第15卷 第7期 1959年7月
物理学报 ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 15, № 7 July 1959

普适費米弱相互作用理論及 μ^- 介子在原子核上的俘獲*

周光召 B. 馬耶夫斯基
(联合原子核研究所，莫斯科)

一. 引 言

由 Feynman 及 Gell-Mann; Sudarshan 及 Marshak[7] 所提出的 $V-A$ 耦合弱作用已为現有的全部的 β 衰变的实驗所証实。在工作[1]中，作者認为一切弱作用的汉密頓量的形式是一样的，因而提出了普适費米弱相互作用理論(以后簡称为普适弱作用理論)。

有些粒子(例如核子)和 π 介子及 K 介子有强作用，而有些粒子(例如 μ 介子)則沒有这种作用。由于强作用的影响，物理核子和 μ 介子衰变的情况便会不同。虽然它們衰变的汉密頓量的形式完全相同，但实际观察到的弱作用耦合常数却可能不同。由强作用而引起的耦合常数的变化称为耦合常数的重正化效应。要判別弱作用的普适性，必須考慮到重正化的效应。

令 μ 介子在核子上俘获的汉密頓量密度为

$$H(x)=J_\alpha\bar{\psi}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\psi_\mu, \tag{1}$$

其中 $J_\alpha=\frac{g_0}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_n\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\psi_p$ 为核子弱作用电流矢量；g_0 为未經重正化的耦合常数；场量算符 ψ 右下角的标符 μ,ν,p,n 标誌着不同的粒子，γ_α 为狄拉克算符。(1)式中的汉密頓量密度是对 α 求和的。

如原子核的初态为 $|i\rangle$，末态为 $|f\rangle$，μ 介子开始时处于最低的波尔軌道上，且忽略 μ 介子的波函数 $\varphi(x)$ 在原子核上的变化，则 μ 介子在原子核上俘获的跃迁矩陣可以表成下列形式1)：

$$T_{fi}=\int\langle f|J_\alpha(x)|i\rangle\frac{1}{(2\pi)^3}\,\bar{u}_\nu(k)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu\varphi(0)\cdot e^{-i(k-p_\mu)\cdot x}\,d^4x, \tag{2}$$

其中 u_μ 为 μ 介子的狄拉克旋量，其相应的动量 $\mathbf{p}_\mu=0$，而其能量 $p_{\mu0}=m_\mu$；m_μ 为 μ 介子的靜止質量；$u_\nu(k)$ 为中微子的狄拉克旋量，它的动量能量矢量为 k。(2)式是从(1)式对弱作用取一級微擾求得的。为了把强作用的效果全部算进去，(2)式中 $J_\alpha(x)$ 是处于海森堡表象之中(对强作用講)，而 $|i\rangle$ 及 $|f\rangle$ 为物理原子核之狀态矢量(其中包含了介子云的作用)。

* 1959年2月22日收到。

1) 以后均采用單位系統 $\hbar=c=1$，且 $a\cdot b=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-a_0b_0$，$\mathbf{a}$ 及 a_0 分別为四元矢量 a 的空間及时間分量。

根据强作用对移动羣不变的性質，有

$$J_\alpha(x)=e^{-i\hat{p}\cdot x}J_\alpha(0)e^{i\hat{p}\cdot x}, \tag{3}$$

其中 $\hat{p}$ 为原子核系統的动量能量算符。由于始态及末态都是 $\hat{p}$ 的本征态，其本征值各为 p_i 及 p_f，故將(3)代入(2)可得

$$T_{fi}=(2\pi)\delta^4(p_f+k-p_i-p_\mu)\cdot\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle\overline{u}_\nu(k)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu\varphi(0). \tag{4}$$

我們先来看 μ^- 介子在質子上俘获的情况，此时始态为物理質子，而末态为物理中子。根据相对論不变性，$\langle f|J_\alpha|i\rangle$ 应是一四元矢量，它的最普遍的形式为[3]

$$(2\pi)^3\langle n|J_\alpha|p\rangle=\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}(p_n)\Big\{\gamma_\alpha+\lambda\gamma_\alpha\gamma_5-i\frac{\mu}{4M}[\gamma_\alpha(\hat{p}_n-\hat{p}_p)-(\hat{p}_n-\hat{p}_p)\gamma_\alpha]+$$
$$+c(p_n-p_p)_\alpha+d[\gamma_\alpha(\hat{p}_n-\hat{p}_p)-(\hat{p}_n-\hat{p}_p)\gamma_\alpha]\gamma_5+\frac{f}{im_\mu}(p_n-p_p)_\alpha\gamma_5\Big\}u(p_p), \tag{5}$$

其中 $u(p)$ 为核子的狄拉克旋量，p_p 及 p_n 为始态質子及末态中子的动量能量矢量；M 为核子質量；g, λ, μ, c, d 及 f 都是标量 $(p_n-p_p)^2=(\mathbf{p}_n-\mathbf{p}_p)^2-(p_{n0}-p_{p0})^2$ 的函数；$\hat{a}=\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}+ia_0\gamma_4$。由于在原有汉密頓量的电流密度 $J_\alpha(x)$ 中具有下列对称性質[6]，即令 p_c 及 n_c 代表質子及中子的电荷共軛（或其反粒子），通过变换 $p\to n_c$, $n\to p_c$, $\pi\to-\pi$ 后，矢量弱作用电流 $\bar{\psi}_n(x)\gamma_\alpha\psi_p(x)$ 改变符号，而贋矢量弱作用电流 $\bar{\psi}_n(x)\gamma_\alpha\gamma_5\psi_p(x)$ 不变号，故在电流跃迁矩陣 $\langle n|J_\alpha(x)|p\rangle$ 中也应具有相同性質。这是因为强作用也对上述变换守恒的关系。由此卽可証明 $c=d=0$。

如果不存在强作用，則由(1)及(2)应当得到

$$(2\pi)^3\langle n|J_\alpha(0)|p\rangle=\frac{g_0}{\sqrt{2}}\overline{u}(p_n)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u(p_p). \tag{6}$$

换句話講，μ 及 f 应等于零，且 $g=g_0$, $\lambda=1$。一般講来，强作用不仅可以改变 g_0 的值，而且还会增加新的电流項。

如果注意到核子由于强作用的存在会得到很大的反常磁矩的事实，就不会感到太奇怪了。此时，在电磁作用中，不仅有通常由电荷运动引起的电流，还会有因反常磁矩引起的电流。在衰变的問題中也有类似的現象。由于电磁作用电流是矢量，故弱作用中的矢量电流有許多性質是与电磁作用电流相似的，我們可以將 g 称之为 β-电荷，而 μ 称之为 β-磁矩。

在电磁作用中，由于电流守恒定律，虽有强作用的存在，物理質子的电荷和裸質子的电荷是相同的，也就和沒有强作用的粒子（例如电子）的电荷大小一样。强作用只改变了物理核子的磁矩。同样，在弱作用中，Gell-Mann 及 Feynman 发現由 μ 介子的衰变定出的耦合常数和 β 衰变中矢量耦合常数相近。这表明矢量耦合常数受强作用的影响很小。为了解释这一現象，F-G 提出了弱作用中矢量电流守恒的假定。在这一假定下，弱作用的矢量电流便和电磁作用矢量电流具有完全相似的性質，它們是同位旋空間中同一矢量的不同分量[4]。由此，在 $(p_n-p_p)^2=0$ 时，不仅 β 电荷 g 不受强作用的影响 $g=g_0$，而且 μ 应为質子与中子的反常磁矩之差，$\mu=3.7$。此外，g 和 μ 作为 $(p_n-p_p)^2$ 的函数与核子的电荷及磁矩分布函数相同。

在工作[5]中，我們曾計算了 β-磁矩对 μ 介子在質子上俘获过程的影响。結果表明，如果 Gell-Mann 和 Feynman 的假定是正确的，則 β-磁矩的效应在 20% 左右。由于 μ^- 介子在質子上俘获的几率太小，在[5]中即已提出要計算 β-磁矩对 μ 介子在原子核上俘获的影响，可以預計这一效应也不会很小。本文的目的就在完成这一任务。为了得到最普遍的結果，我們在本文中不仅考虑了 β-磁矩的效应，也考虑了 f 項的效应。

在第二节中，我們將給出俘获几率、中子与极化 μ 介子的角关联，以及中子极化的普遍公式。在第三节中我們將給出 μ^- 介子在質子上俘获的几率，角关联及中子极化的公式。第四节將討論 μ 介子在氘核上的俘获，第五节則將討論 μ 介子在原子核上的俘获。

二. μ^- 介子在原子核上俘获的普遍公式

把核子弱作用电流在核子自旋空間中表示出来，可以得到

$$(2\pi)^3\langle n|J_\alpha|p\rangle\bar{u}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu=A+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma},\tag{7}$$

其中 σ 为核子的自旋算符；

$$A=\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{u}_\nu\beta(1+\gamma_5)u_\mu+\frac{\mathbf{k}}{2M}\cdot\bar{u}_\nu\beta\rho_1\boldsymbol{\sigma}(1+\gamma_5)u_\mu\right),$$

$$\mathbf{B}=\frac{g}{\sqrt{2}}\Big[\lambda\bar{u}_\nu\beta\rho_1\boldsymbol{\sigma}(1+\gamma_5)u_\mu+\frac{\mu+1}{2M}i\mathbf{k}\Lambda\bar{u}_\nu\beta\rho_1\boldsymbol{\sigma}(1+\gamma_5)u_\mu-$$
$$-\frac{f-\lambda}{2M}\mathbf{k}\bar{u}_\nu(1-\gamma_5)u_\mu\Big].\tag{8}$$

在求(8)式时，所有与核子速度成平方的項都已忽略去，且用了 $\mathbf{p}_\mu=0,\ \mathbf{p}_n-\mathbf{p}_p=-\mathbf{p}_\nu=-\mathbf{k}$ 的条件。为了方便起見，以后用 μ' 代表 $\mu+1$，f' 代表 $f-\lambda$。

在 μ 介子及中微子的自旋空間中表示出来，(8)式可写成下列形式：

$$A=\frac{g}{2}\left(1+\frac{k}{2M}\right)(1-\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{B}=\frac{-g}{2}(1-\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{n})\left[\lambda\boldsymbol{\sigma}_\mu+i\frac{k}{2M}\mu'\mathbf{n}\Lambda\boldsymbol{\sigma}_\mu+\frac{f'}{2M}k\mathbf{n}\right],\tag{9}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为与中微子动量 $\mathbf{k}$ 平行的單位矢量。为了和核子的自旋算符区分开，我們在(9)式中用 $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ 来代表 μ 介子和中微子的自旋算符。从(9)式中可以看到，A 及 $\mathbf{B}$ 是 μ 介子及中微子自旋空間的算符，它們与核子的坐标及自旋沒有絲毫关系。

以上只考虑了 μ^- 介子在質子上俘获的矩陣元。当把原子核看作物理核子構成的体系，而假定每一物理核子的介子云受其他核子影响很小时，μ^- 介子在原子核上的俘获矩陣元与下式成正比：

$$R=\int\psi_f^*\sum_j\tau^{(-)}(j)(A+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}\psi_i dV.\tag{10}$$

其中 $\tau^{(-)}(j)$ 为把質子变成中子的同位旋算符，若第 j 个核子为質子，則經过 $\tau^{(-)}(j)$ 作用后变为中子，若它为中子，則 $\tau^{(-)}(j)$ 作用上去給出为零的結果。ψ_i 及 ψ_f 为原子核在始态与末态的波函数。通常中子总获得了足够能量而脫离原子核，因此末态波函数中包括逸出中子及殘留核之波函数。鑒于質量中心运动已經在(4)式中分离出去，ψ_f 中只包括中

子与殘留核的相对坐标，因之只与其相对动量 $\mathbf{p}=2\mathbf{p}_n+\mathbf{k}$ 的大小有关。

考虑到波函数具有全反对称的性質，(10)式可以表成下列形式：

$$R=Aa+\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} a&=N\int\psi_f^*\tau^{(-)}(1)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\psi_i dV,\\ \mathbf{b}&=N\int\psi_f^*\tau^{(-)}(1)\boldsymbol{\sigma}_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\psi_i dV, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 N 为原子核中的核子数。以后逸出的中子的自旋算符为 $\boldsymbol{\sigma}_1$。

利用(11)，可將(4)式写成

$$T_{fi}=(2\pi)^{-2}\delta^4(p_f+k-p_i-p_\mu)R\varphi(0). \tag{13}$$

注意到 $\varphi(x)$ 是 μ 介子在最低波尔軌道上的波函数，因此

$$|\varphi(0)|^2=\frac{Z^3}{\pi a_0^3}, \tag{14}$$

其中 a_0 为氫原子之波尔半徑，Z 为原子核的电荷。由(13)及(14)容易求得 μ^- 介子在原子核上俘获的几率及角关联。設原子核在始态未极化，可得

$$dw=(2\pi)^{-5}\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\frac{1}{2(2J+1)}\mathrm{Sp}R(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)R^+d\mathbf{p}_nd\mathbf{k}/dE, \tag{15}$$

其中 $\mathbf{P}_\mu$ 代表 μ^- 介子在始态的极化矢量；J 代表原子核在始态的总角动量；Sp 代表对始态及末态的磁量子数的求和。

中子的极化矢量 $\langle\boldsymbol{\sigma}_1\rangle$ 可以用下列公式表示出来：

$$[\mathrm{Sp}R(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)R^+]\langle\boldsymbol{\sigma}_1\rangle=\mathrm{Sp}R\boldsymbol{\sigma}_1(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)R^+. \tag{16}$$

下面一个問題是要把 Sp 求出来。我們先对原子核的始态及末态磁量子数求和，根据轉动及空間反映不变的性質，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,aa^+=F_1(E_N),\\ &\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,a\mathbf{b}^+=\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}a^+=0,\\ &\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}\mathbf{b}^+=F_2(E_N)\,\mathrm{I}+F_3(E_N)\mathbf{p}\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{17}$$

(17)式中第二式应为零是由于 $\mathrm{Sp}a\mathbf{b}^+$ 应是一贋矢量，但由一个矢量 $\mathbf{p}$（中子与殘留核的相对动量）却造不出贋矢量来，因此它只能为零。F_1 及 F_2 和 F_3 为中子能量 E_N 的函数，它們的具体形式隨每一个具体原子核的性質而有所不同。

同样，可以求得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,a\boldsymbol{\sigma}_1a^+=0,\\ &\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\,a\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{b}^+=F_4(E_n)\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{I}}+F_5(E_n)\mathbf{p}\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{1}{2J+1}\mathrm{Sp}\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{B}\sigma_1\mathbf{b}^+\cdot\mathbf{B}^+ = iF_6(E_N)\mathbf{B}\times\mathbf{B}^+ + iF_7(E_N)\mathbf{pp}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{B}^+),$$

其中 F_4, F_5, F_6 及 F_7 也是一些和原子核性質有关的函数。从(15)及(17)中可以看到，我們需要求出下列式子，即

$$\begin{aligned}&(1)\ \mathrm{Sp}\ A(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)A^+,\\ &(2)\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{B}\cdot(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+,\\ &(3)\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{P}(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}^+;\end{aligned}\tag{19}$$

而为了求得中子的极化，还需求出

$$\begin{aligned}&(4)\ \mathrm{Sp}\ A(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+,\\ &(5)\ \mathrm{Sp}\ A(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}^+,\\ &(6)\ \mathrm{Sp}\ \mathbf{B}\times(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+,\end{aligned}\tag{20}$$

这些式子都在附录 I 中給出。

將附录 I 中求出的結果代入(17)，(18)及(15)中，即得到 μ^-介子在原子核上俘获的几率及角关联。由(16)式可以求得中子的极化。

三. μ^-介子在質子上的俘获[6]

当我們考慮 μ^-介子在質子上的俘获时，得到特別簡單的結果。此时 ψ_i 及 ψ_f 只包含始态質子和末态中子的自旋波函数。在核子自旋空間表象中，容易求得

$$a=1,\quad \mathbf{b}=\sigma_1,\tag{21}$$

从(21)馬上可以求得(17)及(18)式的 F_i 函数，得到

$$\begin{aligned}&F_1=F_2=1,\quad F_3=0,\\ &F_4=F_6=1,\quad F_5=F_7=0.\end{aligned}\tag{22}$$

在公式(15)中，还应作一些修改，即当 μ^-介子为質子俘获时，末态只有中子及中微子(而不象其他情形下还有殘留核)，此时它們的动量滿足关系

$$\mathbf{p}_n=-\mathbf{k}.\tag{23}$$

而在計算末态的狀态数目时，不应再把 $\frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}$ 算进去。相应的几率公式为

$$dw=(2\pi)^{-2}\frac{1}{\pi a_0^3}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}R(1+\sigma_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)R^+d\mathbf{k}/dE.\tag{24}$$

由(17)，(18)，(24)及附录 I 可以算出 μ^-介子在質子上俘获的几率。

$$dw=(2\pi)^{-2}(\pi a_0^3)^{-1}2^{-1}g^2I[1-\alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}]k^2d\Omega,\tag{25}$$

其中

$$I=1+3\lambda^2+\beta(1-\lambda f')+\beta\mu'(2\lambda+\beta\mu'/2)+\frac{\beta^2}{4}f'^2,\tag{26}$$

$$I\alpha=1-\lambda^2+\beta((1-\lambda f')-\beta\mu'(2\lambda+\beta\mu'/2)+\frac{\beta^2}{4}f'^2,\tag{27}$$

此处

$$\beta=\frac{k}{M}.$$

如在(25)，(26)及(27)中，令 $f'=f-\lambda$，再把与 f 有关的項忽略去，我們即得到工

作[5]中的結果。本文中不仅考虑了β-磁矩的影响，而且考虑了由于重正化出現的贋标耦合的影响。由(26)及(27)中可以看到，如果f'及μ'均为正数，則它們的影响將在角关联系数中得到加强，而在俘获几率中的影响則將部分抵消。現有的实驗材料表明，I的値比$1+3\lambda^2$来得大(約大0.4—1倍)1)，这表明f'或者很小，或者是負数。这与在工作[2]中用色散关系估計出的f'不合。由色散关系估計出的f'为正数且很大。同时用实驗来研究俘获几率及角关联，卽同时定出I和α之値，將有助于搞清楚这个問題。

同样可以求出中子极化的公式，得到

$$I[1-\alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}]\langle\sigma_1\rangle=[a+b\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n}+c\mathbf{P}_\mu, \tag{28}$$

其中

$$a=2\left[\lambda(\lambda+1)+\frac{\beta}{2}\lambda+\beta\mu'(\lambda+\beta\mu'/4)-\frac{\beta}{2}f'-\frac{\beta^2}{4}f'\right], \tag{29}$$

$$b=\beta\left[f'(\lambda+1)+\mu'(\lambda+1)+\frac{\beta^2}{2}\mu'(f'+\mu')+\frac{\beta}{2}(f'+\mu')\right]=$$
$$=\beta(f'+\mu')\left(\lambda+1+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{2}\mu'\right), \tag{30}$$

$$c=2\left[\lambda^2-\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'(\lambda-1)-\frac{\beta}{2}f'\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)-\frac{\beta}{2}\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\right]=$$
$$=2\left[(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)-\left(\frac{\beta}{2}f'+\frac{\beta}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\right]=$$
$$=2\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\left(\lambda-1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}f'\right). \tag{31}$$

注意到(28)式中$\mathbf{n}$代表中微子运动方向，它与中子运动方向相反，故a的符号与[5]中不同，因在[5]中$\mathbf{n}$代表中子运动方向。此外公式(29)—(31)与[5]中給出的稍有不同，这是因为对高級項处理有不同的原故。此处給出的公式准确到β^2的数量級，較[5]中給出的更为正确。

可以看到，如果f'及μ'为正数，則它們的作用只在系数b中互相加强，而在a及c中都相互抵消一部分。

四. μ^-介子在氘核上的俘获

在过渡到复杂核去以前，我們先討論一个最簡單的原子核氘核。在这一最簡單的情况下已經可以表明μ^-介子在原子核上俘获的若干特征。

在氘核的情况下，由于总自旋守恆，末态的兩个中子或者处于自旋三重态或者处于自旋独态。令φ_s, φ_t及φ_d分別为末态中子在独态、三重态以及氘核之空間波函数，χ_s, χ_t及χ_d分別为其自旋波函数。我們將忽略張量力(卽氘核基态中D波)的貢献。由(12)可得

$$a=\chi_t^*\chi_d J_t,$$
$$\mathbf{b}=\chi_t^*\sigma_1\chi_d J_t+\chi_s^*\sigma_1\chi_d J_s, \tag{32}$$

1) 在与实驗比較中，我們假定普适弱作用理論是对的，且耦合常数随能量变化不大，因此g及λ的値都取自β-衰变中定出之値。

其中

$$J_t=\int\varphi_t^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/2}\varphi_d dV,$$
$$J_s=\int\varphi_s^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/2}\varphi_d dV, \tag{33}$$

$\mathbf{r}$ 为核子相对坐标．在自旋空間中表示出来，可得

$$\chi_t^*\chi_d=\frac{1}{4}(3+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2),$$

$$\chi_t^*\boldsymbol{\sigma}_1\chi_d=\frac{1}{16}(3+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{\sigma}_1(3+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)=\frac{1}{16}(8\boldsymbol{\sigma}_1+2\boldsymbol{\sigma}_2+i\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2), \tag{34}$$

$$\chi_s^*\boldsymbol{\sigma}_1\chi_d=\frac{1}{16}(1-\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{\sigma}_1(3+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)=\frac{1}{16}(4\boldsymbol{\sigma}_1-2\boldsymbol{\sigma}_2-3i(\boldsymbol{\sigma}_1\times\boldsymbol{\sigma}_2)).$$

將(32)及(34)式代回(17)及(18)式中，可得

$$F_1=|J_t|^2,$$
$$F_2=\frac{1}{3}(2|J_t|^2+|J_s|^2) \tag{35}$$

$$F_3=0,$$
$$F_4=\frac{4}{6}\left(|J_t|^2+\frac{1}{2}J_s^*J_t\right),$$
$$F_5=F_7=0, \tag{36}$$
$$F_6=\frac{1}{3}(|J_t|^2+2\mathrm{Re}J_s^*J_t).$$

將(35)，(36)代回(17)，(18)及(15)中，注意到

$$E=\frac{p_n^2}{2M}+\frac{(\mathbf{p}_n+\mathbf{k})^2}{2M}+k$$

及

$$MdE=kp_n\sin\theta\, d\theta.$$

在經过对中微子能量积分之后，可得

$$dw=(2\pi)^{-4}(\pi a_D^3)^{-1}\frac{g^2}{2}M^2I_D(1+\alpha_D\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{p}_n/p_n)\cdot dE_n d\Omega_n, \tag{37}$$

其中

$$I_D=(1+\overline{\beta})I_{tt}+\frac{1}{3}\left[3\lambda^2+\overline{\beta}\lambda(2\mu'-f')+\frac{\overline{\beta}^2}{2}\left(\mu'^2+\frac{1}{2}f'^2\right)\right][2I_{tt}+I_{ss}], \tag{38}$$

$$\alpha_D=(1+\overline{\beta})I'_{tt}-\frac{1}{3}\left[\lambda^2+\overline{\beta}\lambda(2\mu'+f')+\frac{\overline{\beta}^2}{2}\left(\mu'^2-\frac{f'^2}{2}\right)\right]\cdot(2I'_{tt}+I'_{ss}), \tag{39}$$

$$I_{ij}=\int_{k_{\min}}^{k_{\max}}J_i^*J_j k\,dk,$$
$$I'_{ij}=-\int_{k_{\min}}^{k_{\max}}J_i^*J_j\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n}{kp_n}k\,dk. \tag{40}$$

由于 $\beta=k/M$ 与 k 的大小有关，故在(38)及(39)式中都应將 β 換成某一平均的值 $\overline{\beta}$.

Überall 及 Wolgenstein[7] 在忽略了 β-磁矩的情形下計算了 μ^- 介子在氘核上的俘获. 如在(38)及(39)中，令 $\mu'=0$，并忽略高級无穷小（与 β^2 成正比的全部項），则我們的公式和[7]中給出的公式相合. 积分 I_{ij} 及 I'_{ij} 在[7]中已算出，故我們不必再計算它. 注意到，β-磁矩能改变 I_D 及 α_D 的值达20%左右.

同样可以求出中子极化的公式

$$I_D(1+\alpha_D\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{p}_n/p_n)\langle\sigma_1\rangle=a\mathbf{p}_n/p_n+b\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n/p_n^2+c\mathbf{P}_\mu+d\mathbf{P}_\mu\times\mathbf{p}_n/p_n, \tag{41}$$

其中

$$a=-\frac{2}{3}\left\{\left(\lambda^2+\beta\mu'\lambda+\frac{\beta^2}{4}\mu'^2\right)(I'_{tt}+2\operatorname{Re}I'_{st})+\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\beta}{2}f'\right)\operatorname{Re}(2I'_{tt}+I'_{st})\right\} \tag{42}$$

$$b=\frac{1}{3}\overline{\beta}\left\{(\mu'+f')\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right)(I''_{tt}+2\operatorname{Re}I''_{st})+\left(1+\frac{\overline{\beta}}{2}\right)(\mu'+f')\operatorname{Re}(2I''_{tt}+I''_{st})\right\} \tag{43}$$

$$c=\frac{2}{3}\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right)\left\{\left(\lambda-\frac{\overline{\beta}}{2}f'\right)(I_{tt}+2\operatorname{Re}I_{st})+\left(1+\frac{\overline{\beta}}{2}\right)\operatorname{Re}(2I_{tt}+I_{st})\right\}, \tag{44}$$

$$d=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{\overline{\beta}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right)\operatorname{Im}(2I'_{tt}+I'_{st}), \tag{45}$$

$$I''_{ij}=\int_{k_{\min}}^{k_{\max}}J_i^*J_j\frac{(\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{k})^2}{p_n^2k^2}kdk. \tag{46}$$

在(42)—(45)中，令 $\overline{\beta}=0$ 即得到[6]中的結果.

同样可以算出 μ^- 介子在不同精細狀态上俘获几率的差别[8]. 令 λ_+ 及 λ_- 分别代表 μ^- 介子在 $F=3/2$ 及 $F=1/2$ 态上俘获的几率，F 为 μ^- 介原子的总角动量. 且令 $\overline{\lambda}=\frac{2}{3}\lambda_++\frac{1}{3}\lambda_+$ 为平均之俘获几率，則容易求得

$$\frac{\lambda_+-\lambda_-}{3\overline{\lambda}}=-\frac{2b_1\operatorname{Re}\int I_{tt}dE_N+b_2\int(I_{tt}+I_{ss})dE_N}{\int I_DdE_N}, \tag{47}$$

其中

$$\begin{aligned}b_1&=\left(1+\frac{\overline{\beta}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right),\\ b_2&=\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right)\left(\lambda-\frac{\overline{\beta}}{2}f'\right).\end{aligned} \tag{48}$$

若不考虑中子在末态上的相互作用，則 $I_{ss}=I_{tt}$，

而

$$\frac{\lambda_+-\lambda_-}{3\overline{\lambda}}=\frac{-b}{a}, \tag{47$'$}$$

其中

$$\begin{aligned}b&=2b_1+2b_2=2\left(\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}\mu'\right)\left(1+\lambda+\frac{\overline{\beta}}{2}-\frac{\overline{\beta}}{2}f'\right),\\ a&=1+3\lambda^2+\overline{\beta}+\overline{\beta}\lambda(2\mu'-f')+\frac{\overline{\beta}^2}{2}\left(\mu'^2+\frac{1}{2}f'^2\right).\end{aligned} \tag{48$'$}$$

若令 $\mu'=0$，我們得到[8]中的結果。

順便在这里提一下，对其他原子核，如果采用費米气体模型，可得[8]

$$\frac{\lambda_+-\lambda_-}{\bar{\lambda}}=-\frac{b}{aZ'}\,\frac{2I+1}{I}\qquad \text{当}\quad I=L+1/2,$$
$$\frac{\lambda_+-\lambda_-}{\bar{\lambda}}=\frac{b}{aZ'}\,\frac{2I+1}{I+1}\qquad \text{当}\quad I=L-1/2, \tag{49}$$

其中 I 为原子核的自旋；L 为質子在始态时的軌道角动量；b 和 a 在附录 II 中給出：

$$Z'=(Z-1)\xi+1,$$

Z 为原子核电荷，ξ 为表示泡里作用的一因子。公式(49)在忽略 β-磁矩的情况下首先由[7]得出。在导出(49)时，我們采用了和[8]完全相同的近似和方法。

从(48′)中可以看到，若 f' 很小或为負数，則由于 β-磁矩的作用，a 和 b 都增加 20% 左右，而它們的比例改变很小。如果 $\beta f'$ 是正数而且很大，則可能使这一差別减小。

五. μ^-介子在原子核上的俘获

由于我們至今还不准确了解原子核的構造，沒有原子核的准确波函数，因此要准确計算 μ^- 介子在原子核上的俘获是不可能的。

已經有一些工作[9,10]，假定原子核可用費米气体模型或單核子壳层結構模型作为近似，計算了 μ^- 介子的俘获几率。在这些工作中都沒有考虑 β-磁矩的效应。

我們在这一节中將采用單核子壳层模型。Блохинцев 及 Долинский[9] 曾用这一模型計算了 μ 介子的俘获，我們將尽量利用他們計算的結果。

根据 [9] 中的公式 (9) 及 (10)，并与本文中相应的公式比較，可以得出如下的关于 F_i 函数的結論：

$$F_1=F_2,\qquad F_3=0,$$

工作[9]中引进的函数 A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 及 B_2 与我們的函数 F_i 的关系如下：

$$A_l(E_N)=(2\pi)^{-3}(\pi a_0^3)^{-1}Z^3(N-1)M^2\int_{k_{\min}}^{k_{\max}}F_1k\left(\frac{k}{2M}\right)^l dk,$$
$$B_l(E_N)=(2\pi)^{-3}(\pi a_0^3)^{-1}Z^3(N-1)M^2\int_{k_{\min}}^{k_{\max}}F_1k\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_n}{kp_n}\right)\left(\frac{k}{2M}\right)^l dk. \tag{50}$$
$$l=0,1,2.$$

利用(50)及(49)式，我們可以写出 μ^- 介子在原子核上俘获的几率及角关联如下：

$$dw=\frac{g^2}{2}I(1+\alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{p}_n/p_n)dE_Nd\Omega_N/(2\pi), \tag{51}$$

其中

$$I=(1+3\lambda^2)A_0(E_N)+(1+2\lambda\mu'-\lambda f')A_1(E_N)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\mu'^2+\frac{1}{4}f'^2+\frac{1}{4}\right)A_2(E_N), \tag{52}$$

$$-I\alpha=(1-\lambda^2)B_0(E_N)+(1-2\lambda\mu'-\lambda f')B_1(E_N)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu'^2+\frac{1}{4}f'^2\right)B_2(E_N). \quad (53)$$

在工作[9]中，計算了 Ca^{40} 及 O^{16} 核上的 $A_l(E_N)$和 $B_l(E_N)$函数，我們只需改变 A_l及B_l前的系数就能求得 β- 磁矩所給的貢献。

参 考 文 献

[1] Sudarshan, E. C. G. 及 Marshak, R. E., *Phys. Rev.* **109** (1958), 1860; Feynman, R. P. 及 Gell-Mann, M., *Phys. Rev.* **109** (1958), 193.
[2] Goldberger, M. L. 及 Treiman, S. B., *Phys. Rev.* **111** (1958), 354.
[3] Weinberg, S., 預印品.
[4] Gell-Mann, M., *Phys. Rev.* **111** (1958), 362; Герштейн, С. С. 及 Зельдович, Я. Б., *ЖЭТФ* **29** (1955), 698.
[5] Чжоу. Гуан-чжао (周光召) 及 Маевский, В, *ЖЭТФ* **35** (1958), 1581.
[6] Шапиро, И. С., Долинский, Э. И., Блохинцев, Л. Д., *ДАН СССР* **116** (1957), 946; *Nucl. Phys.* **4** (1957), 273. Huang, K., Yang, C. N., Lee, T. D., *Phys. Rev.* **108** (1957), 1340.
[7] Überall, H. 及 Wolgenstein, L., *Nouvo Cim.* X, (1958), 136.
[8] Bernstein, J., Lee, T. D., Yang, C. N. 及 Primakoff, H., *Phys. Rev.* **111** (1958), 313; Зельдович, Я. Б. 及 Герштейн, С. С., *ЖЭТФ* **35** (1958), 821.
[9] Долинский, Э. Й. 及 Блохинцев, Л. Д., *ЖЭТФ* **34** (1958), 759; *ЖЭТФ* **35** (1958), 1488.
[10] Tolhoek, H. A. 及 Luyten, L. R., *Nuclear Phys.* **3** (1957), 679; Иоффе, Б. Л., *ЖЭТФ* **33** (1957), 308; Überall, H., *Nuovo Cim.* **6** (1957), 533.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФЕРМИ И ЗАХВАТ μ^--МЕЗОНОВ ЯДРАМИ

Чжоу Гуан-чжао В. Маевский

(*Объединенный институт ядерных исследовании*)

Резюме

Рассчитаны вероятность захвата, угловое распределение и поляризация нейтронов, образующихся в результате поглощения поляризованных μ^--мезонов в водороде и дейтроне. Вычисляются также вероятность захвата и угловое распределение нейтронов при захвате μ^--мезонов ядрами. Проведены оценки эффекта β-магнетизма для разных явлений.

附　录 I

(1) $\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ A(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)A^+=\frac{g^2}{2}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2(1-\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n})$,

(2) $$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \mathbf{B}\cdot(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+=\frac{g^2}{2}\left\{\left[3\lambda^2+\lambda\beta(2\mu'-f')+\frac{\beta^2}{2}\left(\mu'^2+\frac{1}{2}f'^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\lambda^2+\lambda\beta(2\mu'+f')+\frac{\beta^2}{2}\left(\mu'^2-\frac{1}{2}f'^2\right)\right]\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}\right\},$$

(3) $$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ [A(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^++\mathbf{B}(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)A^+]=$$
$$=-\frac{g^2}{2}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left[2\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\mathbf{P}_\mu-\beta(\mu'+f')\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}-2\left(\lambda-\frac{\beta}{2}f'\right)\mathbf{n}\right\},$$

(4) $$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ [A(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+-\mathbf{B}(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)A^+]=i\,\frac{g^2}{2}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\mathbf{P}_\mu\times\mathbf{n},$$

(5) $$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \mathbf{B}\times(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu)\mathbf{B}^+=-g^2i\left\{\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\left(\lambda-\frac{\beta}{2}f'\right)\mathbf{P}_\mu+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{2}(\mu'+f')\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}+\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)^2\mathbf{n}\right\}.$$

附　录 II

鉴于在不同实验条件下，μ^-介子处于核子的超精細結構态上的比重可能不同，此外还可采用帶有极化的靶子来作实驗，(μ^-p) 系統在始态情况可能随实驗条件和实驗方法不同而異．在最普遍情况下，始态的密度矩陣具有下列形式：

$$\rho=1/4\,(1+\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu+\boldsymbol{\sigma}_p\cdot\mathbf{P}_p+\zeta\boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}_p),$$

其中 $\mathbf{P}_p$ 为質子在始态的极化矢量．ζ 的大小与(μ^-p)系統在不同超精細結構态上的比重有关．底下我們將不討論 $\mathbf{P}_\mu$，$\mathbf{P}_p$ 及 ζ 的大小，而將利用上述 ρ 計算 μ^-介子在質子上俘获的几率，角关联及中子的极化．在將理論与实驗比較时，应根据具体的实驗条件去判断 $\mathbf{P}_\mu$，$\mathbf{P}_p$ 及 ζ 的大小，这是一个复杂問題，在本文中不予討論．

計算結果如下

1. 俘获几率及角关联

$$dw=(2\pi)^{-2}(\pi a_0^3)^{-1}2^{-1}g^2I(1-\alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}-\gamma\mathbf{P}_p\cdot\mathbf{n})R^2d\Omega,$$

其中

$$I=1+3\lambda^2+\beta+\beta\lambda(2\mu'-f')+\frac{\beta^2}{4}(2\mu'^2+f'^2)-6\zeta\left[\lambda^2+\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\lambda+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{2}(\mu'\lambda-f'\lambda+\mu')+\frac{\beta^2}{4}(\mu'-\mu'f')\right]-\frac{1}{3}\beta\zeta(\mu'+f')\left(1+\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right),$$

$$I\alpha=1-\lambda^2+\beta-\beta\lambda(2\mu'+f')+\frac{\beta^2}{4}(f'^2-2\mu'^2),$$

$$I\gamma=2\left[\lambda^2+\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta}{2}f'-\lambda\right)+\beta\mu' f'+\frac{\beta^2}{4}\mu'^2\right].$$

2. 中子的极化

$$I(1-\alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}-\gamma\mathbf{P}_p\cdot\mathbf{n}\langle\sigma\rangle=[a+b\mathbf{P}_\mu\cdot\mathbf{n}+c\mathbf{P}_p\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n}+d\mathbf{P}_\mu+e\mathbf{P}_p$$

其中

$$a=2\left[\lambda(\lambda+1)+\frac{\beta}{2}\lambda+\beta\mu'(\lambda+\beta\mu'/4)-\frac{\beta}{2}f'-\frac{\beta^2}{4}f'\right]-$$

$$-\zeta\left[\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2+7\lambda^2+4\beta\mu'\lambda-3f'\beta\lambda-\beta^2f'\mu'+\frac{\beta^2}{4}f'^2-\frac{\beta^2}{2}\mu'^2\right],$$

$$b=\beta(f'+\mu')\left(\lambda+1+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}\mu'\right),$$

$$c=2\beta(\mu'+f')\left(\lambda+\frac{\beta}{4}\mu'-\frac{\beta}{4}f'\right),$$

$$d=2\left(\lambda+\frac{\beta}{2}\mu'\right)\left(\lambda-1-\frac{\beta}{2}(1+f')\right),$$

$$e=\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\beta\lambda f'-\frac{\beta^2}{4}f'^2-\lambda^2\right),$$

在一般情况下(例如在形成 μ^- 介分子的情况下), dw 中代表 μ^- 介子在核子上被找到的几率因子 $\frac{1}{4\pi}(\pi a_0^3)^{-1}$ 应当用 $|\varphi(0)|^2$ 去代替, 其中 $\varphi(\mathbf{r})$ 为 μ 介子的波函数.

当 μ^- 介原子处于超精細态 $F=1$ 时, 其俘获几率 λ_+ 可由上面計算的式子求得, 此时只需令 $\zeta=\frac{1}{3}$ 就行了,

$$\lambda_+=(1-\lambda)^2+\beta\left(1-2\lambda+\mu'(\lambda-1)-\frac{1}{g}(\mu'+f')(1+\lambda)\right).$$

在写下 λ_+ 时, 我們忽略了所有与 β^2 成正比的項. 令 $\zeta=-1$, 我們得到 μ^- 介子在 $F=0$ 态上俘获的几率 λ_-:

$$\lambda_-=(1+3\lambda)^2+\beta\left(1+3\lambda+3\mu'+5\lambda\mu'-4\lambda f'+\frac{1}{3}(\mu'+f')(1+\lambda)\right).$$

利用上面的 λ_+ 及 λ_-, 我們可以求得

$$\frac{\lambda_+-\lambda_-}{\overline{\lambda}}=-\frac{b}{a}\cdot 4,$$

其中

$$b=2\lambda(1+\lambda)+\beta\left(\lambda-f'\lambda+\mu'(1+\lambda)+\frac{1}{g}(\mu'+f')(1+\lambda)\right),$$

$$a=1+3\lambda^2+\beta(1+2\mu'\lambda-f'\lambda).$$

在以上的公式中, 我們都把与 β^2 成正比的項忽略了. 上面虽然只求出了 μ^- 在質子的超精細态上俘获的几率, 但如假定費米气体模型近似的正确, 我們可以求出第四节中的(49)式, (49)式中的 b 及 a 与上面从 μ 在質子上俘获而定出的 b 和 a 相同.