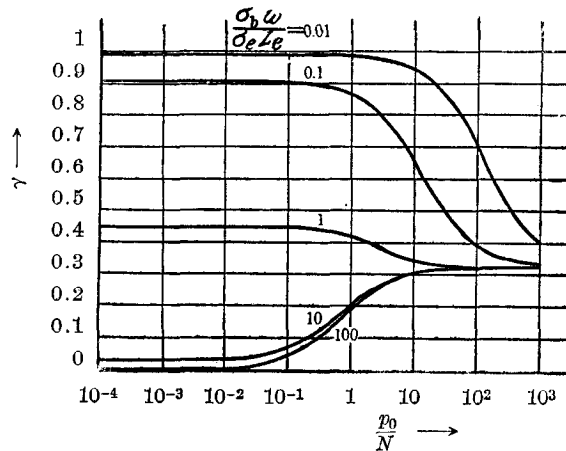


图 2.

里我们假定 $b = 2.1$.

现在让我们来讨论一下流过发射极的总电流密度 I 与注射强度的关系. 从(27)式和(36)式得

$$\begin{aligned} I &= I_n^0 + I_p^0 = \\ &= \frac{D_n N^2}{4L_e p_e} \frac{1+b+2bA}{bA^2} + \\ &+ \frac{2D_n(1+A)}{b(1+2A)} \frac{p_0 \cosh \omega'}{L \sinh \omega'}. \end{aligned} \quad (47)$$

令

$$I^* = \frac{D_n N^2}{L_e p_e} = \frac{N^2}{n_i^2} I_{ns}, \quad (48)$$

其中 I_{ns} 为流过发射极的饱和电子电流密度; n_i 为本征半导体内的自由电子密度. 由(47), (48)两式不难得到

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+b+2bA}{4bA^2} + \frac{\sigma_e L_e}{\sigma_b \omega} \frac{1+A}{A(1+2A)} \frac{\omega}{\tanh \omega'}. \quad (49)$$

¹⁾ 在这种情况下, 为了保持(35)式的近似关系不被破坏, 我们必须有 $\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_e}\right)^2 \ll 2b^2A$. 把这条件与另一条件 $\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_e}\right)\left(\frac{w}{L_e}\right) \gg 2bA$ 结合起来看, 我们可得同时满足这两条件的必要条件是 $\frac{w}{L_e} \gg \sqrt{2A}$, 但这并不是充分的条件. 在实际情况中, 若 $\frac{\sigma_b}{\sigma_e}$ 为 10^{-1} 的数量级, 则 $\frac{w}{L_e}$ 必须 $\gg 20bA$, 这说明 L_e 必须比 w 小得很多.

²⁾ 这里要保持(35)式不被破坏的条件变成 L_e 必须比 L 小得很多.

如果我們假定 $\omega \ll 1$ 而忽略 ω^2 以上各項，再利用(39)式，則得

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+2A}{4A^2} \left[1 + \frac{1}{b(1+2A)} + \frac{1}{X} \right], \quad (50)$$

其中 X 仍代表(41)式右边各項。

現在仍舊按上述的四種情況分別討論。在第一種情況下， $X \ll 1$ ，(50)式成為

$$\frac{I}{I^*} \approx \frac{1+2A}{4A^2} \frac{1}{X} \approx \frac{\sigma_c L_c}{\sigma_b w} \frac{1}{A \left[1 + A \ln \left(1 + \frac{1}{A} \right) \right]}. \quad (51)$$

圖3表明在這種情況下總電流密度 I 與注射強度 $\frac{p_0}{N}$ 的關係。由圖中可以看出，在小的注射強度下，總電流密度基本上是和注射強度成正比的。這是因為在小注射強度下基板中的電流主要是擴散電流，而擴散電流是正比於注射強度的。

在第二種情況下， $A \rightarrow 0$ 而 $X \rightarrow \infty$ ，因此我們得到

$$\frac{I}{I^*} \rightarrow \frac{1}{4A^2}. \quad (52)$$

上式表明在極大的注射強度下， I 正比於注射強度 $\frac{p_0}{N}$ 的平方。這是因為在極大的注射強度下，基板中的電流主要是遷移電流。組成這遷移電流的電子電流和空穴電流兩部分之比是一定的，因此總電流也就正比於基板中的電子電流。這電子電流又正比於發射極內靠近 $p-n$ 結處的電子密度 n_e 。根據(35)式這電子密度 n_e 正比於 $p_0(p_0 + N)$ 。當 $p_0 \gg N$ 時，它就正比於注射強度的平方。

在第三種情況下， $A \gg 1$ ， $X \gg 1$ ，(50)式可寫成

$$\frac{I}{I^*} \approx \frac{1}{2A} = \frac{p_0}{N}. \quad (53)$$

這時 I 也是正比於 $\frac{p_0}{N}$ 。

在第四種情況下，由於 $\omega \gg 1$ ，我們把(49)式寫成

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+b+2bA}{4bA^2} + \frac{\sigma_c L_c}{\sigma_b L} \frac{1+A}{A(1+2A)} \frac{1}{\tanh \omega'}. \quad (54)$$

假定 $\frac{\sigma_c L_c}{\sigma_b L} \ll 1$ 和 $A \gg 1$ ，又考慮到 $\tanh \omega' \approx 1$ ，則我們得到和(53)式同樣的結果。

在第三第四兩種情況下， γ 正比於注射強度而 I 也正比於注射強度，因此 γ 正比於 I 。這可能解釋 Many 所觀察到的注射效率正比於通過 $p-n$ 結的總電流的現象。這現象的發生可以這樣來理解，在注射效率十分低的發射結的情況下，基板中的電流主要都是遷

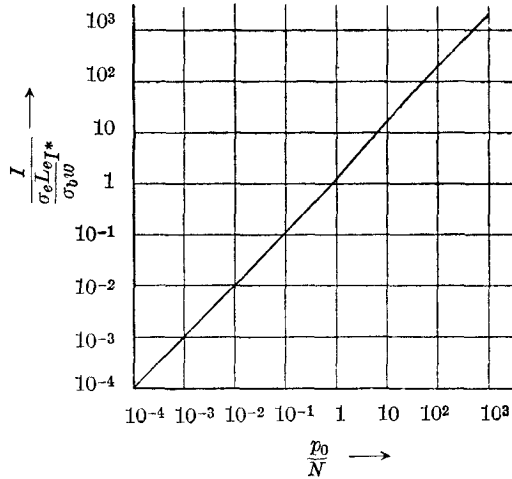


圖 3.

移电流¹⁾，如前所述的，基板中的电子电流是正比于 $p_0(p_0+N)$ ，而在 $p_0 \ll N$ 的情况下，就正比于 p_0 。基板中的空穴电流(主要也是迁移电流)是正比于空穴密度与电場强度的乘积，而这电場强度却正比于基板中的电子电流，亦即正比于 p_0 ；因此空穴电流就正比于 p_0^2 。这样注射效率就正比于电子电流或总电流。现在再讨论注射强度不是相当小的情况，只要注射强度不是太大，而使(50)和(54)式中含有 $\frac{\sigma_e L_0}{\sigma_b w}$ 或 $\frac{\sigma_e L_0}{\sigma_b L}$ 的项仍旧可以忽略的话，我们可以得到

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+b+2bA}{4bA^2}. \quad (55)$$

在这种情况下，注射效率 γ 是

$$\gamma = \frac{1}{1+b+2bA}. \quad (56)$$

从(55)，(56)两式中消去 A ，得

$$\frac{I}{I^*} = \frac{b\gamma}{[1-(1+b)\gamma]^2}. \quad (57)$$

图4表示上式中 I 与 γ 的关系。从图中可以看到，当 $\gamma < 0.03$ 时， I 基本上是和 γ 成正比的。

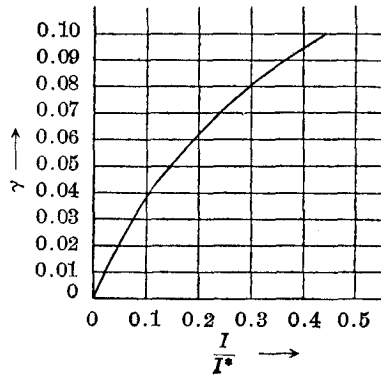


图 4.

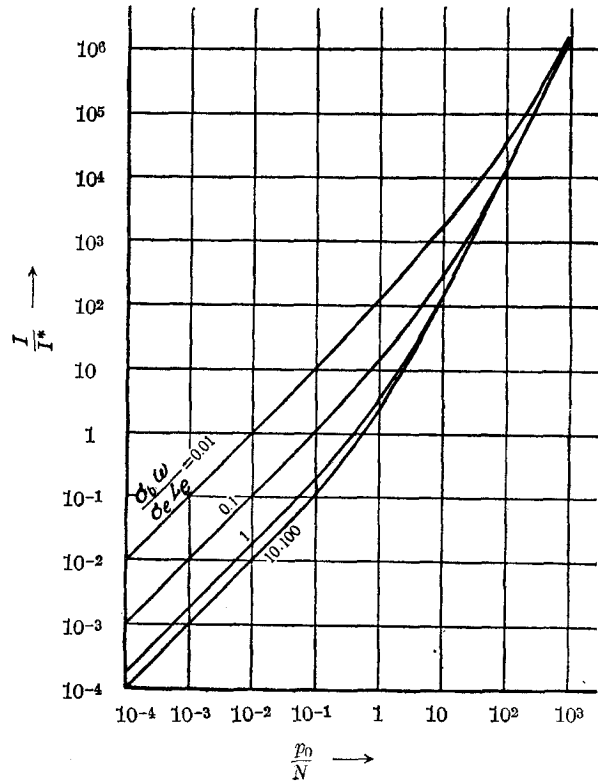


图 5.

1) 在晶体三极管里，我们不难证明基板中少数载流者的扩散电流与迁移电流之比是 $\frac{\sigma_e L_0}{\sigma_b w} \frac{4bA^2}{1+2A}$ 。当 $\frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_0} \gg 2bA$ 时，上述比值 $\ll 1$ 。

圖 5 是根据 (50) 式表明在各种不同的 $\frac{\sigma_b w}{\sigma_c L_e}$ 数值下, 总电流密度 I 与注射强度間的关系. 將 (40) 式和 (50) 式合并起来, 可以得到如圖 6 所示的、在各种不同的 $\frac{\sigma_b w}{\sigma_c L_e}$ 数值下, γ 与总电流密度 I 間的关系. 从圖 5 可以看到, 在注射强度 $\frac{p_0}{N}$ 小的时候, I 与注射强度成正比 (曲綫的斜率是 1); 在注射强度大的时候, I 与注射强度的平方成正比 (曲綫的斜率是 2). 从圖 6 可以看到, 对一般合金結晶体三極管來說 (γ_0 在 0.95 以上), γ 降落到 0.5 所要求的电流总是在 I^* 的 10000 倍以上. 在一般合金結晶体管中, I_{ns} 大約是微安的数量級, 如果 $\frac{N^2}{n_i^2}$ 当作 1000, 那末使 γ 降落到 0.5 所需的發射極电流总是在 10 倍以上.

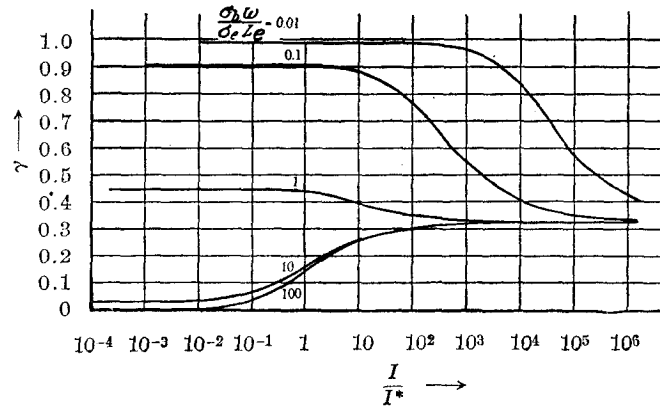


圖 6.

五. 結 語

总起来說, 上述理論所得的結論可归結为下列三点:

(1) 在一个一般的合金結晶体三極管里, 發射極的注射效率应该随着發射極电流的增加而逐漸降低. 在發射極电流非常大的时候, 注射效率应该趋近于 $\frac{1}{1+b}$.

(2) 在一个注射效率十分低的 $p-n$ 合金結中, 当注射电流很小时, 注射效率应该与流过 $p-n$ 結的总电流成正比; 当注射电流很大时, 注射效率应该趋近于 $\frac{1}{1+b}$.

(3) 在注射强度很小时, 流过 $p-n$ 結的总电流应该与注射强度成正比. 在注射强度很大时, 流过 $p-n$ 結的总电流应该与注射强度的平方成正比.

参 考 文 献

- [1] Bardeen, J. and Brattain, W. H., *Phys. Rev.* **74** (1948), 230.
- [2] Shockley, W., *Bell System Tech. J.* **28** (1949), 435.
- [3] Shockley, W., Sparks, M. and Teal, G. K., *Phys. Rev.* **83** (1951), 151.
- [4] Webster, W. M., *Proc. of I. R. E.* **42** (1954), 914.
- [5] Rittner, E. S., *Phys. Rev.* **94** (1954), 1161.
- [6] Misakaya, T., *J. Phys. Soc. Japan* **10** (1955), 362.

- [7] Толпыго, К. Б. и Заславская, И. Г., *ЖТФ* **25** (1955), 955.
[8] Толпыго, К. Б., *ЖТФ* **26** (1956), 293.
[9] Many, A., *Proc. Phys. Soc.* **67B** (1954), 9.
[10] Shockley, W. and Read, W. T., Jr., *Phys. Rev.* **87** (1952), 835.
[11] Armstrong, L. D., Carlson, C. L. and Bentivegna, M., *RCA Rev.* **17** (1956), 37.
[12] Herring, C., *Bell System Tech. J.* **28** (1949), 401.
[13] Kleinman, D. A., *Bell System Tech. J.* **35** (1956), 635.

ON THE THEORY OF INJECTION OF MINORITY CARRIERS IN p - n ALLOY JUNCTIONS

WANG SHOU-WU

(*Institute of Applied Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A general theory of injection of minority carriers in p - n alloy junctions was developed by using one-dimensional model. It was assumed that the recombination rate is proportional to the density of injected carriers. Two extreme cases of low injection levels and high injection levels were first considered, and the result of which was then used as the zero-order approximation in calculating the distribution of the injected minority carriers in p - n junctions. By the method of successive approximation, an analytical expression for the relationship between the injection efficiency and the injection level (i. e. the ratio of the density of injected minority carriers to that of original majority carriers) was obtained. A similar expression for the relationship between the total current density flowing through the junction and the injection level was developed on the same basis. The results of the present theory show that for an ordinary alloy junction transistor, the injection efficiency of the emitter decreases gradually as the emitter current increases. At very high injection levels, the injection efficiency approaches a limiting value of $\frac{1}{1+b}$, where b is the ratio of electron mobility to hole mobility. For a p - n alloy junction with very low injection efficiency, the injection efficiency is proportional to the total current flowing through the junction when the injection current is small, and it approaches a limiting value of $\frac{1}{1+b}$ as the injection current becomes very large. It was also shown that for low injection levels, the total current flowing through a p - n alloy junction is proportional to the injection level, while for high injection levels, it is proportional to the square of the injection level.