

格林函数在計算部分电容中的应用*

林 为 幹

(成都電訊工程學院)

提 要

在工業上和實驗室中，我們都會遇到兩個物體之間的電磁屏蔽的問題。在許多應用中，我們只須注意到兩個物體之間的靜電屏蔽就夠了，因而它們之間的相互作用可以從計算它們之間的相互電容來定出。當干擾物體的尺寸很小因而可以認為是一個點電源時，則當它與另一個接地導體（即問題中的電磁屏蔽）共同存在時所生的效應即可由這一個接地導體的格林函數表出。關於格林函數的知識已有很豐富的積累，因而本文中提出的方法是可以解決多種多樣的問題的。

文中討論了扁橢球坐標和長橢球坐標中的格林函數，並對帶虛數自變數的勒讓特函數的若干個公式作了推導，因為這些有用的公式在流行的文獻中還未見到。

導體表面任意形狀的小孔的問題是值得討論的，特別是有限大導體表面上的小孔問題，本文從理論上驗證了文獻上已經提出來的實驗結果。最後我們給出如下兩個物體之間的相互電容公式：其中一個是在帶小孔的閉合電磁屏蔽體的另一個之內。

一. 引 言

在近代高壓或高頻電的器件的應用中，我們要計算其對其他通訊設備的干擾。在這一類問題中的某一些中，例如，電視機等對無線電接收機的干擾，靜電感應干擾是主要的，為了要計算這種靜電感應干擾，我們可以從干擾源與被干擾器件間的部分電容（或叫相互電容）的計算入手。在實際應用上，干擾電源將會受到這種形式或那種形式的屏蔽。但無論如何，這種屏蔽的尺寸不會是無限大的，也不會是完全密封的；因為在這些干擾電源的屏蔽上還必須裝有散熱用的小窗口或配裝有儀器操作旋扭，熒光幕等小窗口，這些小窗口構成電磁干擾過道，故對外界干擾依然存在。

有限大導體表面（帶有小孔或不帶有小孔）在靜電場所引起效應的這個問題的嚴格解，只有當這個導體表面屬於若干特殊幾何形狀時才是可能的（如小圓盤，帶小孔無限大平面，或橢球體的各种簡併形式等導體在靜電場中所生的影響等），在工程技術應用上，如何應用這些解去解決在具體實踐中的問題是值得我們研究的。本文目的就是在計算部分電容以估計干擾程度這個問題上來推廣現代的處理方法^[1]，並給出較嚴格的討論。本文對於祖國電工技術工作者，特別是其工作與電磁屏蔽問題有關的工作者是有參考價值的。

* 1958年6月2日收到。

二. 格林函数的应用

我們將限于研究如下情况：干扰物体及被干扰物体(如收音机的天綫)的尺寸比之干扰源的运行波長小得多,而且它們之間的距离也比运行波長小得多,故当干扰物体連接于交变电压为 U_1 的电源,而在被干扰物体上所产生的电压为 U_2 时,此 U_2 可以在以下的假設条件下計算出来:(1)干扰物体可以看成是一个点电荷;(2)滞后作用可以略去不計,故靜电场的已知公式可以应用;(3) U_2 值可以取作被干扰物体不存在时、干扰物体在其中心点所在处所生的电位;(4)其他可能出現的物体,如屏蔽用的金屬物体的电位值都算作是零,即算作是接地的。

在这样假設的条件下,我們的問題就变为研究一个点电荷在一个接地导体系統中所产生的电位函数,这就是电磁学上有名的格林函数的研究:在已知接地导体系的几何布置下,一个单独点电荷所生的电位(叫做格林函数)的研究,这个接地系統可以是閉合的,如果不是閉合的,則我們假設在无限远处有一閉合接地导体將整个系統包圍。在电磁学中还証明过:在已知接地导体系的几何布置下,此格林函数是点电荷所在的坐标 (x', y', z') 与观察点坐标 (x, y, z) 的对称函数,这一定理我們以后要应用到。

設在图 1 布置中, I 是帶电的干扰源, \mathcal{Q} 是被干扰物体, \mathcal{S} 是在这个布置中出現的接地导体(如仪器設備中的底座等)。我們要求的是已知干扰源电压为 U_1 时被干扰物体上的电位 U_2 的值。如果 \mathcal{Q} 的体积不大,对整个电场影响不大,則根据本节开头所作的假設,可得到

$$U_2 = q_1 G(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2), \quad (1)$$

其中 $G(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ 是計及接地导体 \mathcal{S} 存在时的格林函数(即單位点电荷在計及导体 \mathcal{S} 存在时所产生的电位)。 (x_1, y_1, z_1) 是干扰源的坐标,而 (x_2, y_2, z_2) 則是被干扰物体中心坐标。再根据部分电容的定义,我們可以写出(見文献[2], § 2.15) I 及 \mathcal{Q} 兩物体的电荷与电位的綫性关系如下:

$$q_1 = C_{11}U_1 + C_{12}U_2, \quad q_2 = C_{12}U_1 + C_{22}U_2,$$

其中 $C_{12} = C_{21}$ 。当物体 \mathcal{Q} 与其他电源或物体隔絕,即 $q_2 = 0$ 时,我們可以得到

$$U_2 = -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} q_1.$$

又如 $C_{11} \gg C_{12}$, $C_{22} \gg C_{12}$, 則得到

$$U_2 \cong -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22}} q_1.$$

將此式与(1)式比較,即得到

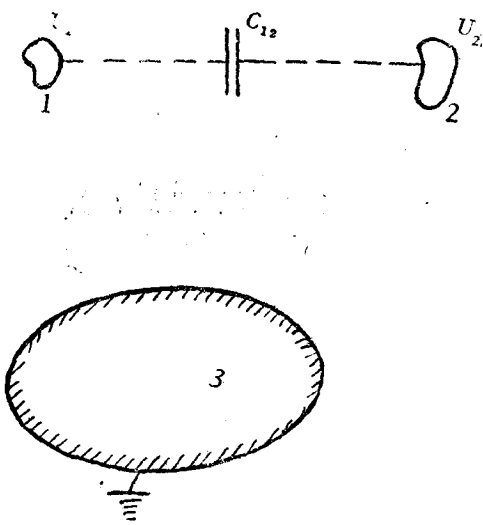


图 1

$$C_{12} = -C_{11}C_{22}G(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2).$$

这里的 C_{11} 是計及物体 \mathcal{B} 存在时物体 \mathcal{I} 对物体 \mathcal{S} 的电容。当物体 \mathcal{B} 不大时，我們又可取 $C_{11} \cong C_1$ ，这里 C_1 是物体 \mathcal{B} 不存在时物体 \mathcal{I} 与物体 \mathcal{S} 間的电容。如果物体 \mathcal{B} 不大，或者 \mathcal{I} 与 \mathcal{S} 間距离相当大时，則 C_1 又可取作物体 \mathcal{I} 孤立时的电容。可以完全同样地处理 C_{22} 。故最后我們得到如下的部分电容的表示式：

$$C_{12} = -C_1C_2G(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2). \quad (2)$$

利用这个式子我們即可以將格林函数的丰富的研究結果用来計算两个物体間的部分电容，从而估計干扰源对其他物体的影响。

三. 扁橢球体坐标中的格林函数的应用

我們將在扁橢球坐标中来求格林函数。一方面因为这样一个格林函数的各种簡併形式的实用价值很大，另一方面也因为关于这一个函数的現有資料是不够丰富的，所以我們希望能在这方面做一些补充。

正如球面坐标是將平面极坐标繞一直徑旋轉得来的，扁橢球体坐标亦可將共焦橢圓坐标繞一短軸旋轉而得到：

$$\left. \begin{aligned} z &= a\xi\eta, & x &= a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\cos\varphi, \\ y &= a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\sin\varphi, \\ r^2 &= x^2+y^2+z^2 = a^2[(\xi^2+1)(1-\eta^2) + \xi^2\eta^2], \\ \rho^2 &= x^2+y^2 = a^2(\xi^2+1)(1-\eta^2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho^2}{\xi^2+1} + \frac{z^2}{\xi^2} &= a^2, \\ \frac{\rho^2}{1-\eta^2} - \frac{z^2}{\eta^2} &= a^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由(4)式可見， $\xi = \text{常数}$ 代表一个扁橢球面，其焦距为 a ，而 $\eta = \text{常数}$ 則代表一个單叶双曲綫旋轉面，故我們的正交曲面坐标可取作 (ξ, η, φ) 。在此坐标系中，拉普拉斯方程变为

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2(\xi^2+\eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2+1)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\xi^2+1-1+\eta^2}{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right] = 0.$$

由(3)式可見，如令 ξ 从 0 变到 ∞ ，則 η 必須从 -1 变到 1；如取 ξ 自 $-\infty$ 变到 $+\infty$ ，則 η 必須取作 $0 \leq \eta \leq 1$ 。如令 $\psi = \Phi(\varphi)X(\xi)H(\eta)$ ，分离变数后得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= -m^2\Phi, \\ \frac{d}{d\xi} \left[(1+\xi^2)\frac{dX}{d\xi} \right] - n(n+1)X + \frac{m^2}{1+\xi^2}X &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2)\frac{dH}{d\eta} \right] + n(n+1)H - \frac{m^2}{1-\eta^2}H &= 0. \end{aligned}$$

其中 m 和 $n(n+1)$ (m, n 是整数) 是分离常数。这三个方程中的第一个，保証电位函数 ψ 是 φ 的單值週期函数，其他两个方程都是副勒讓特方程，故

$$\begin{aligned}\Phi_m &= C \cos m\varphi + D \sin m\varphi, \\ X_{mn} &= A' P_n^m(i\xi) + B' Q_n^m(i\xi), \\ H_{mn} &= AP_n^m(\eta) + BQ_n^m(\eta),\end{aligned}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$. 由(1)可見, $\eta = \pm 1$ 分別相当于正負 z 半軸, 而在 $\eta = \pm 1$ 处, $Q_n^m(\eta)$ 具有对数奇特性, 故如正負半軸包括在研究范围之内, 則必須取 $B=0$. 利用这些椭圆体諧波, 我們可以把点电荷 q 所产生的电位表出如下^[2] [又可見 Morse and Feshbach; Methods of Theoretical Physics (10, 3, 63) 式, 但那里多了一个 2 的因子, 少了一个 i^m 的因子!]:

$$\begin{aligned}\psi &= q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi\epsilon a} \sum_{m=0}^n (i)^{2m+1} \epsilon_m \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos m(\varphi - \varphi_1) P_n^m(\eta_1) P_n^m(\eta) \times \\ &\quad \times \begin{cases} P_n^m(i\xi_1) Q_n^m(i\xi) & \xi > \xi_0, \\ P_n^m(i\xi) Q_n^m(i\xi) & \xi < \xi_0. \end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\epsilon_m = 1, m=0, \epsilon_m = 2, \text{如 } m > 0$. $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$ 是点电荷 q 所在处的坐标, ϵ 是介电常数, 故点电荷与一接地扁椭圆体 $\xi = \xi_a$ 同时存在时的电位函数(格林函数)即取如下形式 ($-1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \xi \leq \infty$):

$$\begin{aligned}G(\xi_1, \eta, \varphi; \xi_1, \eta_1, \varphi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi\epsilon a} \sum_{m=0}^n \epsilon_m i^{2m+1} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos m(\varphi - \varphi_1) \times \\ &\quad \times P_n^m(\eta) P_n^m(\eta_1) \begin{cases} P_n^m(i\xi_1) Q_n^m(i\xi) & \xi > \xi_1 \\ P_n^m(i\xi) Q_n^m(i\xi_1) & \xi < \xi_1. \end{cases} \quad (5)\end{aligned}$$

由(2)式可知, 当干扰物体出现于一接地扁椭圆体 $\xi = \xi_a$ 附近时, 此物体与另一位于 $(\xi_2, \eta_2, \varphi_2)$ 的小物体間的部分电容为

$$C_{12} = C_{12}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2; \xi_1, \eta_1, \varphi_1) = -C_1 C_2 G(\xi_2, \eta_2, \varphi_2; \xi_1, \eta_1, \varphi_1), \quad (6)$$

其中 $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$ 是干扰源位置. (6)式的級数通常收敛得很慢, 但在一些特殊的、有实用价值的情形下也不难处理; 分述如下:

(1) $\xi_a = 0, \eta_2 = \pm 1, \xi_1 \rightarrow \infty$, 此时 $\xi = \xi_a$ 簡併为半径等于 a 的圆盤. 物体 2 則位于圆盤的軸上, 如图 2 所示. 由(3)可知,

$$\xi_1 \rightarrow \frac{r_1}{a}, \quad \eta_1 \rightarrow \cos \theta_1, \quad \xi_2 = z/a.$$

首先, 当 $\eta_2 = \pm 1$ 时, $P_n^m(\pm 1) = 0$, 除非 $m=0$; 又当 $\xi_a = 0$ 时,

$$Q_n(i0) = -i \frac{\pi}{2} P_n(i0),$$

但 $P_n(0) = 0$ 如 n 是奇数, 故当 $\xi_2 < \xi_1$ 时, (5)式变为

$$G(\xi_2, \pm 1, 0; \xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{4\pi\epsilon a} (\pm 1)^n P_n(\eta_1) \{ P_n(i\xi_2) Q_n(i\xi_1) -$$

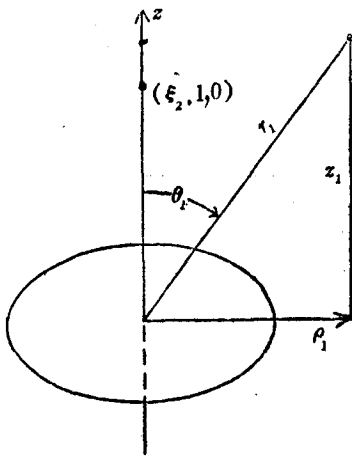


图 2

$$-[1+(-1)^n]Q_n(i\xi_1)Q_n(i\xi_2)\} \xrightarrow{\xi_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp i)^n \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! 4\pi\epsilon a \xi_1^{n+1}} P_n(\eta_1) \times \\ \times \left\{ P_n(i\xi_2) - \frac{2}{\pi} i [1+(-1)^n] Q_n(i\xi_2) \right\}.$$

在上式中,我們已經利用了如下的漸近式(見文獻[2], § 5. 214)的第一項

$$Q_n(i\xi) \rightarrow (-i)^{n+1} 2^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (n+2s)! (n+s)!}{s! (2n+2s+1)!} \xi^{-n-2s-1}.$$

代入(6),可見

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon a} \left\{ \frac{1}{\xi_1} \left[1 - \frac{2}{\pi} \cot^{-1} \xi_2 \right] \mp i \frac{1}{\xi_1^2} \eta_1(i\xi) + O\left(\frac{1}{\xi_1^3}\right) \right\}.$$

如 ξ_2 不大,即 $\xi_2 \ll 1$, 亦即 $z_2 \ll a$, 則利用

$$\cot^{-1} \xi = \frac{\pi}{2} - \xi + O(\xi^3),$$

即得到

$$C_{12}(z_2, 0, 0; z_1, \rho_1, \varphi) = C_1 C_2 \left\{ \frac{z_2/a}{4\pi\epsilon(\rho_1^2 + z_1^2)} + \frac{z_1 z_2}{4\pi\epsilon(\rho_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \right\}.$$

如在球面坐标上表出时, $z_2 = r_2$,

$$C_{12}(r_2, 0, 0; r_1, \theta_1, \varphi_1) = C_1 C_2 \left\{ \frac{r_2/a}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{r_2 \cos \theta_2}{4\pi\epsilon r_1^2} \right\}. \quad (7)$$

(7)式的結果与用比較冗長的方法計算得來的結果^[3]相同, 如 r_2 不太大, 則近似地可得 ($r_2 = z_2 < a$):

$$C_{12} = C_1 C_2 \frac{r_2/a}{4\pi\epsilon r_1}. \quad (8)$$

容易算出, 当圓盤不存在, 兩物体間的距离为 r_1 时, 它們間的部分电容为

$$C_{12}^{(0)} = C_1 C_2 \frac{1}{4\pi\epsilon r_1}.$$

与(8)式比較, 可見, 圓盤在被干扰物体附近出現时(严格說来, 当被干扰物体是位于圓盤軸綫上时), 所得的部分电容值要乘上一个 $r_2/a < 1$ 的因子。又如第二节中所指出的, $G(x, y, z; x', y', z')$ 是 (x, y, z) 和 (x', y', z') 的对称函数, 为了要减低兩物体間的部分电容, 可以將一个导体圓盤放于干扰源附近, 亦可以將此圓盤放于被干扰物体的附近(严格地說, 干扰源或被干扰物体應該放在圓盤的軸綫上)。

(2) $\xi_a = 0, \xi_1 \gg 1, \xi_2 \gg 1$, 此时我們需要 $Q_n^m(i\xi)$ 漸近值, 不难推出如下:

$$Q_n^m(i\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} (-1)^m (-i)^{n+1} \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{1}{\xi^{n+1}}.$$

我們还需要 $Q_n^m(io)$ 的值, 这个值亦不难推出如下:

$$Q_n^m(io) = -i \frac{\pi}{2} P_n^m(io).$$

而且 $P_n^m(io) = 0$, 如 $m+n$ 是奇数。利用这些式子, 即可得到

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon a} \left\{ \frac{1}{\xi_2} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_2 \xi_1} \right\} + \eta_2 \eta_1 \left\{ \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_2 \xi_1} \right\} +$$

$$+ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{(1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2^2)} \left\{ \frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_2 \xi_1} \right\} + \dots$$

$\xi_2 > \xi_1$
 $\xi_1 < \xi_2$

如果只保留 $1/\xi_1$ 和 $1/\xi_2$ 数量级的项, 则上式变为

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2^2} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \dots - \frac{2}{\pi} \frac{a}{r_1 r_2} \quad r_2 > r_1 \right.$$

$$\left. \frac{1}{r_1} + \frac{r_2}{r_1^2} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \dots - \frac{2}{\pi} \frac{a}{r_1 r_2} \quad r_1 > r_2 \right.$$

再利用格林函数的定义(或者直接从上式, 可见前面的级数代表 $\frac{1}{R}$ 的展式), 可得

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon R} - \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2}{\pi} \frac{a}{r_1 r_2} \right),$$

其中 R 是图 3 所示的物体 1 与 2 之间的距离。由 (2) 式, 即得到 ($r_1 \gg a, r_2 \gg a$)

$$C_{12} = -C_1 C_2 \frac{1}{4\pi\epsilon R} \left(1 - \frac{2aR}{\pi r_1 r_2} \right). \quad (9)$$

可见圆盘的出现所引起的部分电容的减少量是由 r_1, r_2 及 R 这些距离值与 a 的值的 关系决定的。

(3) $\xi_a = 0, \xi_1 \ll 1, \xi_2 \ll 1$, 即物体 1 及 2 是位于圆盘的紧邻而圆盘的半径 a 又相当大时, 则 (6) 收敛得很慢, 不可能直接用来进行计算。实际上, 在这个情形下, 我们可以把圆盘当成一个无限大的导体平面, 然后应用简单的电象理论来处理这个问题。

当干扰源位于圆盘的轴上, 而且被包含在此圆盘上的半球之内时的一个问题可以在球面坐标

内解决, 但其所牵涉到的运算是冗长的, 如物体 1 和 2 位于圆盘正负半轴上如图 4 所示, 则它们之间部分电容是^[3] ($a > r_1, a > r_2$)

$$C_{12} = -C_1 C_2 \frac{r_1 r_2}{6\pi^2 \epsilon_0 a^3}.$$

(4) 如果在干扰源与被干扰物体之间出现的是棒状物体, 则我们就要利用长椭球体坐标谱波才能解决这一类问题。如果我们进行如下的变换:

$$\left. \begin{aligned} \xi &\rightarrow -i\xi, \\ \eta &\rightarrow \eta, \\ a &\rightarrow ia, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

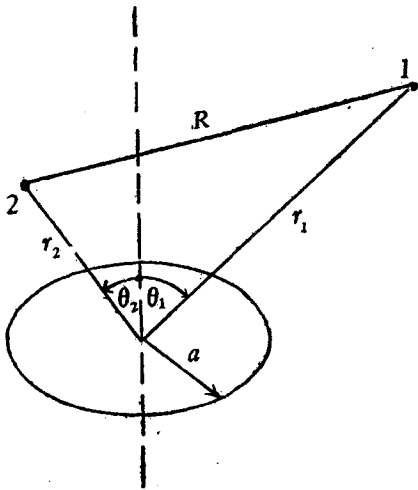


图 3

則(3), (4)和拉普拉斯方程分別为長椭球坐标中的量和方程:

$$\left. \begin{aligned} z &= a\xi\eta, & x &= a\sqrt{(\xi^2-1)(\eta^2-1)}\cos\varphi, \\ y &= a\sqrt{(\xi^2-1)(\eta^2-1)}\sin\varphi, \\ r^2 &= a^2[(\xi^2-1)(1-\eta^2) + \xi^2\eta^2], \\ \rho^2 &= a^2[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\frac{\rho^2}{\xi^2-1} + \frac{z^2}{\xi^2} = a^2, \quad (12)$$

$$\frac{\rho^2}{1-\eta^2} - \frac{z^2}{\eta^2} = a^2.$$

其中 $1 \leq \xi < \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$, 利用变换(10), 我們即可以得格林函数如下 [見 Morse and Feshbach; Methods of Theoretical Physics, (10, 3, 54) 式, 其中因子 i^m 应改为这里的 $(-1)^m$]:

$$G(\xi, \eta, \varphi; \xi_1, \eta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 \cos m(\varphi - \varphi_1) \times$$

$$\times P_n^m(\eta) P_n^m(\eta_1) \begin{cases} \left\{ \frac{P_n^m(\xi_1) Q_n^m(\xi)}{P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_1)} - \frac{Q_n^m(\xi_1)}{Q_n^m(\xi_a)} P_n^m(\xi_a) Q_n^m(\xi) \right\} & \xi > \xi_1 \\ \left\{ \frac{P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_1)}{P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_1)} - \frac{Q_n^m(\xi_1)}{Q_n^m(\xi_a)} P_n^m(\xi_a) Q_n^m(\xi) \right\} & \xi < \xi_1 \end{cases} \quad (13)$$

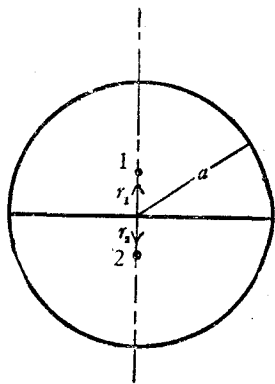


图 4

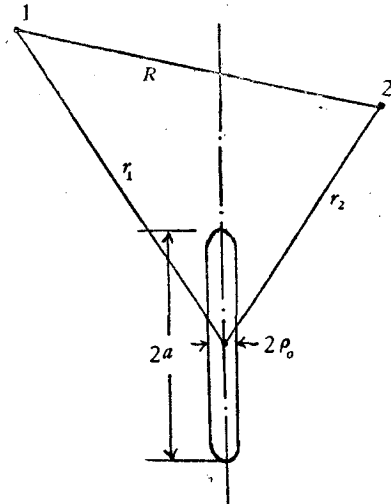


图 5

如果出現于干扰源与被干扰物体之間的是一細長的棒如图 5 所示, 其中 ρ_0 是棒的中部的半径, 則当 $\frac{\rho_0}{a} \ll 1$ 时, 在 $\eta=0$ 面上 $\rho_0 = a\sqrt{\xi_a^2-1}$, 亦即

$$\xi_a = \left[1 + \left(\frac{\rho_0}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{a} \right)^2.$$

如上面所作的一样, 当 $\xi_1 \gg 1$, $\xi_2 \gg 1$ 时, 利用 $Q_n^m(\xi)$ 的渐近展开式, 并在处理(13)式时只計及括号中的 $\frac{P_n(\xi_a)}{Q_n(\xi_a)} \times P_n(\xi_a) Q_n(\xi_1)$ 一項的效应, 并且考虑到

$$\frac{p_0(\xi_a)}{Q_0(\xi_a)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_a + 1}{\xi_a - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{4}{\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2} \right]} \approx \frac{1}{\ln \left(\frac{2a}{\rho_0}\right)},$$

我們即得到

$$G(\xi_1, \eta_1, \rho_1; \xi_2, \eta_2, \rho_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R} - \frac{a}{\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right)} \frac{1}{r_1 r_2} \right].$$

从(2)可見, 此时的部分电容为

$$C_{12} = -C_1 C_2 \frac{1}{4\pi\epsilon R} \left[1 - \frac{aR}{\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right) r_1 r_2} \right]. \quad (14)$$

从此式可見, 一根細長棒的屏蔽作用是很小的, 因为与(9)比較, (14)式方括号内的第二項有一个 $\frac{1}{\ln\left(\frac{2a}{\rho}\right)} < 1$ 的因子出現, 而对数函数是緩增的。

从(9)式和(14)式可見, 如果在干扰源与被干扰物体之間存在有若干圓盤和若干細長棒, 相互离得远, 布置又如图3和图5所示, 則可以写出

$$C_{12} = -C_1 C_2 \frac{1}{4\pi\epsilon R} \left[1 - \sum_i \frac{a_i R}{r_1^{(i)} r_2^{(i)}} - \sum_i \frac{a_i R}{\ln \frac{2a_i}{\rho_0^{(i)}}} \frac{1}{r_1^{(i)} r_2^{(i)}} \right].$$

四. 导体屏蔽上的小孔問題

帶小孔的有限导体平面的格林函数是一个未解決的問題。在实际应用上我們又时时遇到这一类小孔問題, 所以我們必須寻求适当的近似解。对于帶有圓形小孔的导体平面作为垂直均匀电场的边界的一个問題, 利用(3)和(4), 取 $0 \leq \eta \leq 1$, $-\infty < \xi < \infty$, 下面的电位函数是我們所需要的解(見文献^[2], §5.27), 其中 a 是圓孔的半徑,

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{-E_0 a}{i} [P_1(i\xi) - \frac{1}{\pi} iQ_1(i\xi)] P_1(\eta) = \\ &= -E_0 a \eta \left[\xi \left(1 - \frac{1}{\pi} \cot^{-1} \xi \right) + \frac{1}{\pi} \right] \end{aligned}$$

但 $\xi < -1$ 和 $\xi > 1$ 时, $\cot^{-1} \xi$ 取不同的展式(見 Dwight: Table of Integral and Other Datas, 506.2 和 506.3):

$$\begin{aligned} \cot^{-1} \xi &= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{3\xi^3} + \dots & \xi > 1, \\ \cot^{-1} \xi &= \pi + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{3\xi^3} + \dots & \xi < -1, \end{aligned}$$

代入上式, 当 $\xi \gg 1$ 时即 $r \gg a$ 时, 如限于取式的前兩項, 即得

$$\psi \approx -E_0 \left(a\xi\eta + \frac{1}{3\pi\xi^2} \eta \right).$$

由(3), 当 $\xi \gg 1$ 时, $\eta = \cos \theta$, 故得到

$$\psi = -E_0 \left(z + \frac{a^3}{3\pi r^3} \cos \theta \right);$$

而当 $\xi \ll -1$ 时,

$$\psi \cong -E_0 \frac{a^3}{3\pi r^3} \cos \theta.$$

由这个式子可见,无限大导体上的圆形小孔,在垂直电场作用下,在远处所生的影响,可以看作是由一个垂直于小孔平面的电偶极子所生的,这个电偶极子的电矩为 p :

$$p = -4\pi\epsilon_0 \frac{a^3}{3\pi} E_0. \tag{15}$$

在实际问题中,我们遇到的都是带小孔的有限尺寸的导体,这样的导体要大到什么程度才可以允许我们应用上面的无限大平面的理论呢?为解决这一问题,我们取无限大带圆孔导体在垂直电场作用下所生的感应电荷密度的表示式:

$$\sigma = -\epsilon E_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{a}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{(\rho/a)^2 - 1}} \right\} \right],$$

并绘成图 6 的曲线,当 $\rho > a$ 时感应电荷 σ 的值急剧下降,而当 $\rho \gg a$ 时, $\sigma \cong \epsilon E_0 \frac{1}{3\pi} \left(\frac{a}{\rho} \right)^3$,但从图 6 可见,当 $\rho/a \geq 2.5$,感应电荷的值即已衰减得相当小,故我们可以认为当一个导体的最近的边缘与圆形孔中心的距离约为小孔半径 2.5 倍时,则在研究圆孔在远处的影响时就可以认为这个圆是位于无限大平面上,也就是说,可以应用(15)式的电矩来计算圆孔在远处所生的影响。我们的这个估计与实验结果是相符合的(见文献^[4]两篇论文报导的实验结果,在那里还可以找到对其他形状的孔的最大许可尺寸的讨论)。在近似地处理问题时,这个限制还可以大大放宽。

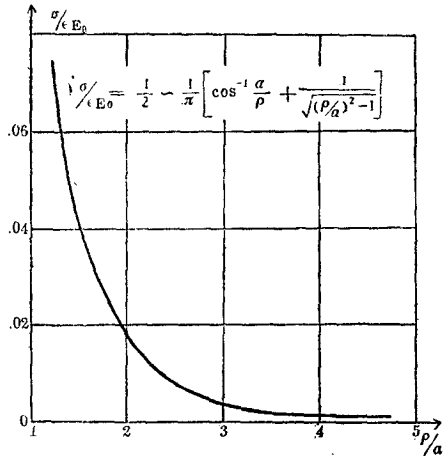


图 6

又如小孔所在的导体不是一个平面,而是一个曲面,则(15)式即不能应用,但如果这曲面的曲率半径不太小,则平面导体上的小孔的理论在某一观察区域内仍可以应用,例如:对于导体球面上的小孔,考虑到要维持这个导体球面必须是一个等位面,则小孔在远处的效应就要用一个电偶极子和一个电象点电荷来近似地表示^[3],如图 7 所示。图 7(a)表示于干扰源在外时,球面内任一点的电位的计算法:

$$\psi = -\frac{a^3 E_0}{3\pi r^2} \left(\cos \theta + \frac{r}{2R} \right). \tag{16a}$$

而图 7(b)则表示于干扰源在内时,球面外任一点的电位的计算法:

$$\psi = -\frac{a^3 E_0}{3\pi r^2} \left(\cos \theta - \frac{r}{2R} \right) \tag{16b}$$

从(16)式的近似解可见,如小孔所在的曲面的曲率半径很大,即 $\frac{r}{2R} \ll 1$,而观

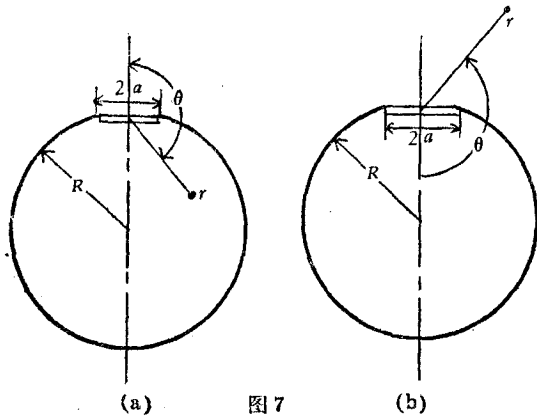


图 7

察点所在的 θ 角不太接近于 $\pi/2$ (即观察点不在垂直于电场的平面上), 则曲率效应仍可略去不计。

如果小孔的形状不是圆形, 则它在均匀电场作用下在远处所生的影响仍然可以近似地用一个电偶极子表示出来, 此时电偶极子的电矩与作用电场强度成正比, 但此比例常数与小孔的形状和尺寸的关系则须由实验求出^[4](个别特殊几何形状的小孔问题仍可严格地解出的, 如椭圆形小孔等):

$$p = -AE_0, \quad (17)$$

式中 A 就是这个比例常数, E_0 是小孔中心所在处在小孔未出现时垂直电场强度, 如小孔是圆形的, 则如(15)所示

$$A = 4\pi\epsilon_0 \frac{a^3}{3\pi} = \frac{4}{3} \epsilon_0 a^3.$$

经过这几段关于小孔的讨论后, 现在我们可以处理如下的一个问题: 如干扰物体与被干扰物体之间的接地导体屏蔽除了一个小孔之外是完全封闭的, 则它们之间的部分电容如何计算呢? 如果小孔的尺寸不大, 则小孔所在面积上的电场可以近似地看成是均匀的垂直电场, 故小孔在远处所生的效应可用(17)式的电矩来表示(自然, 我们还要假设小孔所在曲面是几乎平面, 即其曲率很小, 而小孔距离最近的边缘亦不太近)。这里 E_0 应取作 $-q_1 \frac{\partial G}{\partial n}$, 如前面所述的 q_1 是干扰物体所带的电量, G 是对问题中的完全屏蔽的格林函数, n 是外向法线, $\frac{\partial G}{\partial n}$ 的值应在小孔中心进行计算, 如是则在被干扰物体上的电压为

$$U_2 = +q_1 A \frac{\partial G}{\partial n} \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} = -\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22}} q_1,$$

其中 r 是被干扰物体与小孔中心的距离, θ 是 r 与外向法线 n 所成的角, 故最后得

$$C_{12} = -AC_{11}C_{22} \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\partial G}{\partial n}. \quad (18)$$

利用(18)式和文献^[2]中对 G 的丰富的储藏, 我们就可以解决多种带小孔的电磁屏蔽问题。兹举例如下:

(1) 带小孔无限大接地的屏蔽, 此时格林函数为(导体设为 $x=0$ 平面)

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\{(x-d)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\{(x+d)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}} \right].$$

在此式中, 我们取干扰物体的位置为 $(d, 0, 0)$ 如小孔位于 $(0, b, 0)$, 而被干扰物体则位于 $(-d', b', 0)$ 设 $d' > 0$, $-\infty < b' < \infty$, 又可见 $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$, 故

$$\begin{aligned} C_{12} &= -AC_{11}C_{22} \frac{d'}{(4\pi\epsilon)^2 [(d')^2 + (b-b')^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{2d}{[d^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{2AC_{11}C_{22}}{(4\pi\epsilon)^2} \frac{dd'}{[(d')^2 + (b-b')^2]^{\frac{3}{2}} [d^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

如小孔是圆形的, 则 $A = 4\pi\epsilon \frac{a^3}{3\pi}$; 如小孔是矩形的, 则 $A = 4\pi\epsilon \left(\frac{lw^2}{32} \right)$, 其中 l 和 w 分别为矩形小孔的长度和宽度。

(2) 带小孔的六面体而干扰物体则位于内部 (x_0, y_0, z_0) , 如 $z < z_0$ (当 $z > z_0$ 时, 则在

下式中將 z 与 z_0 互换, 六面体是由平面 $x=0, d_1; y=0, d_2; z=0, d_3$ 圍成),

$$G = \frac{4}{\epsilon d_1 d_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh A_{mn}(d_3 - z_0) \sinh A_{mn} z}{A_{mn} \sinh A_{mn} d_3} \sin \frac{n\pi x_0}{d_1} \sin \frac{n\pi x}{d_1} \sin \frac{m\pi y_0}{d_2} \sin \frac{m\pi y}{d_2},$$

其中 $A_{mn} = \frac{(m^2 d_1^2 + n^2 d_2^2)^{\frac{1}{2}} \pi}{d_1 d_2}$; 如小孔位于 $(0, y_1, z_1)$, 則对于六面体外 (l_1, l_2, l_3) 处的被干扰物体, 由(18)可得 ($l_1 < 0, l_2, l_3$ 任意的)

$$C_{12} = \frac{-4}{\epsilon^2 d_1^2 d_2^2} C_{11} C_{22} l_1 [l_1^2 + (l_2 - y_1)^2 + (l_3 - z_1)^2]^{-\frac{3}{2}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n \sinh A_{mn}(d_3 - z_0) \sinh A_{mn} z_1}{A_{mn} \sinh A_{mn} d_3} \sin \frac{n\pi x_0}{d_1} \sin \frac{m\pi y_0}{d_2} \sin \frac{m\pi y_1}{d_2}.$$

如果小孔位于其他面上, 我們也可以进行同样的处理. A 的取值已在例 1 中討論过了, 这个級数的收斂速度是由 $e^{-A_{mn}(z - z_1)}$ 項的級数来决定; 如果 $z_0 \neq z_1$, 則收斂是不坏的, 如果 $z_0 \cong z_1$, 則收斂得不好; 此时我們可以把格林函数 G 写成另外的形式, 以便得到更快的收斂級数(关于这个問題的討論, 可見 Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 1955, § 3—6 和 Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*, ч. II, гл. III).

以上两个例子, 在处理仪器的机壳屏蔽时是有用的, 对于电業中的电磁屏蔽室的设计也会有很大的帮助, 譬如, 如果干扰物体位于屏蔽室靠近穿有小孔的一面而远离其他五面, 則我們可以用第一例子的公式来处理, 否則我們就可以用第二个例子的公式来处理. 对这种电磁屏蔽室, 这里討論的小孔可能是通风或照明的圆形或方形小窗, 亦可能是門縫等漏洞. 为了减少干扰物体对其他物体的影响, 我們应该根据上面的两个例子[或者直接应用(18)式]来放置它們, 使它們之間的相互电容最小; 如果要屏蔽的仪器是在屏蔽室之内, 則根据格林函数的对称性, 上面的討論仍然可用. 当然, 在处理实际问题时, 我們还要考虑到电磁屏蔽室室壁的厚度, 如果这个厚度不太大, 則其效应是不显著的^[4]. 为了要减少这种小孔电磁过道的效应, 我們还可以适当地采用保护波导管的设备(見文献[2]第 205, 224 頁). 如果我們的电磁屏蔽室壁上有多个小孔, 而这些小孔又相距不太近, 則它們在远处所生的影响可以直接迭加起来.

有些机壳的形状是属于一节封閉的圆柱体或一段圆锥体(即在球面坐标中由 $r=r_1, r=r_2, \theta=\theta_0$ 所圍成的), 在这些机壳上的小孔的效应仍可用(18)式来计算[自然要注意到小孔所在的曲面上的曲率半径的大小, 以便决定(18)式是否可用], 而对这些几何形状格林函数是現成的^[2].

在处理矩形小孔时, 如矩形是一个長条状, 則在計算垂直于長条長度中部的平面上的电场时, 我們还可以应用二維电场的保角变换法. 例如下面一个变换就可以利用来解决一个均匀电场透过寬度为 $2b$ 的裂縫的一个問題^[2]:

$$z = b \left(\frac{z_1}{b} + \frac{b}{z_1} \right),$$

其中 $z = x + iy$, 而 $z_1 = x_1 + iy_1$, 則电场透过率可以表为

$$\frac{|E|}{E_0} = \left(\frac{b}{4r}\right)^2 \quad r \gg b$$

其中 r 是观察点与裂缝中心轴的距离。

由上可见,处理电磁屏蔽问题的方法很多,尤其在近似法中式样更多,本文只是提出一个利用丰富的格林函数的储藏来解决这个问题的一个新建议。

参 考 文 献

- [1] Бреймбарт, А. Я., и Людмирский, И. Л., О Расчете Взаимных емкостей между телами малых размеров, *ЖТФ*, XXVI, 5, (1956), 1094.
- [2] Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 1950, § 5, 275, 对格林函数则见第 604 页.
- [3] Каден, Г., Электромагнитные экраны, ГЭИ, 1957, стр. 227, 197.
- [4] Cohn, S. B., Electric Dipole Moment of Holes of Arbitrary Shape, *Proc. IRE.*, Sept., 1952 (最初理论部分, 见同作者, *Proc. IRE.*, Nov., 1951).

APPLICATIONS OF GREEN'S FUNCTIONS IN CALCULATING THE MUTUAL CAPACITANCE BETWEEN SMALL BODIES

LIN WEI-GANG

(*Institute of Radio Engineering, Chengtu*)

ABSTRACT

In industry and in laboratory work oftentimes we are confronted with the problem of electromagnetic shielding between two bodies. In many cases it is sufficient to have electrostatic shielding, and thus the interaction between two bodies can be determined by examining the mutual capacitance between them. When the interfering body is small and can be considered as a point source, its effect in the presence of another grounded conductor (in our case, the metallic shield) can be calculated by means of the Green's function for this grounded conductor surface. As the Green's functions for various surfaces are well established so these various forms of shielding can be handled by the method proposed in this paper.

Green's functions for regions bounded by surfaces of oblate spheroidal as well as prolate spheroidal coordinate system are discussed with a mind to supplement a few formulas for the Legendre function with imaginary variables which are useful in physical and technical problems and which do not seem to appear in popular literatures.

The problem of a hole of arbitrary shape on a conducting surface is then discussed with emphasis on the allowable size of the hole on a conducting surface of finite dimension, verifying the experimental results in literature. Finally the formula for calculating the mutual capacitance of two small bodies, one of which is enclosed by a closed metallic shield with a hole on its surface is given.