

高能电子对原子核 C^{12} 的弹性散射*

金星南

(中国科学院原子能研究所)

一. 导 言

近几年来,霍夫斯塔脱(Hofstadter)等曾用直线电子加速器所产生的高能电子对各种原子核做散射实验^[1]. 在轻原子核的领域内,他们曾详细研究了对原子核 C^{12} 的散射(包含弹性散射与非弹性散射)^[2].

许多作者曾用计算相移的方法来分析高能电子对较重的原子核的弹性散射^[3]. 对于高能电子对原子核 C^{12} 的弹性散射实验是用波恩近似来分析^[4]的.

在散射角度大的时候,波恩近似是不很正确的. 根据弗莱哥(Fregeau)的估计,在能量为 187 Mev 的电子对原子核 C^{12} 的弹性散射中,当散射角大于 90° 时,用波恩近似所算得的结果已经不正确了,而现在在实验中曾测量到散射角为 138° 的弹性散射截面^[5]. 所以为了更正确地分析在这样大的散射角下的散射现象,我们必须用计算相移的方法.

在这工作中,我们计算能量为 187 Mev 的电子对原子核 C^{12} 散射时的各部分波的相移. 利用这些相移,我们可以求得在各种散射角度下的弹性散射截面.

我们在这计算中所取的原子核 C^{12} 的电荷分布是比较简单的三种情况:(1)高斯分布;(2)指数函数分布;(3)均匀分布. 我们见到,当我们对原子核 C^{12} 的电荷分布取高斯分布的时候所算得的结果与实验符合得较好. 我们在这种情况下定得原子核的半径 $R = (12)^{\frac{1}{3}} r_0$, 其中 $r_0 = 1.35 \times 10^{-13}$ 厘米.

二. 高能电子对原子核散射的基本公式

高能电子对原子核散射时,电子的角动量量子数为 l 的部分波的波函数的径向部分 $g_l(r)/r$ 与 $f_l(r)/r$ 应适合下列方程系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} g_l(r) - \frac{l+1}{r} g_l(r) + \frac{1}{\hbar c} (E-V) f_l(r) &= 0, \\ \frac{d}{dr} f_l(r) + \frac{l+1}{r} f_l(r) - \frac{1}{\hbar c} (E-V) g_l(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

我们如令

* 1958年8月2日收到.

$$\left. \begin{aligned} kr &= x, \\ k &= \frac{E}{\hbar c}, \\ v &= \frac{1}{\hbar c} \frac{V}{k}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

則方程系(1)可以化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} g_l(x) - \frac{l+1}{x} g_l(x) + (1-v) f_l(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} f_l(x) + \frac{l+1}{x} f_l(x) - (1-v) g_l(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

方程系(1)与(2)中的 \hbar 是普朗克常数除以 2π , c 是光速, E 为电子的能量, V 为原子核对电子所产生的势, 它是由所取的原子核的电荷分布而决定的。因之方程系(3)中的 v 也是由原子核的电荷分布而决定。

我們所取的原子核的电荷分布有下列三种:

(1) 高斯分布

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x^2}{b^2}}; \quad (4)$$

(2) 指数函数分布

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{a}}; \quad (5)$$

(3) 均匀分布

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0, & \text{当 } 0 < x < kR, \\ 0, & \text{当 } x > kR, \end{cases} \quad (6)$$

其中 ρ_0 是一常数, 它可由下列条件决定:

$$\int_{v_1}^{\infty} \rho(x) dx = Ze \quad (7)$$

(v_1 为 x 的全部空间)。在上述三种电荷分布下, v 的形式为:

(1) 在高斯分布下:

$$v = -\frac{Ze^2}{\hbar c} \frac{1}{x} \frac{2}{b\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy; \quad (8)$$

(2) 在指数函数分布下:

$$v = -\frac{Ze^2}{\hbar c} \left\{ \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{x}{a}} \right\}; \quad (9)$$

(3) 在均匀分布下:

$$v = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{\hbar c} \frac{3}{2kR} \left(1 - \frac{x^2}{3k^2 R^2} \right), & \text{当 } 0 < x < kR, \\ -\frac{Ze^2}{\hbar c} \frac{1}{x}, & \text{当 } x > kR. \end{cases} \quad (10)$$

方程(3)的解 $g_l(x)$ 与 $f_l(x)$ 的渐近式为

$$\left. \begin{aligned} g_l(x) &\longrightarrow \sin\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l\right\}, \\ f_l(x) &\longrightarrow \cos\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 η_l 为角动量量子数为 l 的部分波的相移, 这相移是与 v 的形式有关的.

当算得了相移 η_l , 我们就可以求得散射振幅 $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l e^{2i\eta_l} (l+1) [P_l(\cos\theta) + P_{l+1}(\cos\theta)]. \quad (12)$$

在我们的计算中, 我们把 $f(\theta)$ 写为

$$f(\theta) = f_p(\theta) + [f(\theta) - f_p(\theta)], \quad (13)$$

其中函数 $f_p(\theta)$ 是电子对于具有电荷 Ze 的点电荷的库仑作用下的散射振幅, 这函数可以单独求得(见本文第四节). $f(\theta) - f_p(\theta)$ 是一按 l 展开的级数, 它收敛得相当快. 能量为 187 Mev 的电子对原子核 C^{12} 散射时, 我们只须取 $l=0, 1, 2, 3$ 的四项之和.

电子对于原子核的散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \sec^2 \frac{\theta}{2}. \quad (14)$$

三. 相移的计算

原子核 C^{12} 的半径可由下式给出:

$$R = (12)^{\frac{1}{3}} r_0, \quad (15)$$

而

$$r_0 = \frac{1}{(12)^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle \right]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\langle r^2 \rangle$ 为原子核半径的平方的平均值.

相当于 r_0 , 我们就有 $x_0 = kr_0$. 我们把 x 按 x_0 分成二个区域来考虑方程系(3)的解.

当 $x < x_0$ 的时候, 即相当于在原子核内部的时候, 我们令方程系(3)的解为 $G_l(x)$ 与 $F_l(x)$.

当 $x > x_0$ 的时候, 即相当于在原子核外部的时候, 方程系(3)的解为

$$\left. \begin{aligned} g_l(x) &= A_l g_l^R(x) + B_l g_l^I(x), \\ f_l(x) &= A_l f_l^R(x) + B_l f_l^I(x), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $g_l^R(x)$ 与 $f_l^R(x)$ 为电子在库仑场作用下的正则解, $g_l^I(x)$ 与 $f_l^I(x)$ 为电子在库仑场作用下的非正则解, A_l 与 B_l 为任意常数, 这二常数可由 $x = x_0$ 时方程系(3)的原子核内部的解 $G_l(x)$ 与 $F_l(x)$ 与原子核外部的解 $g_l(x)$ 与 $f_l(x)$ 相等的边界条件来决定, 即由

$$\left. \begin{aligned} G_l(x_0) &= A_l g_l^R(x_0) + B_l g_l^I(x_0), \\ F_l(x_0) &= A_l f_l^R(x_0) + B_l f_l^I(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

来决定. 由此得到

$$\frac{A_l}{B_l} = \frac{g_l^I(x_0)w_l(x_0) - f_l^I(x_0)}{f_l^R(x_0) - g_l^R(x_0)w_l(x_0)}, \quad (18)$$

其中

$$w_l(x) = \frac{F_l(x)}{G_l(x)}, \quad (19)$$

而 $w_l(x)$ 适合下列微分方程:

$$\frac{d}{dx} w_l(x) + 2 \frac{l+1}{x} w_l(x) - (1-\nu)(1+w_l^2(x)) = 0. \quad (20)$$

我們用密尔恩方法求方程(20)的解在 $x_0 = 2.85$ 的值^[6]。

函数 $g_l^r(x)$, $f_l^r(x)$, $g_l^i(x)$, $f_l^i(x)$ 可以取叶尼(Yennie)、拉文哈尔(Ravenhall)、威尔逊(Wilson)的幂级数的表式^[7], 这些公式可以在叶尼、拉文哈尔、威尔逊的文章中见到, 我們不把它们写在这里。这四函数的渐近式为

$$\left. \begin{aligned} g_l^r(x) &\longrightarrow \sin\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l^r\right\}, \\ f_l^r(x) &\longrightarrow \cos\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l^r\right\}, \\ g_l^i(x) &\longrightarrow \sin\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l^{r'}\right\}, \\ f_l^i(x) &\longrightarrow \cos\left\{x + \frac{Ze^2}{\hbar c} \ln 2x - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \eta_l^{r'}\right\}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 η_l^r 为电子对庫仑场的正则解的相移, $\eta_l^{r'}$ 为电子对庫仑场的非正则解的相移。

根据(11)、(21)、(16), 我們可以推得下列关系:

$$\tan(\eta_l - \eta_l^r) = \frac{\sin(\eta_l^r - \eta_l^{r'})}{\frac{A_l}{B_l} + \cos(\eta_l^r - \eta_l^{r'})}, \quad (22)$$

其中

$$e^{2i\eta_l^r} = -\frac{l+1}{\rho_{l+1} - i\frac{Ze^2}{\hbar c}} \frac{\Gamma\left(1 + \rho_{l+1} - i\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)}{\Gamma\left(1 + \rho_{l+1} + i\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)} e^{-\pi i(\rho_{l+1} - l)}, \quad (23)$$

$$e^{2i(\eta_l^r - \eta_l^r)} = -\frac{1 + i \cot \pi(1 - \rho_{l+1}) \tan \operatorname{h} \frac{Ze^2}{\hbar c} \pi}{1 - i \cot \pi(1 - \rho_{l+1}) \tan \operatorname{h} \frac{Ze^2}{\hbar c} \pi} e^{2\pi i(\rho_{l+1} - l - 1)}, \quad (24)$$

而

$$\rho_{l+1} = \sqrt{(l+1)^2 - \left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^2}. \quad (25)$$

利用公式(24)、(18)、(22), 我們求得在三种不同电荷分布下的 $\eta_l - \eta_l^r$ 的值, 我們把这些值列在表1中。

表1 在不同电荷分布下的 $\eta_l - \eta_l^0$ 的值

l	均匀分布	高斯分布	指数函数分布
0	-0.022957	-0.019743	-0.015726
1	-0.007245	-0.004288	-0.003051
2	-0.000372	-0.000473	-0.000602
3	-0.000024	-0.000062	-0.000085

利用公式(23), 我们可以求得 $l=0, 1, 2, 3$ 时的 η_l^0 . 这样我们就求得在不同电荷分布下的 η_l .

(13) 式中的第二项 $f(\theta) - f_p(\theta)$ 是由下式直接算得的:

$$f(\theta) - f_p(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (e^{2i\eta_l} - e^{2i\eta_l^0}) (l+1) \times \\ \times [P_l(\cos\theta) + P_{l+1}(\cos\theta)]. \quad (26)$$

四. (13) 式中第一项 $f_p(\theta)$ 的计算

(13) 式中第一项 $f_p(\theta)$ 是电子对于点电荷所产生的场的散射振幅, 这振幅的值曾由费许巴赫 (Feshbach) 计算^[8]过. 但是在他的计算中的正确有效数字的位数对于我们的需要来讲是不够的, 因此在我们的情况下, 必须要重新计算这函数的值.

我们这里用叶尼、拉文哈尔、威尔逊所提出的方法来计算 $f_p(\theta)$.

函数 $f_p(\theta)$ 可以写成下列形式:

$$f_p(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l a_l P_l(\cos\theta), \quad (27)$$

其中

$$a_l = l e^{2i\eta_{l-1}^0} + (l+1) e^{2i\eta_l^0}. \quad (28)$$

利用拉昂特耳多项式 $P_l(\cos\theta)$ 的特性, 公式(27)可以改写为

$$(1 - \cos\theta)^m 2ik f(\theta) = \sum_l a_l^{(m)} P_l(\cos\theta), \quad (29)$$

这公式右边的系数间存在着下列关系:

$$a_l^{(i+1)} = a_l^{(i)} - \frac{l+1}{2l+3} a_{l+1}^{(i)} - \frac{l}{2l-1} a_{l-1}^{(i)}. \quad (30)$$

这样, 公式(29)的右边是一个收敛得很快的级数. 在 $Z=6$ 的情况下, 我们取 $m=2$, 就可很快地把(29)右边的级数算得五位有效数字的值.

五. 计算结果

根据三、四两节的计算, 并利用公式(14), 我们可以求得在各种角度下的散射截面.

虽然我们只计算了 $x_0=2.85$ 的情况, 在 $x_0=2.80, 2.87, 2.90$ 时的散射截面, 则可以用叶尼、拉文哈尔、威尔逊^[7]所提出的内插法算得.

在我們所考虑的原子核的三种电荷分布中,由于均匀分布所算得的值与实验结果相比较时在大角度下是过小,由于指数函数分布所算得的值与实验结果相比较时在大角度下是过大,由于高斯分布所算得的值是与实验结果比较符合,并且在 $\alpha_0 = 2.90$ 时与实验结果符合得最好。这是相当于 $r_0 = 1.35 \times 10^{-13}$ 厘米的情况(见图 1)。

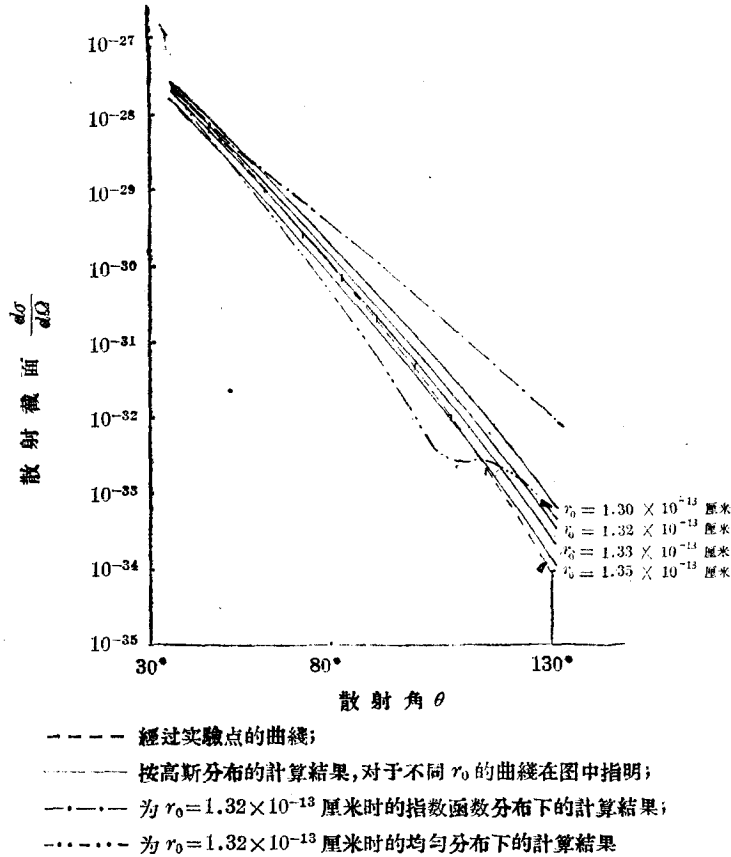


图 实验结果与计算结果间的比较

六. 讨 论

在这工作中,我们只考虑了三种比较简单的电荷分布的情况,并且在电子与原子核之间仅考虑了库仑作用。从图 1 中,我们见到,当原子核 C^{12} 的电荷在高斯分布情况下所算得的结果与实验比较符合。

弗莱哥曾在波恩近似下用更复杂的电荷分布(含有二个参变数的电荷分布)分析过能量为 187 Mev 的电子对原子核 C^{12} 的弹性散射,电荷分布中的二个参变数是按与实验结果符合得最好的情况来决定的,这样所得的与原子核 C^{12} 的大小有关的 r_0 值,比我们这里所得的值较小,他所算得的值是 $r_0 = 1.33 \times 10^{-13}$ 厘米。

我们这里所考虑的电子对原子核 C^{12} 的散射是最初步的情况,要详细研究这问题,只考虑电子与原子核间由于电场作用而引起的弹性散射是不够的。我们除了考虑原子核的电荷分布外,还须考虑电子与原子核间的磁性作用、电子与原子核作用时所引起的色散

現象和輻射修正等。

这项工作的一部分計算是由郭秉荣、华文賢、康聖棠、卫云銘、李曼等同志做的, 特此誌謝。

参 考 文 献

- [1] Hofstadter, R., *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956), 214.
- [2] Fregeau, J. H. and Hofstadter, R., *Phys. Rev.* **99** (1955), 1503. Fregeau, J. H., *Phys. Rev.* **104** (1956), 225.
- [3] Yennie, D. R., Ravenhall, D. G. and Wilson, R. N., *Phys. Rev.* **95** (1954), 500. Brown, G. E. and Elton, L. R. B., *Phil. Mag.* **46** (1955), 161. Hahn, B., Ravenhall, D. G. and Hofstadter, R., *Phys. Rev.* **101** (1956), 1131.
- [4] 参阅[2]中弗萊哥的文章。
- [5] 同[4]。
- [6] 关于密尔恩的积微分方程的方法, 可参阅金星南: 計算数学講义(尚未出版), 第七章, 或 Milne, W. E., *Numerical Solution of Differential Equations* (New York, 1953).
- [7] 参阅[3]中的叶尼、拉文哈尔、威尔遜合著的文章。
- [8] Feshbach, H., *Phys. Rev.* **88** (1952), 295.

ELASTIC SCATTERING OF HIGH ENERGY ELECTRONS WITH NUCLEI C^{12}

KING SING-NAN

(Institute of Atomic Energy Research, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, we have calculated the elastic scattering of high energy electrons with nuclei C^{12} by phase shift calculation.

We take the charge distribution of the nucleus C^{12} as following:

$$(1) \text{ exponential distribution: } \rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{a}},$$

$$(2) \text{ gaussian distribution: } \rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x^2}{b^2}},$$

$$(3) \text{ uniform distribution: } \rho(x) = \begin{cases} \rho_0 & \text{when } 0 < x < kR, \\ 0 & \text{when } x > kR, \end{cases}$$

where a and b are the parameters, and the constant R is the radius of the nucleus C^{12} . The energy of the electrons is 187 Mev.

The result of the calculation shows that the gaussian distribution confirms the experimental result better than the other two kinds of distributions, and gives

$$R = (12)^{\frac{1}{3}} r_0,$$

where $r_0 = 1.35 \times 10^{-13}$ cm.