第14卷 第1期　　物　理　学　报　　Vol. 14, No. 1
1958年1月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Jan., 1958

塑压接触平面上之長程滑动与短程滑动（等傾陡綫規律）*

刘　叔　仪

（中国科学院，冶金陶瓷研究所）

提　要

塑压接触面之質点滑动綫称“摩擦綫”．滑动現象有兩种基本类型，一为“長程滑动”，摩擦綫为質点之長程連續軌跡，如抽拔，挤压，冲压等塑性过程中之滑动；一为“短程滑动”，質点仅在摩擦綫上滑动一微小距离[1]，如鍛，軋，压力実驗等过程中之滑动（小压縮时）．

过去对这兩种滑动現象之規律未曾分別处理．本文將摩擦力按純力学关系視为一切应力，即压应力 p 与摩擦应力 τ，以边界平衡关系，相系于一应力函数 F：

$$\tau=Fp,$$

$$F=\sqrt{\frac{(l_1^2p_1^2+l_2^2p_2^2+l_3^2p_3^2)}{(l_1^2p_1+l_2^2p_2+l_3^2p_3)^2}-1},$$

p_1, p_2, p_3 为內部主应力；l_1, l_2, l_3 为 p 对 p_1, p_2, p_3 之夾角余弦．除視 τ 为 p 之函数 $\tau=\tau(p)$ 外，对摩摩力之物理性質不作規定．

在此基础上，以任意質点滑动之最小摩阻功为基本条件分析滑向規律，一如任意質点滑动之最小摩阻力条件之于“陡綫規律”[1-8]．如此，則問題类于古典变分問題，变分方程引出兩結論：在短程滑动中，滑向規律为已知之陡綫規律；在長程滑动中为以下將提出之“等傾陡綫規律”．并得到几个有关重要推論．

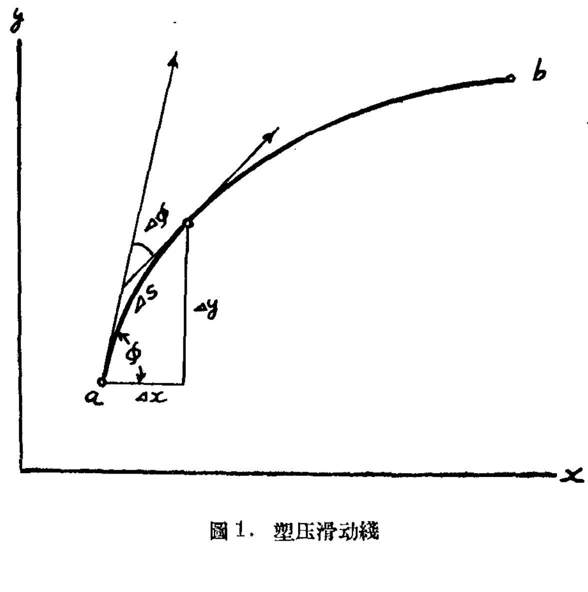

圖 1. 塑压滑动綫

一．平面摩擦綫之变分理論

如圖 1，当一任意微小單位面积在摩擦力（τ）之作用下，由始点 a 滑

---

* 1956年6月25日收到．

1) 可以指这种短程滑动，但一般指“瞬时摩擦綫”．

至終点 b 时，τ 所作之功(W)为：

$$W=\int_a^b \tau(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{1}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\tan\varphi;\quad \varphi=\tau \text{ 对 } x \text{ 軸之傾角}.$$

最小功条件要求 W 之一級变分(δW)为零：

$$\delta W=0. \tag{2}$$

在一般变分教材中可查到(2)式运算方法，变分結果給出相应之尤拉方程[1)]：

$$(1+y'^2)\left[\frac{\partial\tau}{\partial y}-y'\frac{\partial\tau}{\partial x}\right]-\tau y''=0. \tag{2a}$$

此为最小功条件(2)之具体表达式，內中有 $1+y'^2\neq 0$ 之实数关系，因而(2a)式(經过 φ 角与 y', y'' 之关系)可作：

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}-\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}=\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=\tau\frac{d\varphi}{dx}. \tag{3}$$

(3)式对于任意質点均成立，基于質点之任意性，(3)式为全接触面上(奇点在外)之摩擦綫微分方程．在短程条件下(3)式給出“陡綫規律”；在長程条件下，給出“等傾陡綫規律”．故(3)式为本文之基本方程．

二．短程滑动之陡綫規律

当質点之全滑程 $\widehat{ab}$ 微小时，$\widehat{ab}$ 弧可代之以 $\overline{ab}$ 弦，則(2a)式中之 $y''\to 0$，亦即(3)式中 $\frac{d\varphi}{dx}$ 項，可略去．于是

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}-\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}=0,$$

此为陡綫規律．

$$\frac{dx}{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)}=\frac{dy}{\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)}, \tag{4}$$

本式意义同下式：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\tau}\parallel\nabla\tau\parallel\nabla p,\\ &\nabla\tau=\frac{d\tau}{dp}\nabla p,\\ &(\text{摩擦綫})\perp(\text{等压綫}).\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

由于 τ 仅为压力陡綫弧長(s，由一滑动奇点始)之函数，并因为 $\boldsymbol{\tau}\parallel\nabla\tau$ 之向量共綫(皆在 s 切綫方向)关系，故 $\boldsymbol{\tau}$ 之值(τ)与 $\nabla\tau$ 之值 $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)$ 仅差一向量長度間之比例函数 $M(s)$：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\tau}{ds}=-M(s)\tau,\\ &\tau(s)=\tau(s_0)e^{-\int_{s_0}^{s}M(s)ds}\quad(s_0=s\text{ 之边値}).\end{aligned}\right\} \tag{4b$^{2)}$}$$

1) 1954 年作者于此間有关科学研究总結[10]报告会上提出此方程．

2) (4b)只是固体摩擦情况．尚有流体摩擦情况，見[10]．

其中符号，基于 s 方向为减阻(最快)方向．(4b) 式为陡綫規律之另一标量方程，按条件，其中 $M(s)$ 为短程滑动之尺度函数．下面將証明，長程滑动中有不同之尺度函数．

三． 長程滑动中之等傾陡綫規律

对于長程滑动，$\widehat{ab}$ 弧程或很長，或伸及全接触平面，φ 角变化不能作一般簡化，(3)式中之后方必須保留．凡 φ 角变化不可略之質点滑动，皆屬"長程滑动"．如此，則(3)式給出 φ 之全微分：

$$d\varphi=\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)dx-\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)dy=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy. \qquad (5)$$

由此讀出 φ 之兩微商：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{-1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

从而証明 φ 之陡度($\nabla\varphi$)与 τ 之共軛陡度($\overline{\nabla\tau}$)共綫：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\varphi&=\frac{1}{\tau}\left[\frac{\partial\tau}{\partial y}\boldsymbol{i}-\frac{\partial\tau}{\partial x}\boldsymbol{j}\right]=\frac{\overline{\nabla\tau}}{\tau},\\ \overline{\nabla}&=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}-\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x}\\ &(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\text{——坐标單位向量}),\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

而 τ 之共軛陡度 ($\overline{\nabla\tau}$) 又与 p 之共軛陡度 ($\overline{\nabla p}$)共綫：

$$\overline{\nabla\tau}=\frac{d\tau}{dp}\overline{\nabla p}.$$

因而 $\nabla\varphi$ 为

$$\nabla\varphi=\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dp}\overline{\nabla p}. \qquad (8)$$

按共軛关系 ($\nabla p\cdot\overline{\nabla p}=0$)，(8)式給出"等傾陡綫規律"：

$$\nabla\varphi\cdot\nabla p=0. \qquad (9)$$

∇p 在 p 之陡綫(s)上，正交于 p 陡綫之綫族为等压綫(命其弧長为 l)．(9)式謂 $\nabla\varphi$ 正交于 p 之陡綫(s)，因而 $\nabla\varphi$ 之方向在等压綫(l)上，故等 φ 綫(τ 之等傾綫)为 l 之正交系，卽 p 之陡綫．因而(9)式描述下列物理意义：

(1) 压力之陡綫(s)为摩擦力之等傾綫(等 φ 綫)；
(2) 等压綫(l)为 φ 之陡綫；　　(9a)

卽摩擦力 τ 之方向在等压綫上变化最快，在压力陡綫上 τ 無方向变化．(9)与(9a)为"等傾陡綫規律"，如圖 2 所示意．

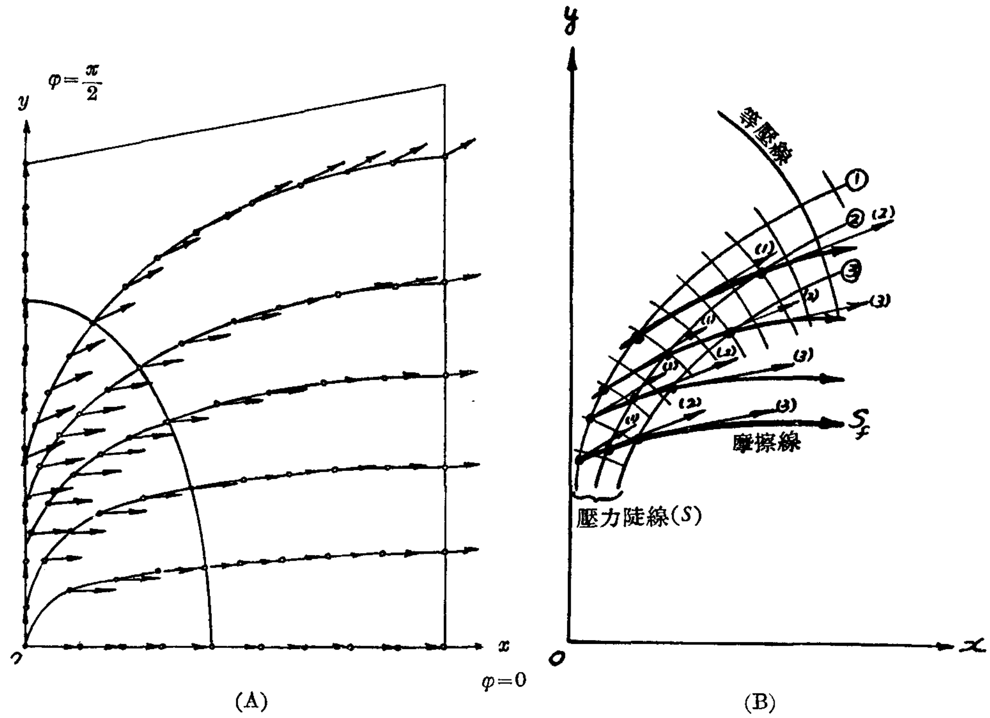

圖 2. 陡綫規律与等傾陡綫規律之比較

四. 等压綫上之φ角变化

按等傾关系，如一等压綫(或圈)上之φ角为已知，则与該等压綫相交之一切压力陡綫上之φ角全知；而等压綫上之φ可按(8)式与向量关系，由曲綫积分算出.

命$\boldsymbol{a}$为等压綫上之單位向量. 向量之方向与$\overline{\nabla p}$同. ∇p与$\overline{\nabla p}$等長，而$\overline{\nabla p}$之正負号待定，故有

$$\overline{\nabla p}=\pm\frac{dp}{ds}\,\mathbf{a}.$$

其中，$\frac{dp}{ds}$为∇p之值. 在(8)中，$\nabla\varphi$之長度为$\frac{d\varphi}{dl}$，故(8)式亦可写作

$$\frac{d\varphi}{dl}\,\mathbf{a}=\pm\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dp}\right)_l\left(\frac{dp}{ds}\right)_l\mathbf{a},$$

“$(\ )_l$”号指在l上取值. 如此卽得下列标量方程：

$$\frac{d\varphi}{dl}=\pm\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dp}\right)_l\left(\frac{dp}{ds}\right)_l.$$

上式可以写成

$$d\varphi=\pm\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dp}\right)_l\left(\frac{dp}{ds}\right)_l dl. \tag{10}$$

由任意起点$(l=l_0)$作曲綫积分，有φ角之計算式如下：

$$\varphi(l)=\varphi(l_0)\pm\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dp}\right)_l\int_{l_0}^{l}\left(\frac{dp}{ds}\right)_l dl \tag{11}$$

在有等压圈之情况下，滑动为發散性，沿等压圈之全長 (L) 將 (10) 式作閉合积分时，φ 角由于滑动之發散性而必須由零增至 2π，故有

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \pm\frac{1}{\tau}\left(\frac{d\tau}{dp}\right)_l \oint \left(\frac{dp}{ds}\right)_l dl$$

或

$$\oint \left(\frac{dp}{ds}\right)_l dl = \pm\frac{2\pi}{\left(\dfrac{d\tau}{dp}\right)_l}\tau, \tag{12}$$

或作中値型

$$\overline{\left(\frac{dp}{ds}\right)_l} = \pm\frac{2\pi}{L\left(\dfrac{d\tau}{dp}\right)_l}\tau. \tag{13}$$

五．摩擦綫上之 φ 角变化

在(5)式中，dx, dy 与 φ 角及摩擦綫弧長 s_f 有下列关系：

$$dx=\cos\varphi\, ds_f;\quad dy=\sin\varphi\, ds_f.$$

代入該式后，有

$$d\varphi=\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial\tau}{\partial x}\sin\varphi\right)ds_f, \tag{14}$$

或作增量型

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial\tau}{\partial x}\sin\varphi\right)\Delta s_f, \tag{14a}$$

其中 φ 已由(11)式給出，故如 τ, $\dfrac{\partial\tau}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\tau}{\partial y}$ 为已知，則摩擦綫亦可由(14a)繪出．

六．压力陡綫上之摩擦力变化

由(7)式

$$\nabla\varphi=\frac{\overline{\nabla\tau}}{\tau} \tag{7}$$

可知，

$$\overline{\nabla\varphi}=-\frac{\nabla\tau}{\tau}. \tag{15}$$

其中 $\overline{\nabla\varphi}$ 与 $\nabla\tau$ 皆在压力陡綫上，故可用 (15) 式計算压力陡綫上之 τ 变化，道理同第四节．

命 $\mathbf{b}$ 为陡綫(s)上之單位向量．因 $\nabla\varphi$ 与 $\overline{\nabla\varphi}$ 兩向量等長，故有下列待定符号之关系：

$$\overline{\nabla\varphi}=\pm\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_s\mathbf{b}.$$

而(15)中之 $\nabla\tau$ 則为

$$\nabla\tau=\frac{d\tau}{ds}\mathbf{b}.$$

由此二式，(15)式作

$$\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_s \mathbf{b} = \pm\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds}\mathbf{b},$$

有

$$\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_s = \pm\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds}.$$

与(4)式相較，取負号，乃有相应之关系

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tau}{ds} = -\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_s \tau, \\ &\tau(s) = \tau(s_0)\, e^{-\int_{s_0}^{s}\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_s ds}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)^{1)}$$

所不同者，在長程情况下，尺度函数$\left(\dfrac{d\varphi}{dl}\right)_s$有具体意义.

七. 圓平面之長滑特殊情况

在此唯一特殊情况下，(16)中之τ分布全部肯定，因为此时

$$s = r = 半徑,\quad l = \varphi r,\quad s_0 = r_0,\quad \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_r = \frac{1}{r},$$

代入(16)后有

$$\tau(r) = \frac{\tau(r_0)\, r_0}{r}. \qquad (17)^{1)}$$

本式表示τ显然具有集中現象. 意义見下节.

八. 討 論

由于$\tau = \tau(p)$之关系不明，故以上結果未肯定压力. 在庫侖摩擦条件下，各結果皆可化为压力关系，但正确度依賴于此条件.

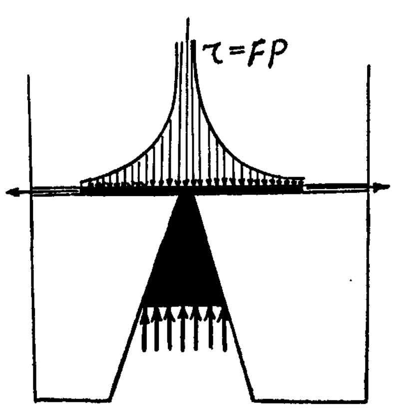

圖 3. 發散長程滑动

短程滑动之摩擦綫族[2]有类于流源之奇点、奇綫，但为"假流源"，質点实在并非由其上流出.

發散性之尖銳長程滑动須有"实流源"，如圖3[1)]中之半徑流动. 除奇点上之数学誇張性外，(17)式基本上描写此类滑动. $\tau(0)\to\infty$的意义，只謂在源附近产生長程滑动，必須克服極大之摩擦力.

在非半徑之發散性長程滑动中，对于庫侖条件，(13)式謂源附近之压力高度集中：

$$\lim_{L\to 0}\overline{\left(\frac{dp}{ds}\right)} = -\infty.$$

摩擦关系虽不明，但可看出發散性之長程滑动發生于高度压力集中条件下.

程度較輕之長程滑动如圖4. 当全金屬进入塑性狀态时，期待一定压力集中与長滑現象，但不構成源点，在不滑动区外，期待(17)式誤差不大.

抽拔过程之長程滑动，無等压圈与压力集中現象.

1) 相应之流体摩擦情况，見[10].

重要的長程滑动过程如：工業挤压，冲压，抽拔．

重要的短程滑动过程如：小压縮之鍛，軋，压力实驗等．

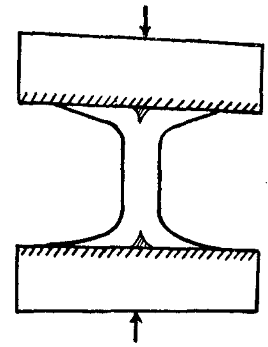
圖 4. 小長程滑动

除本文理論所指出之区别外，摩擦系数不应期待長短程滑动亦为一問題．也許可能用(17)式与压力测定得到点上之 $\frac{\tau}{p}$ 值．

看来，对于摩擦現象，尙应作若干基本的实驗研究．而且本文所述兩种压力加工过程的摩擦問題应分别对待．本文乃为有关实驗研究建立基础．

在本文中，摩擦力被視为一切应力，未对其物理性質作規定．对于摩擦功，只計其力学功而未涉及力学功之热后果．

致謝：本文承北京大学数学力学系王仁教授校閱定稿，并提供宝貴意見，作者敬致謝忱．

校后註：本文按实际需要先后写了三个稿．第一稿卽为本文，第二稿为[10]；流体摩擦情况在[11]中提出，併入[10]．

参 考 文 献

[1] Hoff u. Dall., Grundlagen Des Walzverfahrens, 1950, Dusseldof.
[2] 刘叔仪，鋼院学报，**1**，1955.
[3] 刘叔仪，物理学报，**12** (1956)，41.
[4] 刘叔仪，鋼院学报，**2**，1956.
[5] 刘叔仪，机械工程学报，**4** (1956)，6.
[6] 刘叔仪，摩擦綫理論与平面压力分布之近似总解(未發表)，1955，5.
[7] 刘叔仪，最小摩阻場，物理学报，**14** (1958)，1 頁.
[8] 王美英，軋板摩擦力(分量)分布曲面，鋼鉄学院科学报告会，1956，2.
[9] 北京鋼鉄学院金屬压力加工教研組研究計划，1954，10 (油印).
[10] Liu Shu-i (刘叔仪), Variational theory for frictional slip in the contact plane in plastic compression, accepted by Acta Scientia Sinica, spring 1958.
[11] 本文在 1957 年全国力学学术报告会上的报告印稿.

LONG RANGE AND SHORT RANGE FRICTIONAL SLIP-LINES ON PLANE CONTACT SURFACE IN PLASTIC COMPRESSION

(THE RULE OF ISOCLINIC GRADIENT)

LIU SHU-I

(*Institute of Metallurgy and Ceramics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In the recent years, the theory related to friction-lines has been independently developed both in Europe[1] and here[2-8], according the imformation[1] reached the author in 1956. These investigations are based on the condition of least frictional resistance at a point.

In 1954, a variational equation (2a) on classical basis was given on a meeting for the related research[9]. This equation was based on the frictional work at point. In as much as the condition of least force at a point has became acceptable, there seems no reason to object the condition of least work at a point, that is, the frictional work along the path of an element of area. Thus, the above equation are further investigated in this paper.

For the case of short range slip occuring in processes such as plane forging under small reduction, the last term of this equation is zero, the rule of gradient[1,2] follows. Therefore, the rule of gradient holds only for short range slip or instantaneous friction-lines.

For long range slip, this equation leads to the "rule of isoclinic-gradient", (equation 9), which states that the gradient line of pressure (p) is the isoclinic curve for frictional force τ (Fig. 2). The angle of inclination (φ) changes along the pressure contour according equation (11), and along the friction-line according to equation (14). The function (τ) has the general nature of equation (16). Examples for long range slip is given in Fig. 3 and 4. Continuous divergent long range slip can only be generated by point or line-sourse in extrusion. The singularities in the case of short range slip are not real sourses.

In this analysis, the frictional force is regarded as a shear stress on pure mechanical basis, without assuming its physical nature.

For complete details of the paper, see[10].