

高温等离子凝聚体存在的新原理*

A. A. 弗拉索夫

(北京大学物理系理论物理教研室, 莫斯科大学物理系理论物理教研室)

生

提 要

本文詳細地考虑了影响带單一符号电荷的粒子束以下四个因素: 平行于粒子束軸的外磁場; 粒子束在某种意义下的旋轉; 由于体电荷引起的粒子間相互排斥力以及速度的溫度分布, 因而得到束中粒子的某种稳定运动状态的結論。

这种稳定状态的特征是粒子束有非常清晰的圓柱形边界, 其半徑看来不是任意的, 而由上列各因素所决定。也就是說, 粒子束有一个有效半徑, 溫度和磁場之間存在着一定的关系式, 取适当的磁場和粒子束大小的数值, 可以期望溫度达到 10^{10} — 10^{12} °K 的数量級。粒子束并不以回旋加速器頻率旋轉, 至少在边缘上是以拉摩頻率旋轉的。

在粒子濃度和磁場滿足一定条件下, 粒子束对于这些量的改变来说是稳定的。当条件超过了范围时, 稳定性的破坏是突变式地产生的(产生了分支点)。

§ 1. 引言 状态的积分方程. 最簡單模型的研究

描述粒子統計系統的經典方法, 通常是把介質的体积性質分离出来, 这反映在加于統計方程的解上的一定的規格化条件:

$$N \rightarrow \infty \quad V \rightarrow \infty; \quad \frac{N}{V} = \text{常数} < \infty,$$

这里 N 为系統中粒子总数, V 为系統的体积。这种条件不能反映靠內力或外力(但不靠器壁)来維系在一起的粒子的空間有限集聚。为了描述这类一維、二維或三維的空間有限集聚(我們可以称之为等离子凝聚体)必須引入下列条件:

$$\iint_{(\infty)} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} < \infty, \quad (1.1)$$

式中 f 为粒子的分布函数, 它决定在下列区間內粒子的几率数:

$$d\mathbf{r} d\mathbf{v} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

为了满足这个条件, 分布函数必須要隨空間坐标和速度变量的无限增漲相当快地减小。由于分布是麦克斯韋函数, 它隨速度的增漲而減小的条件是滿足的。由于分布函数隨距等离子凝聚体中心的空間坐标的增漲也足够快地减小, 我們才可以引入有效大小:

$$\int_{(\infty)} \rho d\mathbf{r} = \rho_0 V_{\text{有效}}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \int_{(\infty)} f d\mathbf{v},$$

式中 ρ_0 为等离子凝聚体中心处的粒子濃度, $V_{\text{有效}}$ 为它的有效体积。

从另一方面看, 分布函数作为一定的气体动力論方程的解, 它應該包含系統的一些参

* 1959年1月23日收到。

量, 如温度 (θ), 浓度 (ρ_0), 磁场 (H), 漂流速度 (u) 等等。因此条件 (1.1) 有以下形式^[1]:

$$\rho_0 V_{\text{有效}} = \Phi(\theta, \rho_0, H, u, \dots), \quad (1.2)$$

这类的方程可以称做等离子凝聚体状态的积分方程。这方程的价值在于它把等离子凝聚体的大小和它的内、外参量联系起来, 而这种联系又可用实验来研究。这关系式可以看做是等离子凝聚稳定(类稳)状态的判据, 等离子凝聚体理论的重要任务之一应该在各种具体情形中确定关系式(1.2)。

这种联系应该有怎样的共同特性呢? 利用量纲的分析可以回答这问题。对于带电粒子的集合来说, 至少有三个特征性的固有频率:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho_e^2}{\rho}, \quad \omega_j^2 = \frac{4\pi(j_e/c)^2}{\rho}, \quad \omega_L^2 = \left(\frac{eH}{2mc}\right)^2,$$

式中 ρ_e 和 j_e 各为电荷密度和电流密度, ρ 为质量密度 [ω_0 为朗格密尔 (Langmuir) 频率, ω_L 为拉摩 (Larmor) 频率]。

如果引入两个能量的标度: $\theta = kT$ 和 mc^2 , (m 为粒子的质量), 则存在以下三个特征长度:

$$l_0^2 = \frac{\theta}{m\omega_0^2}, \quad l_j^2 = \frac{\theta}{m\omega_j^2}, \quad l_L^2 = \frac{\theta}{m\omega_L^2}; \quad (1.3)$$

以及将 θ 换为 mc^2 时所加添的另外三个特征长度。

公式(1.3)就属于(1.2)一类的关系式。不难看出, 那个有名的“箝制”效应^[2] ($n\theta = H_s^2/8\pi$, H_s^2 为固有磁场) 与 (1.3) 式中的第二式有联系。在本文中, 我们将研究一种特殊形式的电磁等离子凝聚体, 它们是与(1.3)式中的第三式联系着的。

为了直观, 不妨从一个最简单的模型看起, 然后再用严格的理论来验证在粗糙模型的基础上得到的结果。

我们假设, 可以把原子核束中连续分布的体电荷代之以圆柱形表面上的电荷分布, 这圆柱的半径等于原来粒子束的半径。圆柱体单位长度内的总电荷也仍不变。设 H 为沿粒子束方向的外加恒定磁场, 并设粒子束以角速度 ω 左向旋转。这两个因素(磁场和旋转)形成指向圆柱体内部的压力, 其大小为 $\frac{\sigma}{c}vH$, 其中 σ 为表面电荷密度, v 为旋转的线速度 ($v = \omega D$, D 为圆柱的半径)。在达到平衡时, 外压力应该和内压力抵消, 这内压力是由热运动—— $n\theta$ (n 为粒子束中粒子浓度, $\theta = kT$), 静电排斥力 $\frac{1}{2}\sigma E$ ($E = 4\pi\sigma$), 以及离心力形成的压力 $\left(\frac{m}{e} \frac{\sigma v^2}{D}\right)$, 其中 m 和 e 为束中粒子的质量和电荷)三者合成的:

$$n\theta + \frac{1}{2}\sigma E + \frac{m}{e} \frac{\sigma v^2}{D} = \frac{\sigma}{c}vH.$$

如果考虑到

$$\sigma = en\pi D^2/2\pi D = \frac{e}{2}nD,$$

则由此可以得到温度的数值为

$$\theta = -\frac{mD^2}{2} \left(2\omega\omega_L - \omega^2 - \frac{1}{4}\omega_0^2 \right), \quad (1.4)$$

$$\left(\omega_L = \frac{eH}{2mc}, \omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m} \right).$$

现实的平衡条件($\theta > 0, \omega_0^2 \neq 0$)只有在相当大的磁场 H 下,且转速 ω 位于下列区间内才能满足:

$$\omega_L - \sqrt{\omega_L^2 - \frac{1}{4}\omega_0^2} < \omega < \omega_L + \sqrt{\omega_L^2 - \frac{1}{4}\omega_0^2}.$$

当以拉摩频率 $\omega = \omega_L = eH/2mc$ 旋转时,温度达到极大值:

$$\theta = \frac{m\omega_L^2 D^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right). \quad (1.5)$$

这公式指出等离子凝聚体的基本特性,即其大小非任意的,而是由内部参量(θ, ω_0^2)及外部参量(ω_L)来决定.公式(1.5)是(1.2)条件的具体化.

连静电排斥力都还只作为一个附加因子出现(当 H 足够大时, $\frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} < 1$),则由于旋转而形成的电流之间的磁的相互作用力,显然更可忽略不计,因为它比静电作用力还要小一个因数 $v^2/c^2 < 1$,也正由于这同一原因,原子核沿粒子束的漂流速度不出现在公式(1.5)中.在下面附表中给出在一定的 H 和 D 的数值下,式中出现各量 $T, \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ 和 n (对于氩)数量级的估计.

这估计表明,可以不用大电流而得到高温,这正是这里所建议的方法的基本优点.

H (高斯)	D (厘米)	n ($1/\text{厘米}^3$)	ν (秒 $^{-1}$)	T (°K)
10^3	10	$< 2 \times 10^8$	3×10^5	2×10^6
10^4	10^2	$< 2 \times 10^{10}$	3×10^6	2×10^{10}
5×10^4	2×10^2	$< 10^{12}$	10^7	2×10^{12}

关系式(1.5)指出,究竟在等离子凝聚体中用实验方法可以研究什么.首先,可以验证,当 H 增大时(即当 $\frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} < 1, \theta < 0$ 满足时),等离子凝聚状态是否突变式的产生.其次,这种等离子凝聚体的重要特征在于它的固有旋转频率,它可能是拉摩频率(ω_L),但决不是回旋加速器频率($2\omega_L$).后者只在粒子束处于非等离子凝聚状态时出现.也就是说,完全忽略速度的热分布和体电荷作用,亦即令 $\theta = 0, \omega_0^2 = 0$,从(1.2)式可得

$$2\omega\omega_L = \omega^2,$$

这样就出现了回旋加速度频率.

再次,温度与原子核的原子序数 Z 和原子量 A 之间的关系,以及与 H 和 D 的关系:

$$\theta \sim \frac{Z^2 H^2 D^2}{A}$$

也可作为实验分析的对象.当然,最重要的还是在实验中证明这类等离子凝聚体本身确实存在.

在理论面前产生两个任务:上面讨论的这种理想化的带面电荷的空管模型,在怎么样的程度上反映了实现的原子核束?真正的旋转频率应该是什么?以及这种旋转频率是否会由于外磁场 H 而自己产生?

§ 2. 原始方程和边界条件. 带电粒子在外磁场中有旋转时的分布函数

我们选取以下的分布函数 f 的方程作为问题的原始方程^[1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_r v f + \operatorname{div}_v g f &= 0, \\ g &= -\frac{e}{m} \nabla V + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \\ \Delta V &= -4\pi e \int_{(\infty)} f d\mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

边界条件和补充条件有以下一些: 第一, 柱形对称条件, 即在圆柱体的轴上

$$V(0) = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad (2.2)$$

第二, 等离子凝聚状态条件(1.1):

$$\int_0^\infty \left(\int_{(\infty)} f d\mathbf{v} \right) 2\pi r dr = \rho_0 \pi D^2 < \infty, \quad (2.3)$$

式中 D 为圆柱的有效半径. 最后, 应有一个条件来保证, 当 $H \rightarrow 0$ 和 $\omega \rightarrow 0$ 时, 我们的解能够过渡到具有轴向漂流速度的麦克斯韦速度分布函数.

在柱坐标系 $r, \theta, z; v_r, v_\theta, v_z$ 里,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left[-\frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial r} + \left(v_\theta + \frac{e}{mc} H r \right) \frac{v_\theta}{r} \right] \frac{\partial f}{\partial v_r} + \\ + \left[-\frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial z} \right] \frac{\partial f}{\partial v_z} - \left[v_\theta + \frac{e}{m} H r \right] \frac{v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

虽然这里没有几率机构, 这原始方程也有麦克斯韦分布函数形式的解, 若我们设解的形式是可以分离变量的:

$$f = \rho(r, z - ut) w(v_r^2) w(v_\theta^2) w[(v_z - u)^2],$$

我们会得到

$$\rho = \exp\left(-\frac{eV}{\theta}\right), \quad w = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\theta}\right).$$

从我们附加的(第三个)条件出发, 我们设解的形式尽可能地接近于麦克斯韦分布. 为了使解包含系统的旋转, 必须放弃解的乘积形式, 因为有旋转时, 由于 $(v_\theta - u_\theta)^2$ (其中 $u_\theta = \omega r$) 这个因子出现了 $v_\theta r$ 这样一项乘积, 它表明了变量 r 和 v_θ 的不可分离性, 因而我们设

$$f = \rho(r, z - ut) w(v_r^2) w(v_\theta^2) w[(v_z - u)^2] \cdot F(r, v_\theta), \quad (2.5)$$

式中 F 是待定的函数, 它考虑到解的非乘积性, 把(2.5)式代入(2.4)式后, 所有不包含 F 的导微的各项彼此相消, 因为麦克斯韦分布是这方程的解. 剩下的项有

$$v_r f_M \frac{\partial F}{\partial r} - v_r \frac{1}{r} \left(v_\theta + \frac{eH}{mc} r \right) \frac{\partial F}{\partial v_\theta} f_M = 0,$$

式中 f_M 表示当 $F=1$ 时的分布函数. 上式或可写为

$$r \frac{\partial F}{\partial r} = \left(v_\theta + \frac{eH}{mc} r \right) \frac{\partial F}{\partial v_\theta}.$$

这个 F 的方程有一个解, 其形式是 r 和 v_θ 的某种特殊组合的任意函数 Φ :

$$F(r, v_\theta) = \Phi \left\{ r \left(v_\theta + \frac{eH}{2mc} r \right) \right\}.$$

应该注意到, 与以前公式不同, 在这里出现了因子 $\frac{1}{2}$. Φ 的具体形式应是怎样的? 为了与麦克斯威分布相适应, 我们应该把它取成指数函数的形式:

$$F(r, v_\theta') = e^{-Q}, \quad Q = \left(\frac{m\omega}{2\theta} \right) 2rv_\theta' - Ar^2 v_\theta'^2, \quad (2.6)$$

式中 Q 为原来宗量 rv_θ' 的多项式, v_θ' 代表 $v_\theta + \frac{eH}{2mc} r$. 多项式我们只取到第二级, 因为在这情形下最接近于麦克斯韦速度分布函数, 麦克斯韦分布函数也是二次的多项式. 式中 ω 和 A 暂时还是完全任意的常数, 其含义只能在后面才能确定.

首先我们来看一下, 若在 Q 的表示式中只考虑第一项, 将会得到什么结果? 我们设

$$W(v_\theta^2) F(rv_\theta') = \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2\theta} (v_\theta - u_\theta)^2 + S \right\}, \quad (2.7)$$

这是有平移 u_θ 和“势函数” S 的分布函数. 将这里出现的指数与 $-\frac{mv_\theta^2}{2\theta} - Q$ 比较, 我们得到下列 u_θ 与 S 的表示式:

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &= \omega r, \\ S &= \frac{m}{2\theta} (\omega^2 + 2\omega\omega_L) r^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

($\omega_L = \frac{eH}{2mc}$), 当 $H=0$ 时它变为已知结果, 即由于系统的旋转而加在麦克斯韦分布上一个修正, 常数 ω 的意义是旋转的圆频率. $S = \frac{m\omega^2 r^2}{2\theta}$ 为离心力的“势函数”, 当 $H \neq 0$ 时出现新的干涉项, 它是由磁场和旋转的联系引起的. 在按左螺旋方向旋转的情形里 (当 $e > 0$), $\omega < 0$, 而且若旋转频率相当小时,

$$|\omega| < 2\omega_L = \frac{eH}{mc},$$

因子 $\omega^2 + 2\omega\omega_L$ 变为负的. 若以拉摩频率旋转 ($\omega = -\omega_L$), 则

$$S = -\frac{m\omega_L^2}{2\theta} r^2. \quad (2.9)$$

由于磁场的变化使得“势函数” S 由正值变为负值, 这对产生等离子凝聚状态是必需的, 因为这时才能够期望下列积分 (1.1) 收敛:

$$\int_0^\infty e^{S - \frac{eV}{\theta}} r dr < \infty.$$

因此, 只考虑 Q 中的第一项得到的结果, 与在 §1 中用初步的讨论所得到的很相近.

旋转频率 ω 在这里仍是一个任意量, 因而有必要引入各项式的第二项. 与 (2.7) 式类似, 我们设

$$W(v_\theta) F(rv_\theta') = \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\left(\frac{m}{2\theta} + \alpha \right) (v_\theta - u_\theta)^2 + S \right\},$$

式中 α, u_θ 和 S 各量由与(2.6)式的比较来决定, 这样我們即得到 $\alpha = Ar^2$, 且

$$u_\theta = \frac{-\left(-\frac{m}{2\theta}\omega + A\omega_L r^2\right)r}{\frac{m}{2\theta} + Ar^2},$$

$$S = \frac{\left(\frac{m}{2\theta}\right)^2 \left(\omega^2 + 2\omega\omega_L - Ar^2 \frac{2\theta}{m}\omega_L^2\right)r^2}{\frac{m}{2\theta} + Ar^2}. \quad (2.10)$$

当 $H=0$, 但 $A \neq 0$ 时, 公式(2.10)变为奥奥尔特(Oort)公式^[32]. 該式是应用于星体統計的:

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &= \frac{m}{2\theta} \frac{\omega r}{\frac{m}{2\theta} + Ar^2}, \\ S &= \left(\frac{m}{2\theta}\right)^2 \frac{\omega^2 r^2}{\frac{m}{2\theta} + Ar^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

它們表明銀河系的旋轉与剛体旋轉不同. 当 $r \rightarrow 0$ 时,

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &\rightarrow \omega r, \\ S &\rightarrow \frac{m\omega^2 r^2}{2\theta}, \end{aligned} \right\}$$

这是平常的旋轉, 可是当 $r \rightarrow \infty$ 时,

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &\rightarrow \frac{m}{2\theta} \frac{\omega}{A} \frac{1}{r} \rightarrow 0, \\ S &\rightarrow \left(\frac{m}{2\theta}\right)^2 \frac{\omega^2}{A} = \text{常数}, \end{aligned} \right\}$$

即边缘区域保持静止, 旋轉頻率 ω 在这里仍旧是任意的, 常量 A 表示“扭卷”現象, 以及“第二温度”, 因为分布函数具有以下形式:

$$f = \rho \frac{1}{\pi^{3/2}} \sqrt{D} \exp \left\{ -\frac{m}{2\theta} v_z^2 - \left(\frac{m}{2\theta} + Ar^2\right)(v_\theta - u_\theta)^2 - \frac{m}{2\theta} (v_z - u)^2 \right\}$$

$$\left(\sqrt{D} = \frac{m}{2\theta} \sqrt{\frac{m}{2\theta} + Ar^2} \right),$$

$$\rho = \rho(r, z - u) = \int_{(\infty)} f d\mathbf{v},$$

式中 u_θ 和 S 由公式(2.10)所規定.

当 $\omega_L \neq 0$ 和 $A \neq 0$ 时出現两个效应: 磁場与旋轉的干涉, 和磁場与“扭卷現象”的干涉, 即出現了 $\omega\omega_L$ 和 $Ar^2\omega_L$ 兩項, (此外还有 $Ar^2\omega_L^2 \frac{2\theta}{m}$) 我們发现, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &\rightarrow -\omega_L r, \\ S &= -\frac{m\omega_L^2 r^2}{2\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

第一个公式指出,在系統邊緣上的旋轉类似剛体的旋轉,此外,旋轉的方向和頻率符合于拉摩的数值。“势函数 S ”与无磁场的旋轉情形相較具有相反的符号。这点保证了粒子束以相当明晰的界限局限于空間。这可以从下面“截断”因子看出:

$$f \sim e^{-\frac{m\omega_L^2 r^2}{2\theta}}.$$

可以注意到,这时頻率 ω 和旋轉方向在 $r \rightarrow 0$ 时,在理論上仍是任意的,在 $\omega = -\omega_L$ 的特殊情况下公式(2.12)对任意 r 都成立,这从关系式(2.10)可以看出。

§ 3. 势的分布的非綫性方程及其解

把在 § 2 中找到的分布函数代入方程系(2.1)中的第二个方程,我們得到

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi e \rho_0 e^{-\frac{m\omega_L^2 r^2}{2\theta} - \frac{eV}{\theta}}. \quad (3.1)$$

我們引入无量綱的量

$$\frac{m\omega_L^2}{2\theta} r^2 = x^2, \quad -\frac{eV}{\theta} = \varphi;$$

并把等离子凝聚体的条件

$$\rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{m\omega_L^2 r^2}{2\theta} - \frac{eV}{\theta}} 2\pi r dr = \rho_0 \pi D^2 < \infty$$

写成下列形式:

$$\frac{4\theta}{m\omega_L^2} \int_0^\infty x e^{-x^2 + \varphi} dx = D^2. \quad (3.2)$$

我們感兴趣的量 θ 能够表成:

$$\theta = \frac{m\omega_L^2 D^2}{4} \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad (3.3)$$

式中 $\psi(\lambda)$ 是一个特殊函数,由下列积分所規定:

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty x e^{-x^2 + \varphi(x, \lambda)} dx, \quad (3.4)$$

而 $\varphi(x, \lambda)$ 又是 (3.1) 式的解,在 $x=0$ 处它們具有一定的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\varphi}{dx} \right) &= \lambda e^{-x^2 + \varphi}, \\ \varphi(0) &= \varphi'(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

这里 $\lambda = 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2}$, ω_0 为朗格密尔頻率,这样一来确定状态积分方程(3.2)的問題归结为解方程(3.5),而后再来确定 $\psi(\lambda)$ 的形式。

$\lambda=0$ 时, $\varphi \equiv 0$ 是 (3.4) 式(对于固定 λ 值)的特殊解,它对起始条件和方程都滿足,其次

$$\psi(0) = \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2},$$

因而公式(3.2)具有以下簡單形式:

$$\theta = \frac{m\omega_e^2 D^2}{2}, \quad (3.6)$$

只要在初步讨论的结果(1.5)式中, 也令 $\omega_0^2 = 0$, 这结果准确地与(1.5)式符合.

若要找当 $x \rightarrow 0$ 但 $\lambda \neq 0$ 时的解, 我们来看 $\frac{d\varphi}{dx}$ 的方程, 它由(3.4)式在 $0, x$ 区间积分而来:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\lambda}{x} \int_0^x x e^{-x^2 + \varphi} dx.$$

因为基于起始条件, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\varphi(x \rightarrow 0) \rightarrow 0$, 则

$$\frac{d\varphi}{dx} \rightarrow \frac{\lambda}{x} \int_0^x x e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{\lambda x}{2},$$

因而

$$\varphi(x) = \frac{\lambda x^2}{4}. \quad (3.7)$$

这指出, 两个起始条件与方程无矛盾, 它们对于 λ 的任意数值都满足.

为了确定当 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\varphi(x)$, 不妨变换一下方程的积分形式. 二维的泊松方程

$$\Delta\varphi = f(x, y).$$

其在无限区域内的积分表示法具有以下形式:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(\infty)} f(A) \ln \frac{1}{r_{AP}} dS_A.$$

如果 $P \rightarrow \infty$, 则

$$\varphi(P) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r^2} \iint_{(\infty)} f(A) dS_A.$$

应用(3.5)和(3.2)式, 并用无量纲单位来表示, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\varphi(x) \rightarrow \frac{m\omega_0^2 D^2}{2\theta} \ln x. \quad (3.8)$$

这结果表示等离子凝聚状态的条件是满足的:

$$\int_0^\infty e^{-x^2 + \alpha \ln x} dx < \infty, \quad \left(\alpha = \frac{m\omega_0^2 D^2}{2\theta} \right),$$

因为被积函数中按幂次增大的因子 $x e^{\alpha \ln x}$, 其效果被截断因子 e^{-x^2} 排除了.

重要的是确定这个解($\varphi=0, \lambda=0$)在小 λ 值的范围内是可分析拓展的, 亦即, 证明对于小的 λ 值解的存在, 若可能, 并证明其唯一性, 这点可利用毕伯巴赫 (Bieberbach) 很早以前完成的关于方程 $\Delta u = \lambda e^u$ 的数学著作^[4]中所用的方法来完成. 令 $w(x, y)$ 为泊松方程 $\Delta w = 4\pi\rho$ ($\rho > 0$) 的解. 这解在无穷远处与我们的方程

$$\Delta\varphi = \lambda e^{-r^2 + \varphi} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

的解, 也就是说与(3.8)式, 是符合的, 引入二者之差 $u = \varphi - w$, 则 u 满足下列方程:

$$\Delta u = \lambda e^{-r^2 + w + u} - 4\pi\rho$$

或

$$\Delta u - \lambda e^{-r^2 + w} u = \lambda e^{-r^2 + w} (e^u - u) - 4\pi\rho, \quad (3.9)$$

我們需要(3.9)式满足下列边界条件的解:

$$u=0, \quad r \rightarrow \infty.$$

这問題与下列非綫性积分方程是等价的:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\lambda \iint_{(\infty)} K(x, y; \xi, \eta) e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} (e^u - u) d\xi d\eta + \\ & + \iint_{(\infty)} K 4\pi \rho d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

式中 K 是方程 $\Delta u - \lambda e^{-r^2 + w} u = 0$ 的格林函数。

我們采用以下形式的逐次近似:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_{n+1} &= -\lambda \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} (e^{u_n} - u_n) d\xi d\eta + \\ & + \iint_{(\infty)} K 4\pi \rho d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

在附录 I 中証明, 此序列中相鄰項之差满足下列不等式:

$$0 < u_n - u_{n+1} \leq S_0^{n+1}, \quad (3.12)$$

式中

$$S_0 = \max_{(\infty)} \lambda \iint K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

由此可見, 在 λ 值相当小时, 可以使得 $S_0 < 1$, 因而得到均匀收斂的序列, 于是对于小的, 但是不等于 0 的 λ 值解的存在严格地証明了。

利用解非綫性积分方程的一般方法可以証明解的唯一性(見附录 II)。

現在来証明, 当 λ 值相当大时, 解的唯一性已不存在, 因为这时产生了解的分支点, 其实, 在 $\lambda = 4$ 时, 原始方程 (3.5) 就有一个特殊的精确解 $\varphi = x^2$, 这用直接代入法很容易驗証。

从物理的观点, 重要的是, 这解不属于等离子凝聚体一类的, 因为对于它,

$$\int_0^\infty x e^{-x^2 + \varphi} dx = \infty.$$

由此可見, 在 λ 值很小的范围內(亦即, 有足够大的磁場时)存在一个唯一的等离子凝聚状态。当磁場 H 小时($\lambda \geq 4$), 实际應該在等离子凝聚状态和非等离子凝聚状态之間選擇其一。这点粗略而定性地和 § 1 中初步的討論是一致的, 那里也需要满足 $\frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} < 1$ 的条件, 等离子凝聚体才能存在。

在 $H=0$ 的极端情形里, 原始方程 (3.1) 具有如下的形式:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \lambda e^\varphi; \quad \lambda = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{\theta}.$$

在附录 III 中証明了在

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(L) = \infty$$

的条件下这方程有解。这时浓度的分布形式如下:

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{r}{D}\right)^2\right]^2},$$

这解不是等离子凝聚体的, 它是有奇異点的。要实现它, 在 $r=D$ 处需要有器壁。

§ 4. 摘 要

1. 靠除了器壁以外的内力(和外力)来维系的空间局限等离子区(即等离子凝聚体)来说, 甚至可以是只由一种带电粒子组成的, 都应存在一个所谓状态积分方程, 即一个包含等离子凝聚体线性大小与其内部特征(如温度, 浓度, 磁坩等)之间完全确定的关系式。

2. 在有外磁坩存在的条件下, 沿坩的方向有漂流速度的圆柱形原子核束可以处于等离子凝聚状态, 亦即, 在束中的一种稳定的运动状态。在这状态下束的截面大小不再是任意的, 而是由内、外条件来决定的。等离子凝聚体看来是由三个因素造成的结果: 即外磁坩、粒子束本身的机械旋转和速度的温度分布。本文中确定了有旋转时粒子在磁坩中的分布函数, 证明了旋转速度与柱形束半径的非线性关系, 在边缘上粒子束象刚体一样地旋转, 其频率与方向精确地与拉摩运动符合, 而不是迴旋加速器频率。在一定的条件下找到了满足等离子凝聚状态存在判据的分布函数。

3. 这种等离子凝聚体的特征是: 有非常清晰的圆柱形界限, 和与温度、磁坩及粒子浓度有关的有效半径。原子核的特性通过原子序数和原子量反映在状态的积分方程中, 当磁坩不断地增加时, 等离子凝聚状态突变式的产生, 因而有一个与原子核的浓度和原子量有关的临界坩强。等离子凝聚体的固有旋转频率与拉摩频率符合。在外磁坩和粒子束的大小的适当数值下, 等离子凝聚体应该是高温的, 其温度数量级为 $10^{10}-10^{12}$ °K。

我们在理论上相当确切地肯定了这些性质, 是为了便于实验上能够找到这种等离子凝聚体。

4. 在强磁坩和相当小浓度的条件下, 对于有一定速度的温度分布的、和在单位长度内有一定体电荷的粒子束来说, 上面得到的等离子凝聚状态是唯一的稳定状态。

当朗格密尔频率与拉摩频率之比很大时, 稳定状态的唯一性破坏了, 产生了新的、非等离子凝聚体的稳定状态, 它属于空间均匀分布状态。当上述二频率之比相当大时, 等离子凝聚状态根本消失了。

5. 等离子凝聚状态的积分方程具有下面的形式:

$$\theta = \frac{m\omega_L^2 D^2}{4} \frac{1}{\psi(\lambda)},$$

式中 $\psi(\lambda)$ 用下面的积分通过特殊函数 $\varphi(x, \lambda)$ 来表示:

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty x e^{-x^2 + \varphi(x, \lambda)} dx.$$

$\psi(x, \lambda)$ 是下列方程式的解:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\varphi}{dx} \right) = \lambda e^{-x^2 + \varphi},$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

$$\left(\lambda = 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2}, \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}, \omega_L^2 = \left(\frac{eH}{2mc} \right)^2 \right).$$

現在列出用“斯特列拉”(Стрела)计算机得出的函数 $\psi(\lambda)$ 的数值积分结果:

从此表可以看出, 等离子凝聚状态的条件

λ	$\psi(\lambda)$
0	0.5000
10^{-3}	0.5001
10^{-2}	0.5009
10^{-1}	0.5089
1	0.6080
2	0.7903
3	1.1933
4	60.1981
5	$> 10^{10}$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2 + \varphi(x, \lambda)} dx < \infty.$$

在 $\lambda < 5$ 时是满足的. 当 λ 值在 0 到 1 之间时, $\psi(\lambda)$ 的改变很小:

$$\frac{1}{2} \geq \psi(\lambda) \geq 0.6080.$$

最后我对北京大学物理系的王竹溪教授和赵凯华同志表示衷心的感谢, 感谢他们对我的热情招待和对我的工作的关怀.

附 录 I

現在我們把不等式 (3.12) 中的函数序列 u_n (参看 3.11) 的一些必要性加以明确化.

在所援引过的数学著作中, 方程稍异于 (3.10) 式, 它们的不同, 或是由于积分区是有限的, 或是表现在格林函数和方程 $\Delta u - pu = 0$ 中函数 $p(x, y) > 0$ 的一些特殊性上. 在我們的情形中, 积分区是无穷大的, 并且函数 $p(x, y)$ 是严格确定的.

1. 所有的 $u_n < 0$ 因为格林函数都是正的(椭圆方程的性质), 所以公式 (3.11) 表明 $u_1 < 0$. 如果 $u_{n-1} < 0$, 则 $e^{u_{n-1}} - u_{n-1} > 0$, 于是从 (3.11) 式中又可得到下面的结论, 即 $u_n < 0$ 对于所有的 n 都成立.

2. 对于任意的 n , $u_{n-1} - u_n < 0$ 我們有

$$u_0 - u_1 > 0;$$

其次

$$u_{n+1} - u_n = -\lambda \int_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} [u_{n-1} - u_n + e^{u_{n-1}} (e^{u_n - u_{n-1}} - 1)] d\xi d\eta. \quad (I.1)$$

我們假设, $u_{n-1} - u_n = x > 0$, 那么从条件

$$1 - e^{-x} < x$$

可得出

$$u_{n-1} - u_n + e^{u_{n-1}} (e^{u_n - u_{n-1}} - 1) > (u_{n-1} - u_n) (1 - e^{u_n}).$$

但根据第一个性质 $u_{n-1} < 0$ 和条件 $u_{n-1} - u_n > 0$, 我們便得出

$$u_{n-1} - u_n + e^{u_{n-1}} (e^{u_n - u_{n-1}} - 1) > 0,$$

利用此式, 我們可从(I.1)中得出

$$u_{n-1} - u_n < 0,$$

这点正是需要証明的。

3. 存在下面的不等式

$$u_n - u_{n+1} < \lambda \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} (u_{n-1} - u_n) d\xi d\eta.$$

因为, 根据第二个性質 $e^{u_n - u_{n-1}} < 1$, 因此从(I.1)中可得出:

$$u_{n+1} - u_n = -\lambda \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} [u_{n-1} - u_n - e^{u_n - u_{n-1}} |e^{u_n - u_{n-1}} - 1|] d\xi d\eta,$$

由此我們即可得出上面的不等式。

4. 我們用 M_n 来表示 $u_n - u_{n+1}$ 的极大值:

$$M_n = \max (u_n - u_{n+1}),$$

此时根据第三个性質

$$M_n \leq M_{n-1} \cdot S_0,$$

其中

$$S_0 = \max \lambda \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (\text{I.2})$$

因此, 將第二个和第四个性質加以联合, 可以写成

$$0 < u_n - u_{n+1} \leq M_0 S_0^n.$$

这个不等式正是我們在前面引用过的。我們看到, 它的有效性 with 积分区域的大小无关, 而且我們的函数 $p(x, y) = \exp [-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)]$ 的特殊形式, 只不过加强了积分(I.2)的收斂性。

在上面的証明中, 我們曾假設在式(3.11)中,

$$\iint_{(\infty)} K 4\pi \rho d\xi d\eta < \lambda \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta)} (e^{u_n} - u_n) d\xi d\eta,$$

利用 ρ 的定义, 可以得到

$$\iint_{(\infty)} K 4\pi \rho d\xi d\eta - \iint_{(\infty)} \lambda e^{-(\xi^2 + \eta^2) + w(\xi, \eta) + u(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

因为按照已証了的, $u_n < 0$, 和 $u_{n+1} < u_n$ (因而 $u < u_n$) 可以相信, 上面等式的右端比待証的不等式右端要小, 因为我們上面的假設是正确的。

附 录 II

方程 $\Delta \varphi = \lambda e^{-x^2 + \varphi}$ 的第一边界問題的解的唯一性, 当 λ 值很小时, 可由哈麦士坦 (Hammerstein) 方程同族的非綫性积分方程的一般分支理論工具中得出 (参看 Lichtenstein 的書^[42]). 我們的問題与数学家們研究的問題, 不同点在于积分区域无穷大. 但是, 这差異不是原則性的, 因为有乘在格林函数上的“屏蔽”因数 $e^{-(\xi^2 + \eta^2)}$. 这一点在前面 (附录 I 中) 从解的存在的例子中就可使我們相信了. 此处証明解的唯一性定理問題中, 情况

是完全相似的。

設 φ_λ 是当 λ 值相当小时的解, 我們来确定对于 $\lambda + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ 的解。我們有

$$\Delta \varphi_{\lambda+\varepsilon} = (\lambda + \varepsilon) e^{-x^2 + \varphi_{\lambda+\varepsilon}}, \quad \Delta \varphi_\lambda = \lambda e^{-x^2 + \varphi_\lambda}.$$

引入 $u = \varphi_{\lambda+\varepsilon} - \varphi_\lambda$, 我們得出

$$\Delta u - \lambda e^{-x^2} u = \varepsilon e^{-x^2 + \varphi_\lambda} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots \right) + \lambda e^{-x^2 + \varphi_\lambda} \left(\frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right).$$

在无穷大区域中, 这积分与下列积分等同:

$$u + \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{(\infty)} K(x, y; \xi, \eta) e^{-(\xi^2 + \eta^2) + \varphi_\lambda(\xi, \eta)} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \Phi\{u\}, \quad (\text{II} \cdot 1)$$

其中 $\Phi\{u\}$ 是 u 的非綫性泛函数, 其形式如下:

$$\begin{aligned} \Phi\{u\} = & \frac{-\varepsilon}{2\pi} \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + \varphi_\lambda(\xi, \eta)} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots \right) d\xi d\eta - \\ & - \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{(\infty)} K e^{-(\xi^2 + \eta^2)} \left(\frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2)$$

式中的 u, u^2 等取在 ξ, η 点上的值, 这里的 $K(x, y; \xi, \eta)$ 是方程 $\Delta u - \lambda e^{-x^2} u = 0$ 的格林函数。

方程 (II·1) 和 (II·2) 的形式, 是非綫性积分方程的全純解和非全純解理論的基础。

出現非全純解(分支解)的判据是下面的綫性方程有明显解($u \equiv 0$):

$$u + \lambda \iint_{T \rightarrow \infty} K e^{-(\xi^2 + \eta^2) + \varphi_\lambda(\xi, \eta)} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0. \quad (\text{II} \cdot 3)$$

但因为它是橢圓型的, 它沒有“固有振盪”, 这种固有振盪对出現分支解是必需的。这也可以从下面的微分方程直接看出:

$$\Delta u - \lambda e^{-x^2 + \varphi_\lambda} u = 0,$$

因为

$$\lambda e^{-x^2 + \varphi_\lambda} > 0,$$

因此方程 (II·1), (II·2) 有唯一解, 这解可用 ε 的整数幂(而不是分数幂)的展式方法求得:

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots.$$

从数学观点看来, 原始方程 (3·5) 之所以使人感兴趣, 是因为尽管分支不存在的判据在起作用, 当 $\lambda = 4$ 时, 它仍有分支。这一点可以解释为 $\varphi_{\lambda=4} = x^2 + y^2$ 这个解是不属于这族函数的而只对于这族函数来说, 判据才是有效的; 函数 $\varphi_{\lambda=4}$ 在我們所研究的无穷大区域中是不可积的:

$$\iint_{(\infty)} \varphi_{\lambda=4} d\xi d\eta = \infty.$$

附 录 III¹⁾

我們来确定有圓柱形对称和沒有外磁場的情形下电荷和势函数的分布。从方程

1) 參看第 194 頁。

(3.1), 我們得出

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \lambda e^\varphi \quad \left(\lambda = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{\theta}, \quad \varphi = \frac{-eV}{\theta} \right). \quad (\text{III.1})$$

此方程与蘭姆柯(L'emke)^[4]所解的方程不同之处只是系数 λ 前的符号不同。但是, 符号的改变对结果的影响是重大的。因此我們来研究一下得出的解。

引入新的变量 $x = r^2 e^\varphi$ 和 $y = r \frac{d\varphi}{dr}$, 求出 dx 和 dy 后, 我們得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda r e^\varphi dr}{(2+y) r e^\varphi dr} = \frac{\lambda}{2+y}.$$

积分后我們得

$$y^2 + 4y + 2c = 2\lambda x, \quad (\text{III.2})$$

其中 c 是任意积分常数。我們再回到函数 φ 上来($y = r \frac{d\varphi}{dr}$),

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + 4\pi \frac{d\varphi}{dr} + 2c = 2\lambda r^2 e^\varphi. \quad (\text{III.3})$$

但从另一方面來說, 关系式(III.1)有下面的形式:

$$2r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2r \frac{d\varphi}{dr} = 2\lambda r^2 e^\varphi. \quad (\text{III.4})$$

將(III.3)和(III.4)加以比較, 我們得出

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \frac{c}{r^2} = 0. \quad (\text{III.5})$$

在这方程中已不包含指数的非綫性, 并且它有里卡蒂(Riccati)方程的形式。最好我們作以下的代換:

$$\varphi = 2 \ln w + \ln \tau, \quad (\text{III.6})$$

式中 τ 是一常数, 它是待定的, 此时我們得出函数 w 的綫性方程:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{2r^2} w = 0. \quad (\text{III.7})$$

它的普遍积分是

$$w = \gamma_1 r^{\beta_1} + \gamma_2 r^{\beta_2},$$

代入后得到对 β_1 和 β_2 数值所加的条件, 即它們应是下列方程的根:

$$\beta^2 - 2\beta + \frac{1}{2}c = 0. \quad (\text{III.8})$$

γ_1 和 γ_2 是任意常数, 因此,

$$\varphi = -2 \ln (\gamma_1 r^{\beta_1} + \gamma_2 r^{\beta_2}) + \ln \tau.$$

如果現在將此函数代入原始方程(III.1), 我們便可确定 τ :

$$\tau = \frac{4\gamma_1\gamma_2(2-c)}{\lambda}.$$

不难看出, 常数值 $c \geq 2$ 的情况应不予考虑, 因为这时可能使得 φ 是复数, 或者当 $r=0$ 时有奇異点。

对于 $c < 2$ 來說, 为了使 $\ln \tau$ 是一实数, γ_1 和 γ_2 应有不同的符号。因此

$$\varphi = -2 \ln \left(\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} r^{\beta_1} - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} r^{\beta_2} \right) + \ln \frac{4(2-c)}{\lambda},$$

这里有兩個任意常数 γ_1/γ_2 和 c 。为了滿足对称条件,在圓柱体軸上应不存在电场强度: $\varphi'(0)=0$, 因而必須假設 $c=0$, 此时从(III·8)中得知 $\beta_1=0$, $\beta_2=2$:

$$\varphi = -2 \ln \left\{ \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} - \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} r^2 \right\} + \ln \frac{8}{\lambda}.$$

因此得出的解是奇異的。

解的奇異性必須与器壁的存在联系起来,因为没有器壁存在,帶相同符号电荷的稳定分布是不可想象的。这里有兩種可能性:圓柱形器壁的半徑是任意的和是被系統参量精确地确定的(由 λ 值所确定的):

$$\varphi = -2 \ln \left[1 - \left(\frac{r}{D} \right)^2 \right] + \ln \frac{8}{\lambda D^2}$$

和

$$\varphi = -2 \ln \left(1 - \frac{\lambda}{8} r^2 \right). \quad (\text{III} \cdot 9)$$

在兩種情形里只是当 $r=0$ 时电势的規格化不同。当 $\lambda D^2=8$ 时它們彼此符合。

我們得到以下的密度分布:

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{r}{D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

上面指出的解在 § 3 的結尾处我們也曾介紹过。在解中出現的奇異性可用引入短程排斥力和器壁来消除,在它們的作用下可以想象,我們所研究的相互排斥的粒子集合是可以維持住的。

参 考 文 献

- [1] 关于等离子凝聚体存在的判据問題請参看:
Бласов, А. А., *Вестник МГУ* 4 (1957), 95 和 Теория многих частиц 一書中有关之問題 (Гостехиздат, 1950).
- [2] 关于“箱制效应”的理論与实验請参看:
Bennett, W. H., *Phys. Rev.* 45 (1934), 890;
Куратов, И. В., *Атомная энергия* 3 (1956), 65.
- [3] 关于奧奥尔特分布函数請参看:
Чандрасекар, С., “Принципы звездной динамики” И. Л. Москва (1948).
- [4] 关于方程 $\Delta\varphi = \rho e^{\varphi}$; $\rho(x, y) > 0$ 的第一边界問題解的存在和唯一性請参看:
Bieberbach, L., *Math. Annalen* 77 (1916), 173—212;
Lichtenstein, L., *Vorlesungen über einigen Klassen nichtlinearen Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, Berlin (1931), 84—86;
Курант Р. 和 Гильберт, Д., *Методы мат. физики*, т. 2. Гостехиздат (1945), стр. 323—324;
Lemke, H. 的著作参看 *J. für Math.* 142 (1913), 118.

НОВЫЙ ПРИНЦИП СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЛАЗМОИДОВ

А. А. Власов

РЕЗЮМЕ

Детальный учет влияния на пучок заряженных частиц одного знака (ядер или электронов) четырех факторов—внешнего магнитного поля, параллельного оси пучка, вращения пучка при надлежащем его толковании, сил взаимного отталкивания частиц вследствие наличия объемного заряда и температурного разброса скоростей—приводит к наличию определенного стационарного состояния движения частиц в пучке.

Это стационарное состояние характеризуется сильно очерченной цилиндрической границей пучка, радиус которого, как оказывается, является не произвольным, а определяется перечисленными выше факторами. Именно существует определенное соотношение между эффективным радиусом, температурой и магнитным полем пучка. При соответствующих значениях магнитных полей и размеров можно ожидать температур порядка 10^{10} — 10^{12} °К. Пучок вращается не с циклотронной, а по крайней мере на периферии, с ларморовской частотой.

При определенных условиях на концентрацию и магнитное поле пучок является устойчивым в отношении изменения этих величин. Имеет место скачкообразное нарушение устойчивости (появляются точки ветвления), когда указанные условия выходят из своих рамок.