

关于原子核独立粒子結構的力学基础^{*†}

于 敏 张宗燁 余友文

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文討論了原子核独立粒子結構的力学基础問題,指出独立粒子运动的基本因素是体积效应。滿壳层附近的每一个核子因为和滿壳层內其他核子相互作用的结果,將使周圍核物質极化,而在它自己周圍形成核子云,因而这个核子的磁矩、有效电荷等將发生一定的变化。但是因为角动量和宇称守恒的关系,这个帶有极化核子云的核子的角动量和宇称將不会改变。

在原子核內两个核子发生碰撞的几率与原子核体积 Ω 成反比,三个核子发生碰撞的几率与 Ω^2 成反比,依次类推。这样我們就証明了为什么利用耦合理論計算原子核能級是正确的。并且也証明了壳模型指出的每个核子的角动量和宇称也是正确的。但是我們不能用壳模型波函数來計算原子核的磁矩和跃迁几率。

§1 引 言

自从1949年以来,原子核的壳模型得到了十分广泛的实验支持,从那时候起原子核的独立粒子結構的力学基础問題就成了原子核理論中最中心問題之一。

近两年来 Brueckner^[1]对于多体微扰提出了不相連項的重要观念,其后 Goldstone^[2]从与時間有关系的微扰理論出发証实了这个观念。不过他們的討論都只限于滿壳层情况。

我們从普通的微扰論出发,無論对于原子核系統的波函数还是能量,都能够严格地分为滿壳层部分,單个核子部分,两个核子間相互关联部分等等,它們对 A 的方次(A 是原子核的質量数)是依次递减的。这样对于原子核理論我們也可以采用一些象坊論中所习用的观念。我們可以把滿壳层的壳模型波函数称作“光秃秃真空”,而称滿壳层的真正波函数为“物理的真空”。“物理的真空”包含了各种漲落現象。波函数比“光秃秃真空”复杂得多。壳模型單粒子波函数是一个“光秃秃的核子”,而“物理核子”則在它自己附近聚有一定的核子云。它的性質和跃迁几率与一个“光秃秃核子”大不相同。

利用这些概念和相应的数学推演,我們可以証明在严格的 $\frac{1}{A}$ 近似下(显然对于重原子核,这是一个很好的近似),把滿壳层附近原子核的能譜問題还原为滿壳层外有一个核子的原子核的能譜和滿壳层外有两个核子的原子核的能譜,而把跃迁問題及磁矩、四极矩等問題还原为滿壳层外一个核子的相应問題。当然这些观点的正确与否尚需实验事实的驗證和发展。

在 §2 中,为讀者方便起见,綜述了常見的微扰理論及其二度量子化。在 §3 中証明

* 1959年5月21日收到。

† 为庆祝中华人民共和国国庆九周年而作。

了含有不相連的自能图的項可以消去,从而可以把波函数分为几个部分。在 § 4 中,在 $\frac{1}{A}$ 的近似下証明滿壳层附近原子核的能譜能够还原为滿壳层外有一个和两个核子的原子核的能譜。§ 5 証明跃迁几率能够还原为單个核子的跃迁几率。§ 6 就目前已有一些实验数据进行了比較。

为了讀者方便起見,我們尽量敘述得詳細一些,这样可以免得讀者去翻閱很多的参考文献。

§ 2 多 体 微 扰

1. 多体微扰的公式

現在我們考虑一个費米(Fermi)系統,其中包含有 A 个粒子,并且它們之間的作用为兩体相互作用,設第 i 个粒子的动能为 T_i , i, j 两个粒子間的相互作用为 v_{ij} , 則系統的总能量为

$$H = \sum_i T_i + \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} v_{ij} \quad (2.1)$$

为了簡單起見,我們选用 ²⁾

$$H_0 = \sum_i T_i \quad (2.2)$$

微扰能量为

$$H_1 = \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} v_{ij} \quad (2.3)$$

于是系統的总能量可以写成

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.4)$$

如果以 E, E_0 以及 Ψ, Φ_0 分別代表 H 及 H_0 的本征值及本征函数, 則有

$$H\Psi = E\Psi, \quad (2.5)$$

$$H_0\Phi_0 = E_0\Phi_0, \quad (2.6)$$

其中 Φ_0 为單粒子波函数, 可以表示为

$$\Phi_0 = \sum_i (-1)^p \prod_i \psi_i \quad (2.7)$$

ψ_i 为 T_i 的本征函数。根据多体微扰理論, Φ_0 在沒有退化的情况下, 系統的波函数 Ψ 可以表示成

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(1 + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) + \dots \right) \Phi_0 = \\ &= \Phi_0 + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) \Psi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Schrödinger 微扰公式

1) 注意我們这里用的 v 比通用的小二倍, 因为通用的这项写为 $\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}$ 。

2) 选用 $H_0 = \sum_i T_i$ 与选用 $H_0 = \sum_i (T_i + V_i)$ 沒有根本上的差別, 对我們的最終結果沒有影响, 为了写起来方便, 所以我們选用 $H_0 = \sum_i T_i$ 。

或

$$\Psi = \Phi_0 + \frac{p}{E - H_0} H_1 \Psi.$$

Wigner 微扰公式

其中 p 代表积分取主值的意义, $\Delta E = E - E_0$ 为微扰能量, $\Delta E = (\Phi_0 | H_1 | \Psi)$.

2. 对退化情形的推广

现在我们就来将公式(2.8)推广到退化态的情形. 首先我们考虑一个 H_0 的退化态 φ_{0i} , 对应的本征值为 E_0 , 如果我们把(2.8)式中 p 的定义推广, 使得它的意义不仅是去掉那些回到原来初态的态, 并且还去掉那些回到退化态上的态, 那么可以得到一个波函数

$$\Psi_i = \varphi_{0i} + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) \Psi_i. \quad (2.10)$$

但是必须注意到 Ψ_i 并不一定是对应 φ_{0i} 在有微扰情形下的解, 因为它不一定满足 Schrödinger 方程, 简单计算如下:

$$\begin{aligned} (E - H) \Psi_i &= (E - H) \left[\varphi_{0i} + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) \Psi_i \right] = \\ &= (\Delta E - H_1) \varphi_{0i} - \sum_j \varphi_{0j} (\varphi_{0j} | H_1 - \Delta E | \Psi_i) + \\ &\quad + (H_1 - \Delta E) \Psi_i + (\Delta E - H_1) (\Psi_i - \varphi_{0i}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

由于正交归一化条件为

$$\langle \varphi_{0j} | \Psi_i \rangle = \delta_{ij}, \quad (2.12)$$

所以(2.11)式可以等于

$$(E - H) \Psi_i = \Delta E \varphi_{0i} - \sum_j \varphi_{0j} (\varphi_{0j} | H_1 | \Psi_i). \quad (2.13)$$

由(2.13)式立即可以看出: Ψ_i 不一定是 H 的本征函数. 因此它不是我们所要求的解. 但是我们可以将所有同一退化能量的各个波函数加以线性组合,

$$\Psi = \sum_i C_i \Psi_i, \quad (2.14)$$

并令 Ψ 满足 Schrödinger 方程. 于是我们只要解一个行列式就可以将全部 C_i 定了出来, 这样组合以后的 Ψ 仍可以表示成

$$\Psi = \left(1 + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) + \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) \frac{p}{E_0 - H_0} (H_1 - \Delta E) + \dots \right) \Phi_0, \quad (2.15)$$

其中 $\Phi_0 = \sum_i C_i \varphi_{0i}$, p 的意义为推广以后的意义. 同时 Ψ 又满足 Schrödinger 方程, 因此 Ψ 就是有微扰情形下退化态的波函数. 这样推广到退化态情形的目的就达到了. 在下面的计算中, 我们就从普遍的(2.15)式出发, 因此所有的结论即可以用于非退化的情形, 也可以用于退化态的情形.

3. 多体微扰公式的二次量子化

为了将(2.15)式中的各项能够与费曼(Feynman)图形对应起来, 以便于对公式中的每一项进行分析, 最好将(2.15)式二次量子化. 经过二次量子化以后, (2.15)式中的 H_0 就改写为

$$H_0 \longrightarrow \sum_m E_m \eta_m^\dagger \eta_m, \quad (2.17)$$

其中 E_m 为第 m 个粒子的动能。同时 H_1 应改写为

$$H_1 \longrightarrow \sum \langle rs | v | mn \rangle \eta_r^\dagger \eta_s^\dagger \eta_n \eta_m. \quad (2.18)$$

这里取和是指对所有的矩阵元求和, η^+ 代表粒子的产生算符, η 代表粒子的消灭算符。现在我们将粒子全部填满费米海的情况定义为真空态 $|\rangle_0$, 并且将费米海以下缺少一个粒子的情形当作存在一个“空穴”看待。因此在费米海以下粒子的消灭就相当于“空穴”的产生, 反过来“空穴”的消灭也就相当于粒子的产生。这样 k_n 在费米海以上时, $\eta_n^\dagger(\eta_n)$ 仍然代表粒子的产生(消灭)算符; 而当 k_n 在费米海以下时, $\eta_n^\dagger(\eta_n)$ 则代表“空穴”的消灭(产生)算符, 这是我们在场论中所熟知的一种正则变换。

下面我们就来对(2.15)式中的一普遍项进行一下分析: 在(2.15)式中包含有 l 个 v 的项可以写成:

$$\frac{p}{E_0 - \sum_i E_i \eta_i^\dagger \eta_i} \eta_r^\dagger \eta_s^\dagger \langle rs | v | mn \rangle \eta_n \eta_m \times \frac{p}{E_0 - \sum_i E_i \eta_i^\dagger \eta_i} \eta_v^\dagger \eta_q^\dagger \langle pq | v | kj \rangle \eta_j \eta_k \cdots \Phi_0. \quad (2.19)$$

我们完全可以用一个费曼图形来表示这一项。表示的方法为

(i) 每一个 $\langle rs | v | mn \rangle$ 对应为一条折线:

$$\langle rs | v | mn \rangle \longleftrightarrow \text{~~~~~}$$

(ii) 每一对 $\eta_i^\dagger \eta_i$ 算符 (k_i 在费米海以上) 以一条方向向上的内线代表, 下面的一个点·代表第一个算符所在的位置, 上面的一个点·代表第二个算符所在的位置:

$$\eta_i^\dagger \eta_i \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ \bullet \end{array} \quad (\text{当 } k_i \text{ 在费米海以上})$$

(iii) 每一对 $\eta_i^\dagger \eta_i$ 算符 (k_i 在费米海以下) 以一条方向向下的内线代表:

$$\eta_i^\dagger \eta_i \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \searrow \\ \bullet \end{array} \quad (\text{当 } k_i \text{ 在费米海以下})$$

(iv) 每一个单独的 η_n 或 $\eta_n^\dagger$ 算符 (k_n 在费米海以上), 以一条方向向上的外线代表:

$$\begin{array}{c} \eta_n \longleftarrow \bullet \\ \eta_n^\dagger \longleftarrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad (\text{当 } k_n \text{ 在费米海以上})$$

(v) 每一个单独的 η_n 或 $\eta_n^\dagger$ 算符 (k_n 在费米海以下), 以一条方向向下的外线代表:

$$\begin{array}{c} \eta_n \longleftarrow \bullet \\ \eta_n^\dagger \longleftarrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad (\text{当 } k_n \text{ 在费米海以下})$$

(vi) 时间的先后次序是从下至上。

(vii) 如果將图形在某一 $\langle rs|v|mn\rangle$ 处截断, 并将截断处全部激发粒子的能量加起来, 就对应为紧靠近 $\langle rs|v|mn\rangle$ 前面的能量分母 $(H_0 - E_0)$ 中的 H_0 值。

在这样的表示下, 图形与(2.19)可以对应起来。为了清楚起见, 我们再举两个例子来看一下:

$$(i) \frac{p}{E_0 - \sum_i E_i \eta_i^\dagger \eta_i} \eta_r^\dagger \eta_s^\dagger \langle rs|v|mn\rangle \eta_n \eta_m | \rangle_0.$$

对应的图形如图 2.1.

能量分母为:

$$-E_m - E_n - E_r - E_s.$$

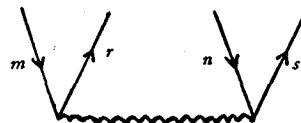


图 2.1

$$(ii) \frac{p}{E_0 - \sum_i E_i \eta_i^\dagger \eta_i} \eta_r^\dagger \eta_s^\dagger \langle rs|v|mn\rangle \eta_n \eta_m \times \\ \times \frac{p}{E_0 - \sum_i E_i \eta_i^\dagger \eta_i} \eta_p^\dagger \eta_q^\dagger \langle pq|v|lk\rangle \eta_k \eta_l | \rangle_0.$$

对应的图形如图 2.2.

$\langle pq|v|lk\rangle$ 前面的那个能量分母为:

$$-E_p - E_q - E_l - E_k,$$

而 $\langle rs|v|mn\rangle$ 前面的那个能量分母为:

$$-E_m - E_r - E_n - E_s - E_p - E_q - E_l - E_k.$$

到此, 我們已經將公式(2.15)进行了二次量子化, 并将其中每一项与一个图形相連系了起来。

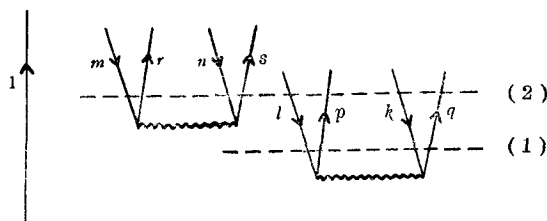


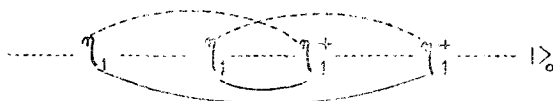
图 2.2

显然, 相应于内綫的两个算符, 可以利用对易关系式收縮到一起, 彼此消去。这样, 剩下的只有相当于外綫的算符。如果我們把相应于每一条开口的实綫的入射外綫的算符放在右边, 相应于出射外綫的算符放在左边, 那么这一項的前边应当乘上 $(-1)^{h+l}$ 因子, 其中 h 是“空穴”的内綫数, l 是封闭环数。

显然, 附碼 $r, s, \dots$ 的不同, 并不影响所对应的費曼图的结构。因此在計算相应于一个費曼图的微扰項时, 应当对内綫所相应的粒子(或空穴)态求和。

在这里必須指出: 这样作有可能出現違反泡里(Pauli)原理的項。但是在实际上这些違反泡里原理的項是不作貢獻的, 它們彼此相互消去了。下面我們就来对这一事实作一个簡單的証明:

(i) 如果在 Ψ 中出現:



的項, 那么將 $\eta_1 \eta_1^\dagger$ 对收縮在一起的方式可以有兩種, 一种是彼此不交換(如实綫所示), 另一种是彼此交換一下(如虛綫所示), 对应的图形为图 2.3 中的(a)及(b)。而在这兩種不同的方式中, 將 $\eta_1 \eta_1^\dagger$ 对收縮到一起所需要的对易次数相差一个奇数, 因此兩項的符号不同, 于是可以相互消去。同理, 可以推广到有很多个粒子同时違反泡里原理的情形上去。虽

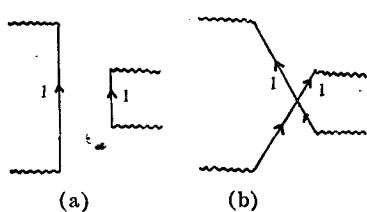


图 2.3

然在这种情况下, 将 $\eta_1 \eta_1^\dagger$ 对收缩到一起的方式有很多种, 但是总存在着其他对的收缩方式都一样, 而只有两对的收缩方式是相互交换了一下, 于是得到两两相差一个符号的结果, 因此违反泡里原理的项都可以消去。

(ii) 在(i)中我们只证明了在对内线求和时违反泡里原理的项可以消去, 因此在将 $\eta_i \eta_i^\dagger$ 收缩到一起的过程中可以不考虑泡里原理; 但是在 $\mathcal{V}$ 中仍可以出现

$$\cdots \eta_2 \cdots \eta_2 \cdots \eta_1^\dagger \cdots \eta_1^\dagger \cdots | \rangle_0 \cdot$$

等等的这种违反泡里原理的项。这种项在 $\mathcal{V}$ 中是消不去的, 只能保留下来。不过这并没有什么关系; 因为在用波函数计算任何物理量时, 又可以用(i)中同样的办法将这些违反泡里原理的项消去了。因此虽然在 $\mathcal{V}$ 中有违反泡里原理的项存在, 但它们对归一化以及求平均都不作贡献。

根据上面的分析与证明, 我们可以得到以下结论: 违反泡里原理的项虽然可以在 $\mathcal{V}$ 中出现, 但它们都自行消去, 不作贡献; 因此在以后的讨论中可以不考虑泡里原理的作用。

§ 3 证明在 $\mathcal{V}$ 的表示式中自能项可全部消去

1. 一些定义

(i) 不相连项的定义

在(2.15)式中所包含的各种图形可以分成两类, 一类是相互不能断开的, 我们称它为相连的图形, 与它相对应的项称为相连的项, 例如在图 3.1(a)中表示出的就是一个相连的图形。另一类是可以分成几个部分的图形, 我们称它为不相连的图形, 与这种图形对应的项称为不相连的项, 例如在图 3.1(b)中表示出的就是一个不相连的图形¹⁾。

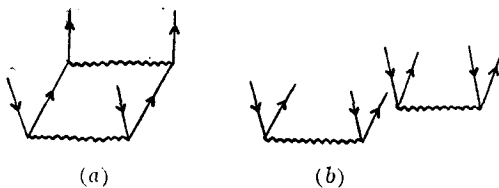


图 3.1

(ii) 自能项的定义

我们定义一个没有外线的部分为一个真空的自能部分, 如图 3.2 所示。这类图统称为真空自能图, 包含它的项称为真空自能项。同样我们可以定义如图 3.3 所示的一类图形为一个粒子的自能图, 以及如图 3.4 所示的一类图形为两个粒子的自能图。

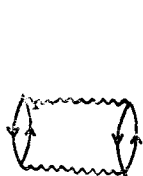


图 3.2

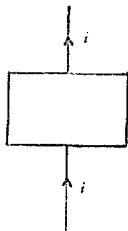


图 3.3

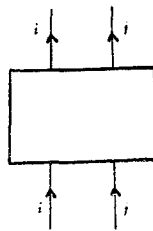


图 3.4

(□表示经过任何复杂的相互作用)

(□表示经过任何复杂的相互作用)

1) 这里的定义与 Goldstone 的定义略有不同。

在下面的讨论中我们就是要证明在 $\mathcal{W}$ 中包含这些自能图的项可以与包含 ΔE 的项相互消去。

2. 定理

在不相连的图形中, 可以将两个不相连的部分写成两个独立因子的乘积。

这个定理是我们下面证明(2.15)式中的自能项与包含 ΔE 的项相互消去的一个主要根据, 因此我们把它提出来, 先加以证明。

我们是采用数学归纳法来证明这个定理的。为此, 先讨论一个简单情形作为例子:

考虑每一个不相连部分只有一条相互作用线的情形(见图 3.5)。

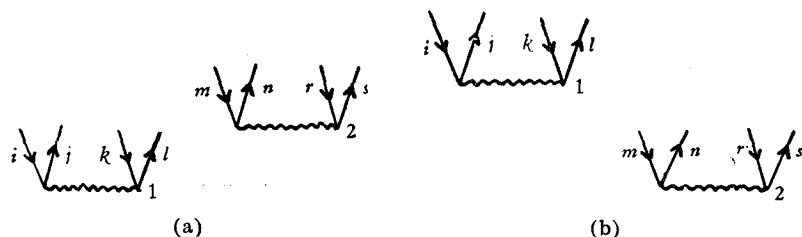


图 3.5

在图 3.5 (a) 的情形下, 相互作用线的先后次序是先 1 后 2, 这只是一种可能的安排。对应(2.15)式中一定还存在一项与图 3.5(a) 图形结构完全一样, 而只不过作用线的次序不同而已, 如图 3.5(b) 所示。在每一个不相连部分只有一条作用线时, 就只有这两种可能的安排。如果我们分别来看每一个图形, 它们都是不能分成两个独立因子的乘积的, 例如图 3.5(a) 对应的项应该写成

$$\frac{1}{a_{12}} v_2 \frac{1}{a_1} v_1, \quad (3.1)$$

其中 v_1 与 v_2 是 $\langle ik|v|jl\rangle$ 与 $\langle mr|v|ns\rangle$ 的简写; a 是 $E_0 - H_0$ 的简写, a_1 代表 i, j, k, l 粒子的激发能量; a_{12} 代表 i, j, k, l, m, n, r, s 粒子的激发能量, 因此 $a_{12} = a_1 + a_2$ 。

由(3.1)式可以看出: 图形的两部分是不能写成两个独立因子的乘积的, 因为在(3.1)式中有 a_{12} 出现。同样图 3.5 (b) 对应的项为

$$\frac{1}{a_{12}} v_1 \frac{1}{a_2} v_2, \quad (3.2)$$

也是不能写成两个独立因子的乘积的。但是如果我们将两项加在一起, 则有

$$\frac{1}{a_{12}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) v_1 v_2 = \frac{1}{a_1} v_1 \frac{1}{a_2} v_2, \quad (3.3)$$

显然是可以分成两个独立的因子。由此我们得到一个规律: 即分别地每一个不相连图形是不可能写成两个独立因子的乘积的, 但是如果将它们的相对位置加以移动, 并将所有的可能的不同安排次序的项相加起来, 那么就可以写成两个独立因子的乘积了。因此只要证明了这个规律, 定理也就得到了证明。下面我们就用归纳法来证明这一点。

设对于一个不相连部分有 n 条作用线, 另一个不相连部分有 $(m'-1)$ 条作用线以下的情形, 已全部可以写成两个独立因子的乘积, 求证一个不相连部分有 n 条作用线, 另一个不相连部分有 m' 条作用线时, 亦可以写成两个独立因子的乘积(图 3.6)。

首先我们来考虑在这种情形下作用线有多少类可能的安排方式。

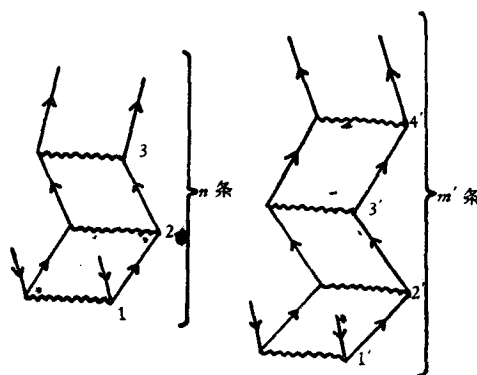


图 3.6

(i) 第 m' 条綫处于第 1 条綫以下;对应的項为

$$\frac{1}{a_{nm'}} v_n \frac{1}{a_{n-1m'}} \cdots \frac{1}{a_{1m'}} v_1 \frac{1}{a_{m'}} v_{m'} \cdots \frac{1}{a_{1'}} v_{1'}. \quad (3.4)$$

(ii) 第 m' 条綫处于第一与第二条綫之間;对应的項为

$$\frac{1}{a_{nm'}} v_n \frac{1}{a_{n-1m'}} v_{n-1} \cdots \frac{1}{a_{2m'}} v_2 \frac{1}{a_{1m'}} v_{m'} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{a_{1m'-1}} v_{m'-1} \cdots \\ \cdots \\ \frac{1}{a_{m'}} v_1 \frac{1}{a_{m'-1}} v_{m'-1} \cdots \end{array} \right\}. \quad (3.5)$$

而大括号中各項之和相当于一个不相連部分为 1 条綫, 另一个不相連部分为 $(m'-1)$ 条綫的情形, 因此它是可以分成两个独立因子的。于是(3.5)式可以写成

$$\frac{1}{a_{nm'}} v_n \frac{1}{a_{n-1m'}} v_{n-1} \cdots \frac{1}{a_{2m'}} v_2 \frac{1}{a_{1m'}} v_{m'} \frac{1}{a_1} v_1 \frac{1}{a_{m'-1}} v_{m'-1} \cdots \frac{1}{a_{1'}} v_{1'}, \quad (3.5')$$

而將(3.4)式与(3.5')式相加起来。因为

$$\frac{1}{a_{1m'}} \left(\frac{1}{a_{m'}} + \frac{1}{a_1} \right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_{m'}}, \quad (3.6)$$

这样就消去了一个相互关連的能量分母 $a_{1m'}$, 换成了 a_1 及 $a_{m'}$ 。这样就將第一条綫与第 m' 条綫分开了。

依此类推, 如果將 m' 綫处于各个情形下的結果逐次相加, 就可以一次一次地减少相互关連的能量分母, 一直加到最后, 即 m' 綫在第 n 条綫以上的情形, 則可以消去全部相互关連的能量分母, 得到两个独立因子的乘积的結果:

$$\frac{1}{a_n} v_n \frac{1}{a_{n-1}} v_{n-1} \cdots \frac{1}{a_1} v_1 \frac{1}{a_{m'}} v_{m'} \frac{1}{a_{m'-1}} v_{m'-1} \cdots \frac{1}{a_{1'}} v_{1'}, \quad (3.7)$$

于是定理得証。

在此必須指出: 这个定理完全可以推广到不只两个不相連的部分。証明的方法与此类似。先选定一个不相連部分, 并把它其余部分看做一个整体, 应用上定理可以把这部分写成一个与其余部分无关的因子。依次类推, 就可以把每一个不相連部分都写成一个独立的因子。

3. Ψ 中自能项的消去

由于真空情形的图形与有一个粒子以及多个粒子的情形的图形是很不相同的, 因此我们对满壳层的情形以及满壳层外有一个或多个粒子的情形分别讨论.

(i) 满壳层的情形

为了消去自能图, 我们将 Ψ 的表示式(2.15)按 ΔE 的方次展开:

$$\begin{aligned} \Psi = & \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \frac{p}{a} H_1 \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \Phi_0 - \\ & - \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \frac{p}{a} H_1 \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \frac{p}{a} \Delta E \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \Phi_0 + \\ & + \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \frac{p}{a} \Delta E \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \frac{p}{a} \Delta E \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \Phi_0 + \dots \quad (3.8) \end{aligned}$$

现在我们假设 Ψ 表示式中的 ΔE , 则可以表成

$$\Delta E = \langle \Phi_0 | H_1 | \Psi \rangle, \quad (3.9)$$

而(3.9)式中的 Ψ 是已经消去自能项与 ΔE 以后的波函数, 如果将(3.9)代入(3.8)式中, 的确可以使自能项与 ΔE 相互消去, 那么结果与假设就相互自洽了. 因此下面需要证明的是: 在 ΔE 为(3.9)式的意义下, Ψ 中的自能项的确与 ΔE 项相互消去.

根据 § 3.2 的定理, 每一个不相连的图形都可以写成独立因子的乘积, 因此如果将一个自能部分独立出来, 即相当于独立出来了 ΔE 中的一项. 利用上述定理的结果不难得到以下的结论: 我们将自能图中最上面的一条相互作用线固定在某两条相互作用线之间, 然后移动下面的相互作用线, 并将各种可能的情形相加起来以后, 就相当于在固定相互作用线的地方抽出了一个 ΔE 的项.

为了清楚起见, 我们再举一个例子(见图 3.7). 在这个具体的例子中, 我们将第 4 条线固定在 2 线之上, 因此 2 线的移动只有三个可能, 即图(a), (b), (c)所给出的结果. 现分别将它们对应的项写出:

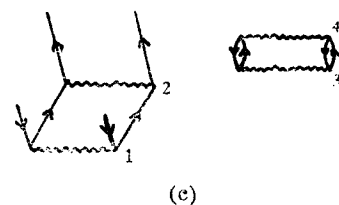
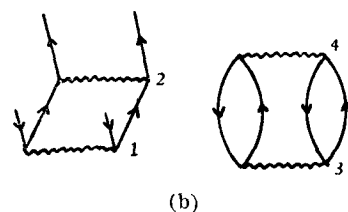
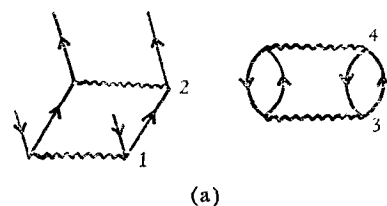


图 3.7

$$(a) \longleftrightarrow \frac{1}{a_2} v_4 \frac{1}{a_{23}} v_2 \frac{1}{a_{13}} v_3 \frac{1}{a_1} v_1, \quad (3.10)$$

$$(b) \longleftrightarrow \frac{1}{a_2} v_4 \frac{1}{a_{23}} v_2 \frac{1}{a_{13}} v_1 \frac{1}{a_3} v_3, \quad (3.11)$$

$$(c) \longleftrightarrow \frac{1}{a_2} v_4 \frac{1}{a_{23}} v_3 \frac{1}{a_2} v_2 \frac{1}{a_1} v_1. \quad (3.12)$$

三项相加以后, 得到

$$\frac{1}{a_2} \langle v_4 \frac{1}{a_3} v_3 \rangle \frac{1}{a_2} v_2 \frac{1}{a_1} v_1. \quad (3.13)$$

显然由(3.13)中可以看出:相加的结果相当于在 v_2 线以上的地方抽出了 ΔE 的一项。

如果将各种作用线的数目不同的自能项全部考虑进去,那么就可以抽出一个 ΔE 。同理对于包括有两个自能部分的项可以抽出二个 ΔE ,对于包括有 n 个自能部分的项则可以抽出 n 个 ΔE 。

根据上面的分析,要想在 Ψ 中将自能项与 ΔE 相互消去并不困难。首先我们注意到(3.8)中的每一项

$$\left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \frac{p}{a} H_1 \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \frac{p}{a} \Delta E \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \dots \frac{p}{a} \Delta E \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots\right) \phi_0 \quad (3.14)$$

都包括了全部的图形;其次我们将这些图形中的自能项全部抽出 ΔE 来,那么立即可以看出:

(A) 只包括一个 ΔE 的项有两项:一项是由(3.8)式的第一项中贡献的,这一项是正的;另一项是由(3.8)式中的第二项贡献的,符号是负的,因此相互消去。

(B) 在(3.8)式中包括 n 个 ΔE 的项为

第一项贡献: $+C_0^n$ 个,

第二项贡献: $-C_1^n$ 个,

第三项贡献: $(-1)^i C_i^n$ 个,

其中 C_i^n 为组合数。因之一共有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n = 0 \quad (3.15)$$

个,于是就全部消去了。

到此为止我们就证明了满壳层情形下 Ψ 中的自能项的确与 ΔE 项相消去了。因此满壳层的波函数 Ψ 可以写成

$$\Psi = \sum' \left(\frac{p}{a} H_1\right)^n \phi_0, \quad (3.16)$$

其中 Σ' 代表只对不包含自能项的各项取和。这个结果与 Goldstone 用与时间有关的微扰方法所得到的结果完全相同。

(ii) 满壳层外一个粒子的情形

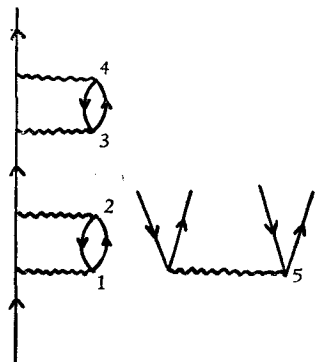


图 3.8

由于我们的理论可以用于退化态的情形,因此完全可以将上一节中的讨论推广到满壳层外有一个粒子的情形。可以用同样的方法将自能图分成独立因子,然后与 ΔE 相消。但是这里与满壳层的情形有一点不同,即在图 3.8 中所示的情形下,虽然下面一个自能部分是可以分出一个独立因子,但是上面的一个自能部分则不能分出独立因子来,因为第 3 条作用线不能移到第 5 条作用线的下面。当第 3 线在第 5 线的下面的时候,1,2 两线也必须第 5 线的下面,而这种情形由于积分取主值的原因,是不允许存在的,因此上面的自能部分不能分出独立因子。

首先我们为了分别消去真空的自能项与一个粒子的自能项,所以将 ΔE 分为两部分:

一部分是满壳层粒子的, 称为 ΔE_0 , 另一部分是壳外一个粒子的, 称为 ΔE_1 . 因此

$$\Delta E = \Delta E_0 + \Delta E_1, \quad (3.17)$$

并且我们定义

$$\Delta E_0 = {}_0\langle H_1 \Sigma' \left(\frac{p}{a} H_1 \right)^n | \rangle_0, \quad (3.18)$$

$$\Delta E_1 = {}_0\langle \eta H_1 \Sigma' \left(\frac{p}{b} H_1 \right)^n \eta^+ | \rangle_0, \quad (3.19)$$

其中 Σ' 代表对所有不相连图形取和, 并且

$$b = a + \Delta E_1. \quad (3.20)$$

同样, 我们也要求在这样的定义下消去 $\mathcal{W}$ 中的自能项, 使得结果与出发点相互自洽. 在这里必须注意到: ΔE_1 的能量分母已经有所改变, 并且正是由于这种改变才能将所有的自能项消去.

为此我们将真空部分与一个粒子部分分开来讨论. 第一步我们先将 $\mathcal{W}$ 按 ΔE_0 展开, 用上一节同样的方法可以将真空自能图与 ΔE_0 相互消去, 然后我们再将 $\mathcal{W}$ 按 ΔE_1 展开:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \frac{p}{a} H_1 \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \eta^+ | \rangle_0 - \\ & - \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \frac{p}{a} \Delta E_1 \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \eta^+ | \rangle_0 + \\ & + \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \frac{p}{a} \Delta E_1 \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \frac{p}{a} \Delta E_1 \left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \times \\ & \times \eta^+ | \rangle_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中

$$\left(1 + \frac{p}{a} H_1 + \dots \right) \eta^+ | \rangle_0$$

等项包含全部不只是含真空自能的图. 因此下面的工作是要在 $\mathcal{W}$ 中消去一个粒子的自能图. 先来分析一个例子(见图 3.9).

在图 3.9 中, 我们用一个点 $\cdot$ 代表一个 ΔE_1 , 一串点表示包括一个点, 两个点, 以及 n 个点的总体. 因此如果我们把第 2 线固定在第 3 线之上, 移动第 1 线, 并将包含各种点数的情形相加起来, 结果得到

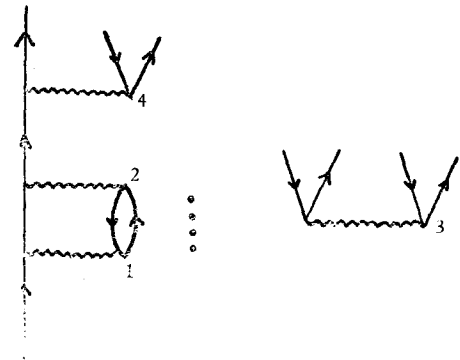


图 3.9

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{04}} v_4 \frac{1}{a_8} \langle v_2 \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{1}{a_1} \Delta E_1 + \frac{1}{a_1} \Delta E_1 \frac{1}{a_1} \Delta E_1 - \dots \right) v_1 \rangle \frac{1}{a_3} v_3 = \\ = \frac{1}{a_{04}} v_4 \frac{1}{a_8} \langle v_2 \frac{1}{b_1} v_1 \rangle \frac{1}{a_8} v_3, \end{aligned} \quad (3.22)$$

这相当于在第 3 线以上的地方抽出了一个 ΔE_1 的一项. 因此可以看出: 图 3.10 (a) 与 3.10 (b) 相互消去了.

这样推广下去, 我们可以得到一个规律: 在最下面一个粒子自能图中间的全部 ΔE_1 都可以抽到粒子自能图的内部去, 相当于将相应的粒子自能图改换了能量分母. 这样在最

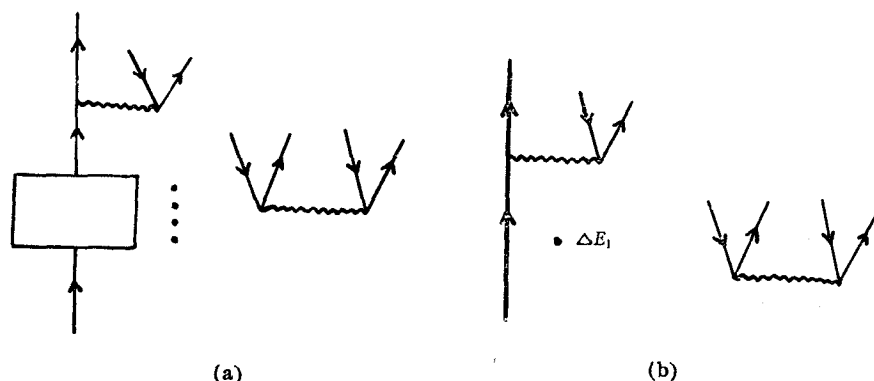


图 3.10

下面一个自能图的中間不再出現 ΔE_1 了, 而 ΔE_1 只能出現在最下面一个自能部分的上
面, 如图 3.11 所示。

有了这个規律, 不难看出: 只要將图中最下面一个自能部分抽成一个独立因子, 就必然
会与一項与它結構几乎一样, 而只是比它少最下面一个自能部分, 而在相应位置多一个
 ΔE_1 的項相互消去。这样我們就証明了在 Ψ 中的确不存在一个粒子的自能項。这时所
剩下的只有如图 3.12 所表示的一类图形。用同样的方法, 可以把 ΔE_1 搬到單个粒子图的
傳播因子上去。于是 Ψ 可以写成

$$\Psi = S_1 S_\infty | \rangle_0, \quad (3.23)$$

其中 $S_\infty | \rangle_0$ 代表滿壳层的波函数, 它的能量分母为 a , S_1 代表壳外一个粒子的波函数, 它
的能量分母为 b , 并且在它們之中都不包含有自能項。

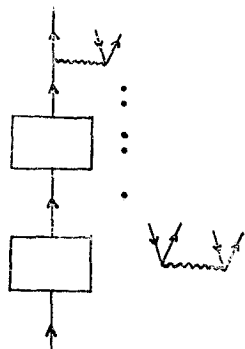


图 3.11

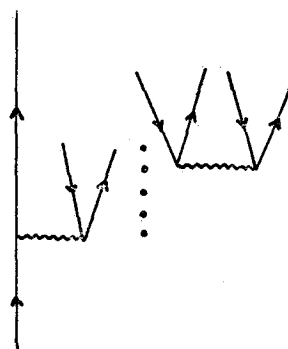


图 3.12

(iii) 滿壳层外有两个粒子的情形

对于滿壳层外有两个粒子的情形, 消去自能項的方法与一个粒子的情形几乎完全相
同, 只不过在这里还应该考虑两个粒子間的相互作用而已。因此

$$\Delta E = \Delta E_0 + \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_{12}. \quad (3.24)$$

同样, 我們也是先將 Ψ 按 ΔE_0 展开, 然后將真空的自能項与 ΔE_0 消去。于是我們可
以撇开真空自能部分不管。

与一个粒子的情形相同, 我們可以將真空部分分成独立的因子, 所以我們以下只討論
壳层外粒子的部分。这时費曼图的能量分母是 $a + \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_{12}$ 。

以下我們再將壳层外粒子部分化簡。为此我們定义

$$\Delta E_1 = {}_0\langle \eta_1 H_1 \Sigma' \left(\frac{p}{a + \Delta E_1} H_1 \right)^n \eta_1^+ | \rangle_0, \quad (3.25)$$

$$\Delta E_2 = {}_0\langle \eta_2 H_1 \Sigma' \left(\frac{p}{a + \Delta E_2} H_1 \right)^n \eta_2^+ | \rangle_0 \quad (3.26)$$

以及

$$\Delta E_{12} = {}_0\langle \eta_1 \eta_2 H_1 \Sigma' \left(\frac{p}{a + \Delta E_1 + \Delta E_2} (H_1 - \Delta E_{12}) \right)^n \eta_2^+ \eta_1^+ | \rangle_0. \quad (3.27)$$

$\Delta E_1, \Delta E_2$ 的定义和前边只有一个粒子的情形是完全相同的。 ΔE_{12} 包括全部將 1, 2 两个粒子連結在一起的費曼图形。連結綫可以是相互作用 H_1 , 也可以是 ΔE_{12} , 如图 3.13 所示。

現在我們就来討論如何化簡。首先可以將所有的項分为兩类, 一类是兩個粒子間有相互作用的, 如图 3.13 (a) 及 (b) 所示 (图中虛綫代表一个 ΔE_{12})。与这一部分相应的波函数 Ψ'' 是

$$\Psi'' = S_{12} S_\infty | \rangle_0, \quad (3.28)$$

其中 S_{12} 代表有相互作用下第一个粒子与第二个粒子的波函数。

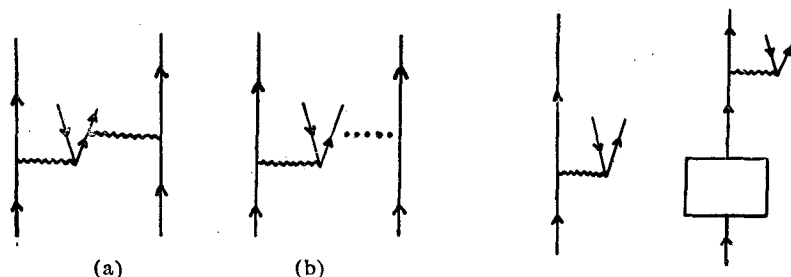


图 3.13

图 3.14

另一类是兩個粒子間沒有相互作用的, 如图 3.14 所示。对于这一类情形, 完全可以用与上节相同的办法消去所有的自能項, 并分別將 ΔE_1 及 ΔE_2 吸收到第一个及第二个粒子的能量分母中去, 于是相应于这一部分的波函数 Ψ' 可以写成

$$\Psi' = S_2 S_1 S_\infty | \rangle_0, \quad (3.29)$$

其中 S_1, S_2 分別为第一个及第二个粒子的波函数。因此滿壳层外兩個粒子的波函数为

$$\Psi = \Psi' + \Psi'' = (S_{12} + S_2 S_1) S_\infty | \rangle_0. \quad (3.30)$$

并且在 Ψ 中完全不包含有自能項。

到此为止, 我們已將滿壳层情形, 以及滿壳层外有一个及兩個粒子情形下的波函数写了出来, 并証明在波函数中的确不存在自能項。显然这个結論是完全可以推广到多个粒子的情形上去, 作的方法与上面介紹的相同, 因此不再重复了。

§ 4 能級的計算

根据上面的理論, 我們求到了滿壳层外一个粒子及二个粒子的波函数, 現在就具体应用它来討論一下滿壳层附近的能級計算的問題。

1. 估計数量級的普遍規則

矩陣元对原子数 A 的数量級的主要因素有三:

(i) 在矩陣元的表示式中每一个 v 的数量級是 $\frac{1}{\Omega}$, Ω 代表体积, 因此每一个 v 的数量級也可以表成 $\frac{1}{A}$, A 是总粒子数. 因此相互作用綫的数目是决定数量級的一个因素.

(ii) 第二个因素是取和的粒子数目. 因为每一次取和是与 $A(\Omega)$ 成正比的, 所以取和的多少是对数量級有影响的.

(iii) 第三个因素是动量守恒規律的数目. 每有一个动量守恒的規律就减少了一次取和, 因此它的貢獻是与 $\frac{1}{A}$ 成比例的.

根据上述規律, 我們可以分別將滿壳层, 滿壳层外一个粒子, 以及滿壳层外两个粒子的能量的数量級估計出来.

2. 对能量数量級的估計

(i) 滿壳层情形下能量的大小:

在滿壳层的情形下,

$$\Delta E_0 = {}_0 \langle | H_I \Sigma \left(\frac{P}{a} H_I \right)^n | \rangle_0. \quad (4.1)$$

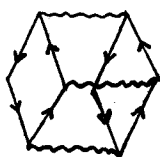


图 4.1

对应的图形之一如图 4.1 所示. 在这个具体例子中, 有三条相互作用綫, 六个取和, 并有兩個动量守恒关系, 因此它的数量級为 A . 如果相互作用綫加多, 并不影响其数量級, 因为每增加一条相互作用綫, 一定相应地增加两个取和与一个动量守恒关系, 以致对数量級不发生影响, 因此滿壳层的能量的大小是与 A 成正比的.

(ii) 滿壳层外一个粒子的能量的大小:

根据 §3 的結果:

$$\Delta E_1 = {}_0 \langle | \eta H_I \Sigma \left(\frac{P}{b} H_I \right)^n \eta^+ | \rangle_0. \quad (4.2)$$

对应的图形之一如图 4.2 所示. 用同样的方法, 可以估計出在这个具体例子中, 它的数量級是 1. 并且同样, 当作用綫数加多以后, 不影响其数量級, 因此滿壳层外一个粒子的能量的大小是与 1 成正比的.

(iii) 滿壳层外两个粒子的能量的大小:

滿壳层外两个粒子的能量为

$$\Delta E_{(1+2)} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_{12}. \quad (4.3)$$

根据前一段的討論, ΔE_1 及 ΔE_2 的数量級均为 1. 因此在此只須对 ΔE_{12}

的大小进行一下分析, 对应于 ΔE_{12} 的图形之一如图 4.3 所示. 用同样的方法可以估計出其数量級为 $1/A$, 并且当作用綫增加以后, 并不影响其数量級, 因此 ΔE_{12} 的数量級为 $1/A$.

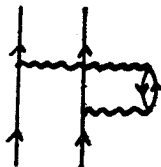


图 4.2

同样不难看出: 滿壳层外有三个粒子的能量:

$$\Delta E_{(1+2+3)} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 + \Delta E_{12} + \Delta E_{23} + \Delta E_{31} + \Delta E_{123}, \quad (4.4)$$

其中 $\Delta E_1, \dots, \Delta E_{12}, \dots$ 和 (4.3) 式完全一样. 而 ΔE_{123} 的数量級为 $1/A^2$, 在計算原子核的能譜时, 这项完全可以略去. 这样, 我們就証明了在 $\left(\frac{1}{A}\right)^2$

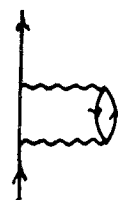


图 4.3

近似下, 满壳层外有多个粒子的原子核的能谱可以还原为一个粒子和两个粒子的原子核的能谱。因此在满壳层附近利用耦合理论计算原子核能谱是正确的。这个结论如果由物理上来看更是一目了然的, 因为满壳层外的三个粒子, 它们遇到一起发生相互作用的几率很小, 是与 $(1/A^2)$ 成正比的, 而大部分时间是不能三个一齐靠近的, 因此 ΔE_{123} 一定很小, 可以略去不计。

§5 跃迁矩阵元的计算

现在我们将 §3 中得到的关于波函数的结果用到计算跃迁矩阵元上去。

1. 波函数归一化常数的表示式及其数量级的估计

(i) 满壳层的情形:

首先我们将满壳层波函数的形式改写一下。为此我们定义 S_i 为一个包含任意次相互作用的相連項。于是满壳层的波函数可以改写为

$$\Psi = (1 + S_i + \frac{S_i^2}{2!} + \cdots + \frac{S_i^n}{n!} + \cdots) | \rangle_0 = e^{S_i} | \rangle_0 \quad (5.1)$$

用(5.1)式的结果来讨论波函数的归一化常数是比較方便的。

其次在计算波函数的归一化常数时, 必须注意到在波函数中是可能包含有违反泡里原理的項。但是根据 §2.3 的讨论, 只要我们将所有交换的情形都考虑进去, 那么违反泡里原理的項就自行消去了。因此在计算

$${}_0 \langle | (\cdots \frac{S_i^{+n}}{n!} + \cdots \frac{S_i^{+2}}{2!} + S_i^{+1} + 1) (1 + S_i + \frac{S_i^2}{2!} + \cdots + \frac{S_i^n}{n!} + \cdots) | \rangle_0 \quad (5.2)$$

时, 需要将全部交换的情形计算进去。

现在我们考虑

$${}_0 \langle | \frac{S_i^{+n}}{n!} \cdot \frac{S_i^m}{m!} | \rangle_0$$

中的一些項。假设在这些項中有 l_1 个情形是 i_1 个 S_i^{+1} 与 j_1 个 S_i 相互交换連在一起的(见图 5.1), l_2 个情形是 i_2 个 S_i^{+1} 与 j_2 个 S_i 相互交换連在一起的, ... 其中 $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k$ 等分别可以等于 1, 2, 3, 4, ..., 只是需要满足:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=1}^k l_p i_p &= n, \\ \sum_{p=1}^k l_p j_p &= m. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

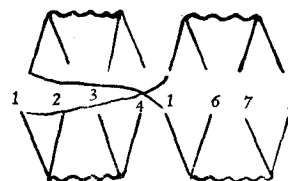


图 5.1

因此这样的項的总和为

$$\frac{\overbrace{C_{i_1}^n C_{i_1}^{n-i_1} \cdots C_{i_1}^{n-(l_1-1)i_1}}^{l_1} \cdot \overbrace{C_{i_2}^{n-l_1 i_1} \cdots C_{i_2}^{n-l_1 i_1-(l_2-1)i_2} \cdots C_{i_k}^{i_k}}^{l_2}}{(n!)(m!)} \times$$

$$\times \frac{\overbrace{C_{j_1}^m C_{j_1}^{m-j_1} \dots C_{j_1}^{m-(l_1-1)j_1}}^{l_1} \cdot \overbrace{C_{j_2}^{m-l_1 j_1} \dots C_{j_2}^{m-l_1 j_1-(l_2-1)j_2} \dots C_{j_k}^{j_k}}^{l_2}}{(l_1)!(l_2)!(l_3)!\dots(l_k)!} \times$$

$\times (i_1 \text{ 个 } S_l^+ \text{ 与 } j_1 \text{ 个 } S_l \text{ 所有可能相互交换連在一起的項的总和})^{l_1} \times (i_2 \text{ 个 } S_l^+ \text{ 与 } j_2 \text{ 个 } S_l \text{ 所有可能相互交换連在一起的項的总和})^{l_2} \times \dots \times (i_k \text{ 个 } S_l^+ \text{ 与 } j_k \text{ 个 } S_l \text{ 所有可能相互交换連在一起的項的总和})^{l_k}.$

(5.4)

如果我們定义

$$a^{(i_p)(j_p)} = \frac{(i_p \text{ 个 } S_l^+ \text{ 与 } j_p \text{ 个 } S_l \text{ 所有可能相互交换連在一起的各項之和})}{(i_p)!(j_p)!}, \quad (5.5)$$

那么这样的項之和可以写成

$$\frac{a^{(i_1)(j_1)l_1} a^{(i_2)(j_2)l_2} \dots a^{(i_k)(j_k)l_k}}{l_1! l_2! \dots l_k!}. \quad (5.6)$$

显然这是(5.2)中的一个普遍項。如果对所有 l_p 取和, 則必然就是波函数归一化常数。故

$${}_0 \langle | e^{S_l^+} e^{S_l} | \rangle_0 = \sum_{l_1 \dots l_k} \frac{a^{(i_1)(j_1)l_1} a^{(i_2)(j_2)l_2} \dots a^{(i_k)(j_k)l_k}}{l_1! l_2! \dots l_k!} = e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}. \quad (5.7)$$

(5.7) 式就是我們所要求的結果。將波函数的归一化写成这样的形式以后, 在下面的应用中帶來很大的方便。

关于 $a^{(i_p)(j_p)}$ 的数量級我們可以估計如下。

(A) $a^{(1)(1)}$ 的情形(見图 5.2): 估計的方法与 § 4.2 中介绍的完全一样, 因此在图 5.2 的情形下, 它的数量級为 A , 并且作用綫加多以后不影响数量級, 故 $a^{(1)(1)}$ 的数量級为 A 。



图 5.2

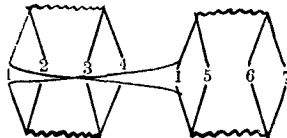


图 5.3

(B) $a^{(2)(2)}$ 的情形(見图 5.3): 在这样的情形下, 虽然比 $a^{(1)(1)}$ 多了兩条作用綫, 并且多了四个取和, 但是由于动量守恒規律增加了兩個(其中之一是由于交换一次而产生的), 因此对数量級沒有影响, 仍然是与 A 成比例的。

用同样的方法, 完全可以推广到估計 $a^{(i)(j)}$ 上去。虽然在 $a^{(i)(j)}$ 的情形下, 作用綫增加了, 取和数也增加了, 但是由于交换的关系, 动量守恒規律也加多了, 以致使得它們的貢獻相互抵消, 而不影响数量級的大小。因此我們得到以下的結論。

$$a^{(i)(j)} \propto A \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.8)$$

(ii) 滿壳层外一个粒子的情形:

如果我們定义

$$b^{(i)(j)} = \frac{(i+1) \uparrow^*}{i! j!}, \quad (5.9)$$

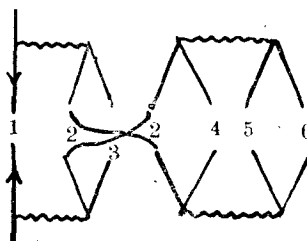
* 其中包括單粒子波函数的 S_l^+ 与 $(j+1)$ 个, 其中也包括單粒子波函数的 S_l 所有可能相互交换連在一起的各項之和。

其中 $i, j=0, 1, 2, \dots$ (见图 5.4 及 5.5), 那么利用前一段的讨论, 立刻可以得到



$i=0 \quad j=0$

图 5.4



$i=1 \quad j=1$

图 5.5

$${}_0\langle |S_{\infty}^+ S_1 + S_1 S_{\infty}^-| \rangle_0 = \left(\sum_{i,j} b^{(i)(j)} \right) e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}. \quad (5.10)$$

关于 $b^{(i)(j)}$ 的数量级, 我们可以用上面同样的办法来讨论. 首先 $b^{(0)(0)}$ 的数量级很容易就估计出来是 1. 每增加一次交换时, 一定多牵涉到图的一个部分, 因此增加了一些相互作用, 也增加了一些取和, 但是由于多了一次交换, 所以动量守恒规律增加了, 以致使得增加一次交换而不影响数量级的大小. 所以

$$b^{(i)(j)} \propto 1 \quad (i, j=0, 1, 2, \dots). \quad (5.11)$$

(iii) 满壳层外两个粒子的情形.

对这种情形我们可以分成两部分来讨论.

(A) 在波函数中两个粒子间没有相互作用, 并且在作归一化积分时, 彼此不发生交换的情形: 关于这一部分可以直接用前一段的结果, 因此它的归一化为

$$\left(\sum_{i,j} b_1^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}, \quad (5.12)$$

其中附码 1, 2 分别代表第一个及第二个粒子.

(B) 两个粒子间有相互作用, 或者在归一化时, 彼此发生交换的情形 (见图 5.6).

如果我们同样定义 $C^{(i)(j)}$ 代表这类情形下的项, 那么显然归一化常数为

$$\left(\sum_{i,j} C^{(i)(j)} \right) e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}. \quad (5.13)$$

因此整个波函数的归一化常数为

$$\left[\left(\sum_{i,j} b_1^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) + \sum_{i,j} C^{(i)(j)} \right] e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}. \quad (5.14)$$

由前一段的结果得知:

$$b_n^{(i)(j)} \propto 1 \quad (n=1, 2),$$

而 $C^{(i)(j)}$ 的数量级可以用同样的办法来分析, 结果为

$$C^{(i)(j)} \propto \frac{1}{A}. \quad (5.15)$$

到此我们给出了满壳层以外有一个或两个粒子情形下波函数归一化常数的表示式,

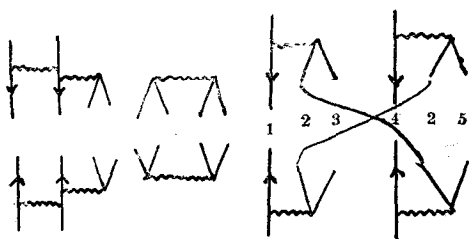


图 5.6

并对其进行数量级进行了讨论。当然这种讨论的方法完全可以推广到多个粒子的情形上去。

2. 跃迁矩阵元的计算

由于跃迁算符是单粒子的算符，因此计算跃迁矩阵元与计算波函数的归一化没有什么本质上的差别。

因此对于满壳层外一个粒子的情形，计算跃迁矩阵元时，我们只要将归一化常数中的 $b^{(i)(j)}$ 换成 $b'^{(i)(j)}$ 即可。于是一个粒子的跃迁矩阵元为

$$p_1 = \frac{\left(\sum_{i,j} b'^{(i)(j)} \right) e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}}{\left(\sum_{i,j} b^{(i)(j)} \right) e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}} = \frac{\sum_{i,j} b'^{(i)(j)}}{\sum_{i,j} b^{(i)(j)}}. \quad (5.16)$$

同样对于满壳层外两个粒子的情形，如果是第一个粒子跃迁，那么在计算跃迁矩阵元时，我们只需将 $b_1^{(i)(j)}$ 换成 $b_1'^{(i)(j)}$ ， $C^{(i)(j)}$ 换成 $C'^{(i)(j)}$ 即可，于是两个粒子情形下的跃迁矩阵元为

$$p_2 = \frac{\left[\left(\sum_{i,j} b_1'^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) + \sum_{i,j} C'^{(i)(j)} \right] e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}}{\left[\left(\sum_{i,j} b_1^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) + \sum_{i,j} C^{(i)(j)} \right] e^{\sum_p a^{(i_p)(j_p)}}} = \frac{\left(\sum_{i,j} b_1'^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) + \sum_{i,j} C'^{(i)(j)}}{\left(\sum_{i,j} b_1^{(i)(j)} \right) \left(\sum_{i,j} b_2^{(i)(j)} \right) + \sum_{i,j} C^{(i)(j)}}. \quad (5.17)$$

根据前面对数量级的分析，可以看出： $C^{(i)(j)}$ 比 $b^{(i)(j)}$ 小一个数量级。同样： $C'^{(i)(j)}$ 比 $b'^{(i)(j)}$ 小一个数量级。因此在(5.17)中可以略去 $\sum_{i,j} C'^{(i)(j)}$ 及 $\sum_{i,j} C^{(i)(j)}$ 不计。于是

$$p_2 \cong \frac{\sum_{i,j} b_1'^{(i)(j)}}{\sum_{i,j} b_1^{(i)(j)}} = p_1. \quad (5.18)$$

(5.18) 的结果说明了：满壳层外两个粒子跃迁的几率与单粒子跃迁的结果相同。当然这个结论可以推广到三个或多个粒子的情形上去。这样就在跃迁问题上给出了单粒子模型正确性的理论证明。显然这个结果可以应用到原子核的磁矩，电四极矩等性质上去。如果从物理上来看，这个结论是很自然的，因为满壳层外的两个粒子遇到一起发生相互作用的几率是与 $\frac{1}{A}$ 成比例的。绝大部分的情况是它们彼此在独立运动，而跃迁是在任何时刻都可以发生的，因此有相互作用的那一部分一定贡献很

图 5.7

小,以致可以略去不計。

至于單粒子的跃迁矩陣元,却与普通壳模型的理論結果很不相同。壳模型的結果相当于在 b' 和 b 中只取第一項,即

$$p_1(\text{壳模型}) = \frac{b^{(0)(0)}}{b^{(0)(0)}}. \quad (5.16')$$

所以用壳模型波函数計算磁矩,电四极矩,跃迁几率等要发生很大的誤差。

§ 6 与实验比較

我們知道:在削裂反应中,一个原子核能抓进去一个中子或者質子。用壳模型的理論可以对这个被抓进去核子的角动量作出估計。例如:

$${}_{17}\text{Cl}_{18}^{65}(d,p){}_{17}\text{Cl}_{19}^{66} \text{ 反应}$$

${}_{17}\text{Cl}_{18}^{65}$ 的基态自旋和宇称是 $\frac{3}{2}^+$, 終态 ${}_{17}\text{Cl}_{19}^{66}$ 的自旋和宇称是 2^+ , 按照角动量和宇称守恒規則,被抓进去中子的軌道角动量 l_n 的可能值有 0, 2, 4 三个, 因为 $l_n=0$ 的离心位壘最小, 按說 $l_n=0$ 的中子是最可能被抓进去的。然而按照壳模型理論,被抓进去的这个中子应处在 $d_{5/2}$ 态上, 因之 l_n 应该等于 2, 而 l_n 的实验值正好是 2, $l_n=0$ 的比例不大于 3%, 这说明由壳模型計算出来的 l_n 值是很好的。但是另一方面, 由壳模型計算出来的象折合寬度等却与实验值相差很大。在 β 和 γ 跃迁方面亦有类似的情况, 例如

$$(g_{9/2})_{7/2}^8 \rightarrow (g_{9/2})_0^2 p_{1/2}$$

$E_3\gamma$ 跃迁几率特別小, 可以很好地用 j 禁戒來說明。但是我們一旦要用壳模型波函数計算跃迁绝对值时, 却与实验相差很大, 这些事实都說明在壳模型里單个核子的 j 是好的量子数, 而壳模型所預示的波函数却并不很好。

这个問題从我們的理論来看是很容易理解的。为簡單起見, 以滿壳层外面有两个核子的情形为例來說明, 对于滿壳层以外有很多个核子的情況事实上也是一样的。假如將滿壳层外的两个核子看成是“光秃秃核子”, 認為它們与滿壳层里面的核子沒有相互作用, 那么它們的波函数就是

$$\eta_2 + \eta_1 + S_\infty | \rangle_0. \quad (6.1)$$

这样选择的波函数就是壳模型的波函数, 但是这种近似并不好, 真正核子态的波函数应是

$$(S_2 S_1 + S_{12}) S_\infty | \rangle_0. \quad (6.2)$$

由于前一項的数量級是 1, 后一項的数量級是 $\frac{1}{A}$, 所以在計算跃迁几率时可以略去后項。則波函数(6.2)变为

$$S_2 S_1 S_\infty | \rangle_0. \quad (6.3)$$

这样选择的波函数代表两个“物理核子”在原子核內作独立运动。这里我們用附帶有“核子云”的“物理核子”的波函数代替了壳模型里“光秃秃核子”的波函数。当然不論是“光秃秃”或者是“物理”的核子, 它們的角动量 j 都是一定的, 因为真空 $| \rangle_0$ 的角动量等于零。在上述 (d,p) 反应中, 因为被抓进去的中子的 j 是一个好的量子数, 由于宇称守恒, l_n 也自然是一个好的量子数。

我們这样考虑的合理性可以从一个簡單的物理图象来理解。在核內两个核子发生相互作用后, 那么这两个核子的态將发生变化, 將由 $S_2 S_1 | \rangle_0$ 跳到 $S_{12} | \rangle_0$, 但是因为这两个

核子在一起发生相互作用的几率是 $\frac{1}{A}$, 因此满壳层外面的一个核子在大部分时间内是感觉不到第二个核子的存在的。因此在考虑跃迁、核子俘获等问题时, 可以把这两个核子看作单独存在的核子, 它们的 j 是一个好的量子数。这样在计算满壳层外有几个核子的原子核的某些性质时, 可以将问题转化为一个核子的情形。至于满壳层外有一个核子的矩阵元则可以选择实验数值。假如我们的理论是正确的话, 那么这样算出来的满壳层外有几个核子的原子核的性质应与实验数值相符合。

1. 关于 $\text{Pb}^{210} \xrightarrow{\beta^-} \text{Bi}^{210} \xrightarrow{\beta^-} \text{Po}^{210}$ 衰变。

这个 β^- 衰变的实验结果可以用图 6.1 表示出来。

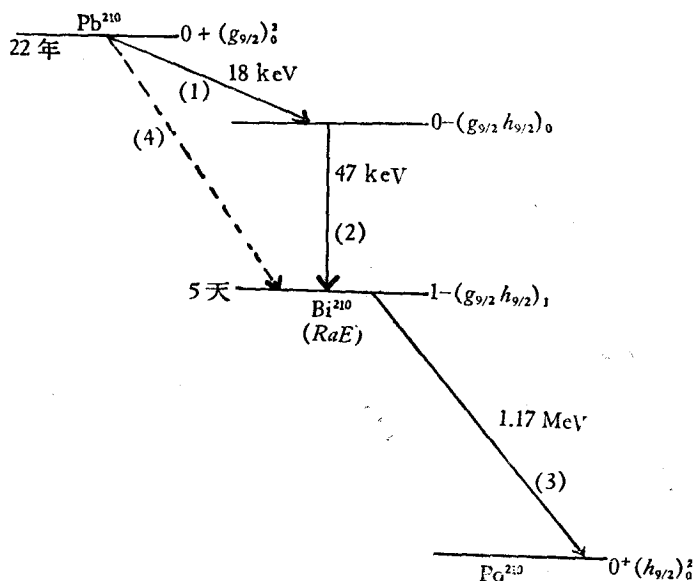


图 6.1 $\text{Pb}^{210} \rightarrow \text{Bi}^{210} \rightarrow \text{Po}^{210}$ β^- 衰变图

图中 $(g_{9/2})^2_0$ 等表示按壳模型所提供的组态

首先我们来看由 $\text{Bi}^{210} 1^-$ 到 $\text{Po}^{210} 0^+$ 的衰变, 这就是有名的 Ra E 衰变。这是一个 $\Delta J=1$ 的第一次禁戒跃迁。一般说来, 对第一次禁戒跃迁, 由于库仑能 $\frac{\alpha Z}{2\rho}$ 大大的大于电子最大动能 W_0-1 , 因而在 β 衰变形状因子中, 起主要作用的项与电子能量无关, 能谱依然是费米统计的分布。但是在实验上发现 Ra E 的能谱不是允许形状的, 这是由于在这个特殊情况下刚好使得 $\frac{\alpha Z}{2\rho}$ 前面的矩阵元接近于零。因此形状因子与能量有关, 能谱的分布就不再是允许形状的了。显然这时 β 衰变的 $\ln ft$ 值应当很大。在这一情形中 $\ln ft = 7.99$, 比 $\text{Pb}^{210} 0^+$ 到 $\text{Bi}^{210} 0^-$ 的一次禁戒 β 跃迁的 $\ln ft$ 大 1.5 倍。

由 (4) 表示的衰变在实验上已给出它的谱形是非允许形状的, 同时它的跃迁几率虽然从能量上来看要比 (1) 所表示的跃迁快一百多倍, 但实际上却不然。关于这两点, 从我们的理论上来看是很容易理解的, 因为 (4) 跃迁是 $0^+ \rightarrow 1^-$, 与 Ra E 一样都是一个核子从 $g_{9/2}$ 跳到 $h_{9/2}$ 的第一次禁戒跃迁。因之它的矩阵元素就与 Ra E 一样, 形状因子 $S_1^{(1)}$ 中 $\frac{\alpha Z}{2\rho}$ 前面的因子也很小。

为了进一步检验理论, 我们再将图 6.1 所示跃迁 (1) 的 $\ln ft$ 值与图 6.2 所示跃迁的

$\ln ft$ 值相比较。

茲計算图 6.1 之跃迁 (1) 的矩陣元: (1) 是由 $\left| \frac{9}{2} \frac{9}{2} 0 0 \right\rangle$ 組态到 $\left| \frac{9}{2} \frac{9}{2} 0 0 \right\rangle$ 的跃迁, 它可以看作为一个 $\frac{9}{2}+$ 中子衰变为 $\frac{9}{2}-$ 的質子。我們將标量 β 衰变算符用 $O^{(0)}$ 表示, 向量算符以 $O^{(1)}$ 表示, 它們都是單粒子跃迁算符。在所考虑的情况下, 由于这是 $0+ \rightarrow 0-$ 跃迁, 作用算符只可能是 $O^{(0)}$, 因之矩陣元平方是

$$\left| \left(\frac{9}{2} \frac{9}{2} 0 0 \mid O^{(0)} \mid \frac{9}{2} \frac{9}{2} 0 0 \right) \right|^2 = \left| \left(\frac{9}{2} \parallel O^{(0)} \parallel \frac{9}{2} \right) \right|^2 W \left(\frac{9}{2} 0 \frac{9}{2} 0; \frac{9}{2} 0 \right)^2 V(000; 000)^2 = \frac{1}{10} \left| \left(\frac{9}{2} \parallel O^{(0)} \parallel \frac{9}{2} \right) \right|^2, \quad (6.4)$$

$\left(\frac{9}{2} \parallel O^{(0)} \parallel \frac{9}{2} \right)$ 是約化矩陣元。对于图 6.2 之跃迁, 从角动量上考虑 $O^{(0)}$ 和 $O^{(1)}$ 部分都可以有贡献, 但是据图 6.1 之跃迁 (3) $O^{(1)}$ 部分贡献很小, 因之只需考虑 $O^{(0)}$ 部分就行了。跃迁矩陣元的平方可写成 (对初态求平均、对終态求和):

$$\frac{1}{10} \sum_{m_1 m_2} \left| \left(\frac{9}{2} m_1 \mid O^{(0)} \mid \frac{9}{2} m_2 \right) \right|^2 = \frac{1}{10} \left| \left(\frac{9}{2} \parallel O^{(0)} \parallel \frac{9}{2} \right) \right|^2. \quad (6.5)$$

根据我們的理論, 这两个跃迁中的約化跃迁矩陣元应当是相等的, 因之它們的 $\ln ft$ 值亦應該是相等的。利用实验上測得的半衰期可以算出跃迁的 $\ln ft$ 值。 $\text{Pb}^{210} \xrightarrow{\beta^-} \text{Bi}^{210} -$ 跃迁的 $\ln ft = 5.44$, $\text{Pb}^{209} \xrightarrow{\beta^-} \text{Bi}^{209}$ 跃迁的 $\ln ft = 5.48$, 完全一样, 理論与实验十分一致。

2. ${}_{19}\text{K}_{21}^{40}$ 的磁矩

${}_{19}\text{K}_{21}^{40}$ 磁矩的实验值 $\mu_N = -1.3$ 。根据壳模型 ${}_{19}\text{K}_{21}^{40}$ 的組态是 $[(d_{5/2})^{-1}(f_{7/2})]_{J=4}$, 在 $d_{5/2}$ 态上有一个質子空穴, 在 $f_{7/2}$ 态上有一个中子。根据我們的理論, K^{40} 的磁矩应当是这两个核子磁矩之和。在实验上已經知道了几个鄰近核的磁矩; ${}_{19}\text{K}_{20}^{39}$ 的 $\mu_N = 0.4$, $\mu_N = 0.1$; ${}_{20}\text{Ca}_{21}^{41}$ 的 μ_N 未知, $\mu_N = -1.9$; ${}_{20}\text{Ca}_{28}^{48}$ 的 $\mu_N = -1.4$ 。假如我們选用壳模型的结果, 認為 $f_{7/2}$ 中子的磁矩是 -1.9 , $(d_{5/2})^{-1}$ 質子的磁矩是 0.1 , 那么这两个核子合成总自旋为 $J=4$ 的合成磁矩將是 -1.7 , 与实验結果 -1.3 約相差 -0.4 。遺憾的是在实验上还没有測量出 Ca^{41} 的磁矩, 因此我們暫且选用 ${}_{20}\text{Ca}_{28}^{48}$ 的实验值作为“物理中子”在 $f_{7/2}$ 态的磁矩, 并將其与 ${}_{19}\text{K}_{20}^{39} \mu_N = 0.4$ 相組合成总自旋 $J=4$, 它的合成磁矩是 -1.1 , 与实验值相差 0.2 。当然 Ca^{48} 的磁矩与 Ca^{41} 的磁矩是不同的, 如果將 ${}_{20}\text{Ca}_{21}^{41}$ 的磁矩选为 -1.65 , 則 ${}_{19}\text{K}_{21}^{40}$ 的磁矩將与实验符合。

3. $\text{Po}^{210} 6+ \rightarrow 4+$ 的 E2 跃迁

Po^{210} 的 $6+$ 和 $4+$ 能級在理論上都是由两个 $h_{9/2}$ 質子耦合而成的, 它們的能級距是 47 keV , 半衰期为 1.5×10^{-9} 秒 (包括內轉換在內), 如图 6.3 所示。

这个跃迁由于能量不够, 沒有 K 內轉換, 它的 L 內轉換系数約为 300 , $M+N$ 等內轉換系数約为 150 , 由此得內轉換系数, 并將內轉換部分分出而得到 γ 跃迁几率 $\gamma_{\text{跃}} \sim 1.4 \times 10^6$ 。按照我們的理論, 这个 E2 跃迁几率可以由 Bi^{209} 电四极矩算出。由 Bi^{209} 电四极矩

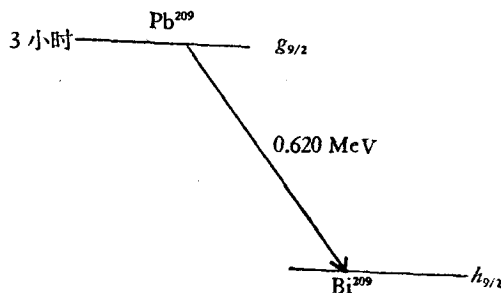


图 6.2 $\text{Pb}^{209} \rightarrow \text{Bi}^{209}$ 衰变图

的实验值

$$Q = \left\langle \frac{9}{2} \frac{9}{2} \left| r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right| \frac{9}{2} \frac{9}{2} \right\rangle = -0.4 \times 10^{-24} \text{Cm}^2, \quad (6.6)$$

可以算出跃迁的约化矩阵元。由此求到跃迁几率：

$$1.5 \times 10^{-9} \text{秒} \quad 6+ \quad \xrightarrow{47 \text{ kev } E_2} \quad 4+ \quad \xrightarrow{\quad} \quad 2+ \quad \xrightarrow{\quad} \quad 0+ \quad \text{Po}^{210} \quad (h_{3/2})^2 \quad \gamma_{\text{理}} \simeq \frac{1}{5} \times 10^5, \quad (6.7)$$

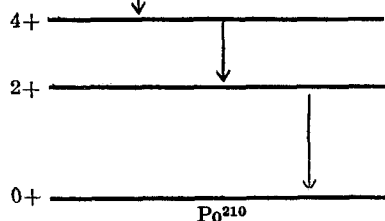


图 6.3 Po^{210} 能级图

约比实验值小 70 倍。与实验相差这么多的原因目前还不清楚。有可能因为在我们的这个理论中忽略了核表面的振动，因而不能应用到 $E2$ 跃迁上去。当然亦有可能是实验数据还有问题，特别是这一跃迁的衰变时间还值得重作一下。在这一问题中， Bi^{209} 电四极矩实验值与壳模型值相差不多，所以我们的理论与平常的壳模型理论

在数量级上是一样的。理论与实验之差有 70 倍之多是很突出的一个现象。

4. $\text{Pb}^{206} 2+ \rightarrow 0+$ 的跃迁

在实验上已经测量了 Pb^{207} 从壳模型组态 $f_{5/2} \rightarrow p_{1/2}$ 的跃迁几率 $\gamma_{\text{理}} = 7.5 \times 10^9 \text{秒}^{-1}$ ，跃迁能级距是 569 kev， Pb^{206} 由 $2+ \rightarrow 0+$ 的跃迁几率 $\gamma_{\text{理}} = 8.92 \times 10^{10} \text{秒}^{-1}$ ， $2+$ 与 $0+$ 间能级距 803.3 kev。根据理论分析结果， Pb^{206} 的 $2+$ 和 $0+$ 的壳模型组态可能各是 $(f_{5/2} p_{1/2})_{2+}$ 和 $(p_{1/2})_{0+}^2$ ，与 Pb^{207} 的情况一样，都是一个 $\frac{5}{2}-$ 的中子到 $\frac{1}{2}-$ 的跃迁。因之，根据我们的方法可以计算出这两个跃迁的比值。最终理论结果是：

$$\frac{\gamma_{\text{理}}(\text{Pb}^{206})}{\gamma_{\text{理}}(\text{Pb}^{207})} \sim 3.3, \quad (6.8)$$

而实验比值

$$\frac{\gamma_{\text{理}}(\text{Pb}^{206})}{\gamma_{\text{理}}(\text{Pb}^{207})} \sim 12. \quad (6.9)$$

理论比值比实验比值约小四倍，这是一个中子 $E2$ 跃迁，表面振盪在跃迁中起很大的作用，因此问题的原因也可能仍和上面 Po^{210} 的情形一样。

参 考 文 献

- [1] Brueckner, K. A., *Phys. Rev.* **95** (1954), 217; **97** (1955), 1344, 1353; **100** (1955), 36.
- [2] Goldstone, J; *Proc. Roy. Soc.* **239** (1957), 267.

О МЕХАНИКЕ ЯДЕРНОЙ МОДЕЛИ НЕЗАВИСИМЫХ ЧАСТИЦ

Юй Мин Чжан Чун-хуа Юй Ю-вэн

(Институт атомных энергий АН)

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривали вопрос о механике ядерной модели независимых частиц. Показали, что решающую роль о движении независимых частиц играет объёмный эффект. Каждый нуклон вблизи заполненных оболочек вследствие взаимодействия этого же нуклона с нуклонами внутри заполненных оболочек поляризует окружающее их ядерное вещество и создает вокруг него ядерное облако. Поэтому магнитный момент и эффективные заряды этого же нуклона несколько меняются. Но угловой момент и четность нуклона с поляризующим ядерным облаком сохраняются в силу закона сохранения углового момента и четности. В ядре вероятность столкновений двух нуклонов обратно пропорциональна объёму ядра Ω . Вероятность столкновений трёх нуклонов — квадрату объёма ядра Ω^2 и т. д. Итак, мы показали, почему результаты вычисления ядерных энергетических уровней при помощи теории связи совпадают с опытами. Так же совпадают с опытами угловой момент и четность каждого нуклона, дающиеся моделью оболочек. Но мы не можем вычислить ядерного углового момента и вероятности перехода при помощи волновых функций модели оболочек.