

关于重原子核的壳结构理论^{*†}

于 敏

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文讨论了满壳层外两个核子之间的相互作用问题。指出微扰方法可以应用。提出分波计算方法,利用这种方法计算了 Pb^{208} , Po^{210} , Bi^{210} 的能谱,结果与实验十分符合。并且得出结论,一般地说,原子核能谱是由 S 波相互作用决定的。相互作用强度满足有效力程和散射长度的要求,并且和核力形状关系不大。在一些特殊情况下, P 波相互作用起相当重要作用。分析这些情况,可以得出结论: 3P_0 波应当是斥力,并且是除 S 波以外两个核子间最强的相互作用。

§1 引 言

根据前一篇文章^[1]所讨论的结果,在微扰级数收敛的条件下,在严格的 $1/A$ 近似下 (A 是原子数),我们可以把满壳层附近原子核的能谱学问题分为三类:1)满壳层外有一个核子的原子核的能谱;2)满壳层外有两个核子的原子核的能谱;3)满壳层外有多个核子的原子核的能谱。一个核子的能谱学解决这个核子在其中运动的平均场,这个平均场的强度除了边界效应外和 A 是无关的;从一个核子的能谱出发,讨论两个核子的能谱,主要是解决在原子核中两个核子间的相互作用强度(当然在这类问题中,相互作用强度是和单个核子的波函数有关系的,因此和平均场的选择也有一定的关系,然而一般来说相互作用强度对平均场的变化是不敏感的)。这种相互作用强度是和 A 成反比的,因为两个核子只有在核力范围以内才能发生相互作用,原子核愈大,它们靠近在一起的几率愈小,所以相互作用是与 A 成反比的。从一个核子和两个核子的能谱出发,讨论多个核子的能谱,那末主要接触的问题是上引理论正确程度。以三个核子的能谱为例,它除了牵扯到单个核子的能谱和两个核子之间的相互作用能以外,当然还包含三个核子同时发生相互作用的相互作用能。而这种相互作用能是与 $1/A^3$ 成比例的,因为三个核子同时靠近在核力范围以内的几率是与 $1/A^3$ 成比例的。这种相互作用能在重原子核的情况下十分微小,可以忽略,所以三个核子的能谱在原则上可以从单个核子的能谱和两个核子的能谱推算出来。

在另一篇文章^[2]中将讨论满壳层外有一个核子的原子核的能谱问题,本文则讨论两个核子的能谱问题。在这个问题中,一般地说有两个困难需待解决:第一个困难是我们目前关于核力的知识还远不完备;第二个困难是两个核子在原子核内的相互作用能是一个

* 1959年5月21日收到。

† 为庆祝中华人民共和国国庆九周年而作。

很复杂的无穷級数, 因此即使我們已經解决了核力的問題, 初看起来, 这个問題似乎仍旧是一个十分复杂的問題。

但是下面的估計表明, 如果两个核子之間的相互作用不具有特殊的奇異性(例如硬核心), 那末无穷級数事实上很快地收斂, 平常的微扰理論是可以应用的。这一点我們同意司維亞切斯基(Swiatecki)和貝塞(Bethe)^[6]的意見。这样, 問題就归結到我們对核力知識目前还不够完备的困难。

在作者的一篇文章^[4]中, 曾建議采用分波法計算相互作用能。核力是短程力, 而且在原子核中核子間的相对动能一般小于 60 百万电子伏, 所以 D 波以上的高次波的相互作用几乎可以忽略。采用分波法不但使計算簡化, 而且在目前我們对于核力的知識还不完备的情况下, 更具有重要的意义。因为我們对于两个核子間的 S 波相互作用知道得比較清楚, 而对于高次波相互作用, 無論是在原子核中或者是在二体散射实验中, 玻恩近似都不是一个十分坏的近似, 所以我們可以直接用二体散射实验相移計算在原子核中两个核子間相互作用的高次波部分。这样, 我們就可以在某种程度上避免了不知道核子間相互作用势所帶來的困难。

本文具体地应用这种办法到双滿壳层原子核 Pb^{208} 附近的原子核的能級上, 并和現有的一些实验数据进行了比較。

在 §2 中, 从前一篇文章^[1]中引述了一些这里所需用到的結果, 并討論了在两个核子之間的相互作用能中, 最低几次微扰的数量級。由于泡利原理的影响, 可以应用微扰方法。在 §3 中, 指出在目前对核力知識还不完备的情况下, 最好采用分波的計算方法, 給出了計算公式, 这种方法也簡化了計算上的困难。§4 是关于 Pb^{206} 和 Po^{210} 的計算結果(只包含 S 波相互作用), 指出这两个原子核的能級基本上是由 S 波相互作用决定的。在这一节中, 还提出了一个粗略估計原子核能級位置的方法, 利用这个方法可以很方便地估計出原子核的能譜。§5 討論了 Bi^{210} 的能譜, 指出在特殊情况下, 高次波的相互作用不可忽略。根据这些結果, 得出核力在 1P_0 态必須是很强的排斥力, 3P_2 态可能是吸力, 并比較弱(比 1P_0 弱 3 倍左右)。指出 1P_0 态的斥力可能和壳模型的反双重态問題有关。

§2 两个核子間的相互作用能

根据前一篇文章^[1]的結果, 在滿壳层外有两个核子的原子核的能級能量 E 等于

$$E = E_1 + E_2 + \Delta E_{12},$$

式中 E_1 和 E_2 分别是單个核子的能級的能量, 它們可以从滿壳层外有一个核子的原子核的能級求得。 ΔE_{12} 是两个核子之間的相互作用能。 ΔE_{12} 包含着所有这样的費曼图形: 这种图形有两根入射的外綫和两根出射的外綫, 并且图形是关联的, 不能分割为互不关联

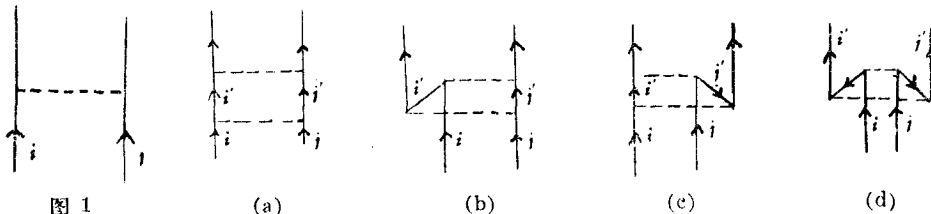


图 2

的兩部分。包含核力 v 一次的費曼图形只有一个(图 1)。相应的矩陣元是 $(ij|v|ij) - (ji|v|ij)$ 。 i, j 分別代表两个光秃秃的核子^[1]的态,也就是單个核子的壳模型波函数。包含核力 v 二次的費曼图形有四个(图 2)。相应的矩陣元是

$$\sum_{i'j'} \left[(ij|v|i'j') \frac{Q}{E_i + E_j - E_{i'} - E_{j'}} (i'j'|v|ij) - (ji|v|i'j') \frac{Q}{E_i + E_j - E_{i'} - E_{j'}} (i'j'|v|ij) \right].$$

对于(a) $i'j'$ 的动量都在費米极大以上;对于(b) j' 在費米极大以上, i' 在以下; (c) 反之; 对于(d) $i'j'$ 都在費米极大以下。并且在 (b), (c) 的矩陣元以前应冠以負号。

不难看出,所有 ΔE_{12} 的項都是与 $1/A$ 成比例的。

下面估計 ΔE_{12} 的最低几次微扰的数量級。为了簡單起见,假設核力 v 与自旋无关,并且是塞伯(Serber)型力:

$$v = v_0 e^{-\alpha^2 r^2} \frac{1}{2} (1 + P), \quad (1)$$

式中 $\alpha = 0.6 \times 10^{13}$ 厘米⁻¹, $v_0 = 40$ 百万电子伏。这种势的束縛态的結合能是零,它的强度大致介于独态和三重态相互作用之間。 v 的矩陣元等于

$$(k_i' k_j' | v | k_i k_j) = \frac{v_0}{\Omega \alpha^3} \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(e^{-\frac{|\mathbf{k}_i' - \mathbf{k}_i|^2}{4\alpha^2}} + e^{-\frac{|\mathbf{k}_j' - \mathbf{k}_j|^2}{4\alpha^2}} \right), \quad (2)$$

式中 Ω 是原子核体积。

茲先討論两个核子动量相等 $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_j$ 的情形。这时一次微扰

$$\langle v \rangle = \frac{v_0}{\Omega \alpha^3} \pi^{3/2}. \quad (3)$$

二次微扰中,不难看出 (b), (c), (d) 皆等于零,只有 (a) 不等于零。

$$\langle v \frac{Q}{a} v \rangle = \left(\frac{v_0}{\Omega \alpha^3} \frac{\pi^{3/2}}{2} \right)^2 \int 4e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}} \cdot \frac{M^*}{-k^2} \cdot \frac{\Omega d^3 k}{(2\pi)^3},$$

式中 k 是激发后的相对动量。在这个式子中,我們假設 E_i 等随着动量的变化可以用有效質量效应来表示,并取 $M^* = 0.5M$ 。因为

$$\mathbf{k}_i' = \frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_j' = \frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{k}$$

(式中 $\mathbf{K}$ 是重心动量; $\mathbf{k}_i'$, $\mathbf{k}_j'$ 是激发后核子的动量),而 $\mathbf{k}_i'$ 和 $\mathbf{k}_j'$ 应该大于費米极大 k_f , 所以

$$\left| \frac{\mathbf{K}}{2} \pm \mathbf{k} \right| > k_f,$$

这就是上面的积分的极限。經過簡單計算后,得

$$\langle v \frac{Q}{a} v \rangle = - \frac{v_0^2 M^*}{\Omega \alpha^5} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \times 0.20, \quad (4)$$

因子 0.20 是由上面积分极限而来的, 也就是由于泡利原理影响而来的。没有泡利原理的限制, 就没有这个因子, 因此泡利原理使二次微扰减弱 5 倍。

由(3)和(4)得

$$\frac{\langle v \frac{Q}{a} v \rangle}{\langle v \rangle} = -\frac{v_0 M^*}{\alpha^{3/2}} \times 0.20 = 0.09.$$

取 $M^* = 0.5 M$ 。如果没有泡利原理和有效质量效应减弱二次微扰, 则上面的比例增加到 0.94, 二次微扰和一次微扰几乎相等。

三次微扰的费曼图形很多。我们可以(图 3)为例看一看它的数量级。

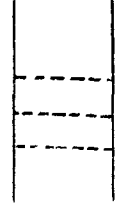


图 3

$$\begin{aligned} \langle v \frac{Q}{a} v \frac{Q}{a} v \rangle &= \left(\frac{v_0 \pi^{3/2}}{\alpha^3} \right)^3 \frac{1}{2\Omega} \iint e^{-\frac{k^2}{4\alpha^2}} \frac{M^*}{-k^2} \left(e^{-\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2}{4\alpha^2}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{|\mathbf{k}+\mathbf{k}'|^2}{4\alpha^2}} \right) \frac{M^*}{-k'^2} e^{-\frac{k'^2}{4\alpha^2}} \cdot \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6} = \\ &= \frac{v_0^3 M^{*2}}{\Omega \alpha^7} \frac{\pi^{5/2}}{24} \times 0.038, \end{aligned} \quad (5)$$

因子 0.038 是由泡利原理得来的。泡利原理使第三次微扰减弱 25 倍。由(3)和(5)得

$$\frac{\langle v \frac{Q}{a} v \frac{Q}{a} v \rangle}{\langle v \rangle} = \left(\frac{v_0 M^*}{\alpha^{3/2}} \right)^2 \frac{\pi}{3} \times 0.038 = 0.009.$$

如果没有泡利原理和有效质量效应, 上面的比例等于 0.93。

以上是相对动量 $\frac{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f}{2} = \mathbf{k}_0 = 0$ 的情形, 当 $\mathbf{k}_0 \neq 0$ 时, 我们只估计了二次微扰, 其结果列在表 1 中。由表 1 可以看出, 二次微扰比一次微扰小 10 倍左右。在相对动量很小时, 这主要是由于泡利原理的限制, 但是在相对动量增加时, 泡利原理的作用逐渐减弱。在相对动量相当大的时候, 泡利原理的作用反倒使二次微扰值增大。这一点很容易理解。因为在 $\langle v \frac{Q}{a} v \rangle$ 中, $a = \frac{k_0^2 - k^2}{M^*}$, 中间态相对动量 k 大于 k_0 的部分对积分的贡献是负的, 而 k 小于 k_0 的部分对积分的贡献是正的, 泡利原理主要是去掉 k 比较小的中间态, 因此随着 k_0 的增加, 泡利原理的作用逐渐减小。特别当 $k_0 = k_f$ 时, 这时微扰积分实际上是对

表 1

相对动量 $k_0 = \frac{ \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f }{2}$	$\frac{\langle v \frac{Q}{a} v \rangle}{\langle v \rangle}$	$\frac{\langle v \frac{1}{a} v \rangle}{\langle v \rangle}$ 没有泡利原理和有效质量效应
0	0.09	0.94
$k_f / \sqrt{2}$	0.06	0.07
k_f	0.17	~ 0

数发散的。这表示: 动量大小相等方向相反的核子在费米极大附近的涨落现象很厉害, 严格地说, 微扰方法是不能应用的。在实际情形中, 原子核有一定大小, 原子核的能级是分立的, 因此不会存在发散困难。我们可以近似地把在这种情况下的积分下限取做 $k_f + \Delta k$, 而 Δk 满足

$$\frac{\frac{4\pi}{3}R^3 \cdot \frac{4\pi}{3}k_f^3 \Delta k}{(2\pi)^8} \sim 1.$$

因此 $\Delta k/k_f \sim 0.007$ (在 $A \sim 200$ 左右), 因为积分在激发后相对动量 $k = k_f$ 附近是对数发散的, 所以积分对 Δk 并不敏感, 对 Δk 的粗略估计已经够用了. 表 1 中 $k_0 = k_f$ 一行的数值就是这样算得的.

在原子核中, 二次微扰比一次微扰小的原因在相对运动能量高时和低时是不相同的. 在低能情况下, 主要是由于泡利原理的限制, 而在高能情况下, 即使没有泡利原理的限制, 第一次微扰已经是很好的近似了.

根据以上的讨论, 我们忽略二次以上微扰, 并希望所引起的误差不超过 10—15%.

§3 分波法

在计算 ΔE_{13} 时, 最好采用分波法, 即将核子间的相互作用分成 $S, P, \dots$ 波的相互作用. 核力是短程力, 在原子核中核子间的相对动能一般小于 60 Mev, 所以 D 波以上的高次波的相互作用可以忽略. 这样可以使计算简化, 并且可以在一定程度上克服目前核势还不清楚的困难.

假设两个核子的壳模型波函数分别是

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\frac{2k_0^3}{R}} \sum_{m_1 \nu_1} C_{n_1 m_1, s_1 \nu_1}^{j_1 m_1} Y_{n_1}^{m_1}(\hat{r}_1 z) f_{n_1}(k_0 r_1) \chi_{\nu_1}(1), \\ \psi_2 &= \sqrt{\frac{2k_0^3}{R}} \sum_{m_2 \nu_2} C_{n_2 m_2, s_2 \nu_2}^{j_2 m_2} Y_{n_2}^{m_2}(\hat{r}_2 z) f_{n_2}(k_0 r_2) \chi_{\nu_2}(2), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $f_n(k_0 r)$ 是轨道角动量为 n 的自由粒子的径向波函数, $\sqrt{\frac{2k_0^3}{R}}$ 是它的归一化因子. 我们采用了当 R 很大时的归一化因子, 对铅附近原子核来说, 当 $n \leq 3$ 时, 这是很好的近似, 当 n 大时, 应略加改正; 不过以下我们处处用 R 很大的近似, 所以归一化因子一律采用 $\sqrt{\frac{2k_0^3}{R}}$. 1 和 2 两个核子耦合角动量为 J 的波函数:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2k_0^3}{R} \sum_{m_1 m_2 \nu_1 \nu_2} C_{j_1 m_1 + \nu_1, j_2 m_2 + \nu_2}^{J 0} C_{n_1 m_1, s_1 \nu_1}^{j_1 m_1 + \nu_1} C_{n_2 m_2, s_2 \nu_2}^{j_2 m_2 + \nu_2} \times \\ &\times Y_{n_1}^{m_1}(\hat{r}_1 z) Y_{n_2}^{m_2}(\hat{r}_2 z) f_{n_1}(k_0 r_1) f_{n_2}(k_0 r_2) \cdot \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2). \end{aligned}$$

在文献[4]中, 我们曾将 ψ 改写成重心坐标 $\mathbf{R}$ 和相对坐标 $\mathbf{r}$ 的波函数:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{R} \int_0^{2k_0} K dK \sum_{N n L S j} i^{N+n-n_1-n_2} \times \\ &\times \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)} U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} \times \\ &\times T_{n_1 n_2(L) N n}(K) \sqrt{(2L+1)(2j+1)} w(N n J S | L j) \Phi_{N, n S(j)(J)}(K), \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$T_{n_1 n_2 (L) N n}(K) = \frac{\sqrt{2N+1}}{2L+1} \sum_{m_1 m_2} C_{N0, n m_1 + m_2}^{L m_1 + m_2} C_{n_1 m_1, n_2 m_2}^{L m_1 + m_2} \times \\ \times Y_n^{m_1 + m_2}(\mu) Y_{n_1}^{m_1}\left(\frac{K}{2k_0}, \mu\right) Y_{n_2}^{m_2}\left(\frac{K}{2k_0}, \pi\right),$$

$$\Phi_{N, n S(j)(J)}(K) = \sum_{\nu_1 \nu_2 m M} C_{NM, j-M}^{Jo} C_{nm, S \nu_1 + \nu_2}^{j-M} C_{s_1 \nu_1, s_2 \nu_2}^{S \nu_1 + \nu_2} \times \\ \times Y_N^M(\hat{R}z) Y_n^m(\hat{r}z) \chi_{\nu_1}(1) \chi_{\nu_2}(2) f_N(KR) f_n(kr). \quad (9)$$

K 是重心运动波数, k 是相对运动波数, $\frac{K^2}{4} + k^2 = k_0^2$.

(8)式的意义是: 先把 $j-j$ 耦合波函数变成 $L-S$ 耦合, 变换矩阵元是(8)式中的因子 $\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2L+1)(2S+1)U}$. 再把空间部分波函数变成以重心坐标 $\mathbf{R}$ 和相对坐标 $\mathbf{r}$ 为变数的波函数, 变换矩阵元是 $T_{n, n_1(L) N n}(K)$ 因子. 再把相对运动的轨道角动量 n 和自旋 S 耦合成 j , 变换矩阵元是(8)中的 $\sqrt{(2L+1)(2j+1)w}$, w 是莱卡(Racah)系数. Φ 是 $\mathbf{N} + (\mathbf{n} + \mathbf{s} = \mathbf{j}) = \mathbf{J}$ 耦合波函数.

由(8)式可以得 ΔE_{12} ^[42]:

$$\Delta E_{12} = -\frac{4\pi\hbar^2 k_0}{MR^2} \sum_{S, n, j} \int_0^1 \mathscr{Y}_{s_{nj}}(\mu) \frac{\tan \eta_{s_{nj}}}{k} d\mu, \quad (10)$$

式中

$$\mathscr{Y}_{s_{nj}}(\mu) = 16\pi^3 P^2 \sum_{Nm} (2j_1+1)(2j_2+1)(2N+1) \\ (2S+1)(2j+1) \left| \sum_{Lm'} U \begin{pmatrix} n_1 & s_1 & j_1 \\ n_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{pmatrix} C_{N0, nm}^{Lm} \right. \\ \left. w(NnJS) \begin{vmatrix} Lj \\ n_1 m', n_2 m-m' \end{vmatrix} Y_n^m(\hat{r}z) \chi_{-m} f_n(kr) \right. \\ \left. Y_{n_1}^{m'}(\mu, 0) Y_{n_2}^{m-m'}(\mu, \pi) \right|^2, \\ -\frac{\hbar^2}{M} \frac{\tan \eta_{s_{nj}}}{k} = \langle \sum_m C_{nm, s-m}^{jo} Y_n^m(\hat{r}z) \chi_{-m} f_n(kr) \\ | \psi \rangle \sum_{m'} C_{nm', s-m'}^{jo} Y_n^{m'}(\hat{r}z) \chi_{-m'} f_n(kr) \rangle, \quad (11)$$

式中 $\mu = \frac{K}{2k_0}$, $\frac{k}{k_0} = \sqrt{1-\mu^2}$. 这里用到

$$\int_0^R f_N(KR) f_N(K'R) R^2 dR = \frac{\pi}{2K^2} \delta(K-K'),$$

这一点必须在 R 很大时才正确, $P^2=1$ 或 $\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+s})^2$ 是由波函数的反对称化来的^[4]. 核力 v 对 S 和 j 是对角綫的, 但对 n 不一定是对角綫的. 当 v 包含張量力时, 它将把 S 波和 D 波, P 波和 F 波等等混合起来, 不过 D 波, F 波等高次波对 ΔE_{12} 的贡献很小, 因此我們忽略这一点.

(10)式有两个优点: (1) 因子 $\mathcal{D}$ 和核力 v 无关, 它完全由 ψ 决定, 和核力有关的部分只是 $\frac{\tan \eta}{k}$, 因此当我们选择不同的核力, 研究由于它的变化对核譜的影响时, 这个公式很方便; (2) $-\frac{\hbar^2}{M} \frac{\tan \eta}{k}$ 是 v 在同一能层上的矩陣元, 这是因为我們假设原子核很大, 在相互作用前后两个核子的重心动量 K 不改变, 因此相对动量 $k=\sqrt{k_0^2-K^2/4}$ 也不改变. 这样 η 就是二体散射的玻恩近似相移.

先討論 S 波的相移. 我們已經知道 S 波散射长度和有效力程, 但是还不知道給出这些参数的势的形狀. 我們知道 S 波玻恩相移和二体散射相移是大不相同的, 因此我們不能直接利用散射长度和有效力程, 必須首先假定一个給出这些参数的势. 表 2 給出几种常用势. 由各种势算出来的玻恩相移不完全相同(图 4), 不过相差不多, 而且在低能方面玻恩相移比較小的势(例如介子型), 在高能方面会給出比較大的玻恩相移. 在原子核結構問題中, 两个核子間的相互作用能是低能和高能相互作用的平均, 因此我們可以說, 势形狀的变化对于計算原子核結構問題影响不大, 后面的具体計算結果也証明这一点.

表 2

	$v_0(\text{Mev})$			$\alpha(10^{13} \text{ 厘米}^{-1})$		
	位 阱	高 斯	介 子	位 阱	高 斯	介 子
單 态	13.7	36	47.3	0.388	0.60	0.855
三 重 态	34.2	71	52.3	0.488	0.67	0.740

关于高次波相移, 我們不能象 S 波那样选到一个合适的势. 因为高次波相互作用和势的交換性質、張量力、自旋軌道耦合力的成分等等都有很大关系, 在这些方面我們目前所知甚少, 因此很难找到一个可靠的势来处理高次波相移. 不过高次波相互作用主要是在相对运动能量很高的情况下发生的. 在这种情况下, 玻恩近似相移和二体散射相移已很接近.

以

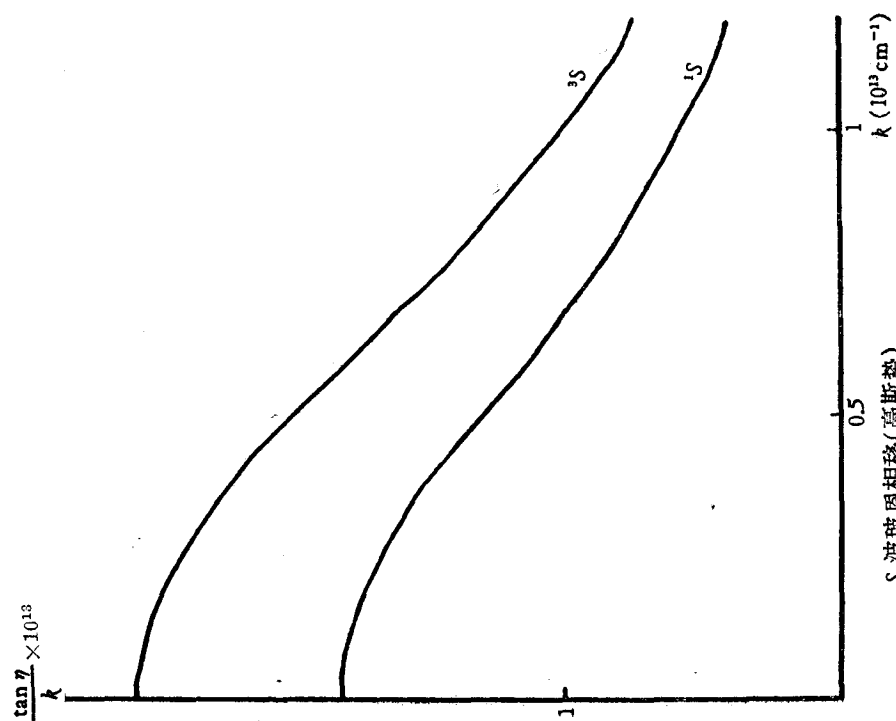
$$v = v_0 e^{-\alpha^2 r^2}, \quad v_0 = -36 \text{ Mev}, \quad \alpha = 0.60 \times 10^{13} \text{ 厘米}^{-1}$$

为例, 对于 P 波

$$\frac{\langle v \frac{1}{a} v \rangle}{\langle v \rangle} \sim 0.14 \quad \text{当相对动量 } k \rightarrow 0;$$

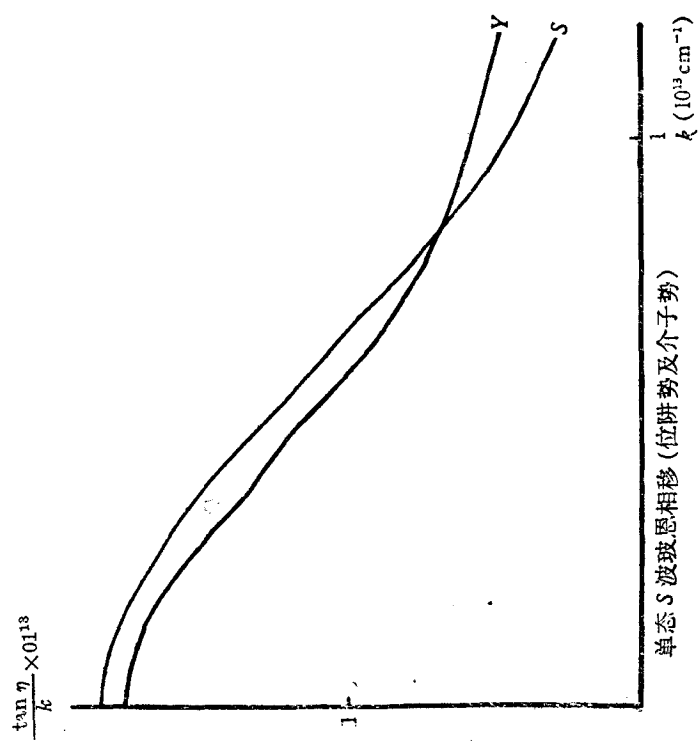
$$\frac{\langle v \frac{1}{a} v \rangle}{\langle v \rangle} \sim 0.11 \quad \text{当 } k \rightarrow k_f.$$

所以我們可以用二体实验散射相移来代(11)式中的 η . 因为在原子核中两个核子之間的



S 波玻恩相移(高斯势)

图 4(b)



单态 S 波玻恩相移(位阱势及介子势)

图 4(a)

相互作用能主要是 S 波产生的, 所以即使这样做会引进一些误差问题也不严重。

我们在下面的计算中所采取的是费西巴哈(Feshbach)和婁曼(Lomon)^[5]所给的 P 波和 D 波相移。他们的相移并不能完全很好地解释包括极化等在内的全部散射实验, 因此并不是十分完善的。不过他们所给的相移包含着一些从核结构观点看起来很需要的特点(见 §5): 3P_0 波相移最大, 并且是负的; 其次是 3P_2 波, 并且是正的(图 5)。

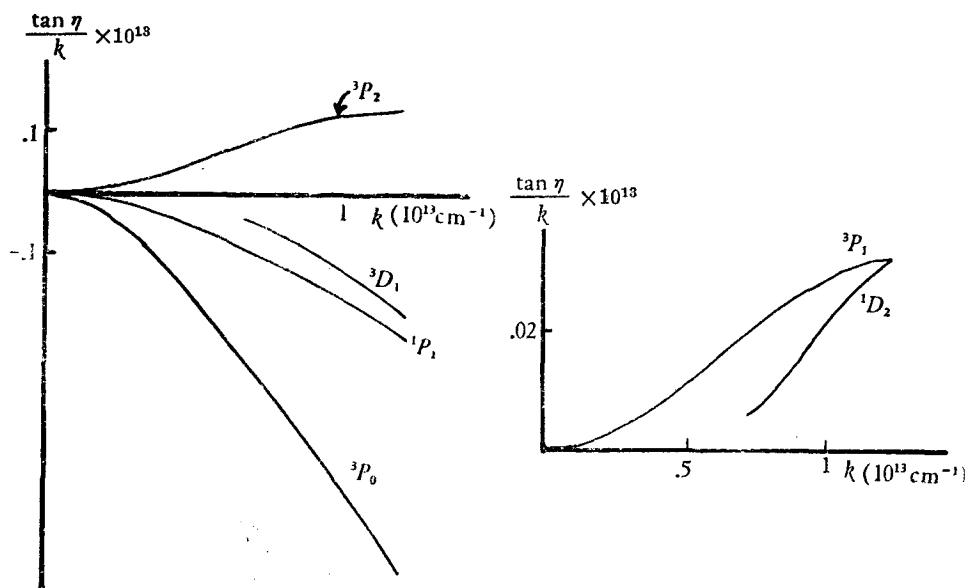


图 5 高次波相移取自 Feshbach Lomon

§4 关于 Pb^{208} 附近一些原子核的能级: S 波相互作用

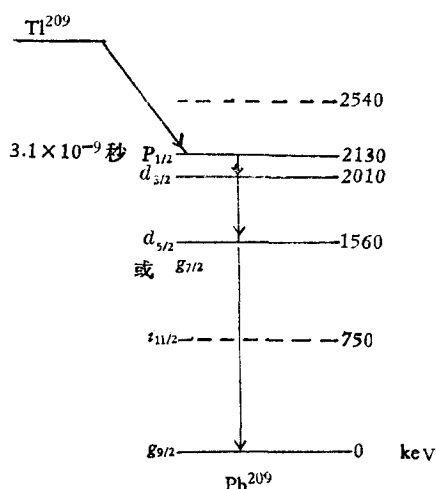
Pb^{208} 有 82 个质子和 126 个中子, 是一个双满壳层原子核, 它的基态的自旋和宇称是 0^+ 。为了和下面的理论结果比较起见, 把实验上已经测出的 Pb^{209} , Bi^{209} , Pb^{207} , Po^{210} , Pb^{206} 和 Bi^{210} 的能级图划在图(6)——(11)上。

要计算 ΔE_{12} , 须先选择适当的 k_0 值。 k_0 值约相当于费米极大, 取核半径为 $A^{1/3}r_0$, 则

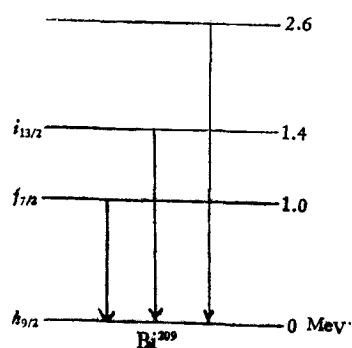
$$\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 r_0^3 A \cdot k_0^3}{(2\pi)^3} = \frac{A}{4},$$

$$k_0 = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{r_0} \sim \frac{1.5}{r_0}.$$

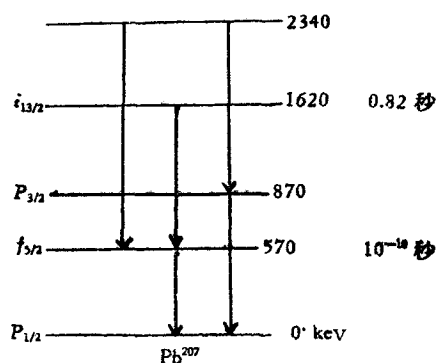
我们在计算中, 取 $k_0 = 1.1 \times 10^{18}$ 厘米⁻¹, 相当于 $r_0 \sim 1.3 \cdot 10^{-18}$ 厘米。 k_0 既然与 r_0 成反比, 因此 ΔE_{12} 好象与 r_0^6 成反比[(10)式], 但实际上并非如此。 r_0 减小, k_0 增大, 两个核子间的相对动量 k 平均地说也增大, 我们知道 S 波相互作用随着相对动量的增大而减小, 所以(10)式中的积分随着 k_0 的增加而减小。因此 ΔE_{12} 并不完全与 r_0^6 成反比, 事实上更近于与 r_0^2 成反比。换言之, k_0 与 ΔE_{12} 中的积分之积差不多不随 k_0 而变。所以在 k_0 的选择上问题不大。

图 6 Pb^{209} 的能级图

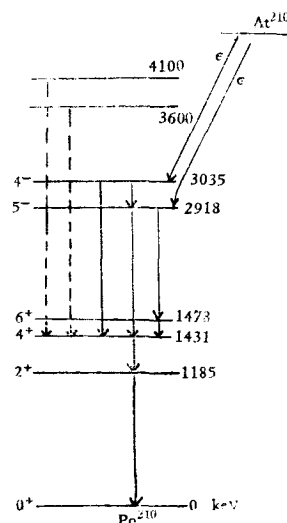
Strominger 等: Phys. Rev. **103** (1956), 748
Harvey: Canad. J. Phys. **31** (1953), 278

图 7 Bi^{209} 的能级图

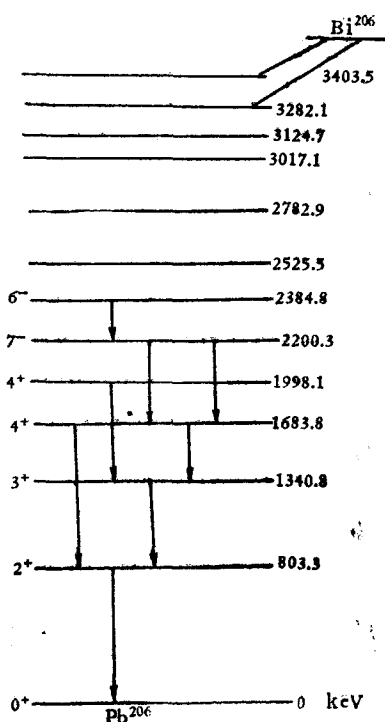
Hollander 等: Rev. Mod. Phys. **25** (1953), 469
Kiehn 等: Phys. Rev. **95** (1954), 989

图 8 Pb^{207} 的能级图

Lazar 等: Phys. Rev. **93** (1955), 710
Hollander 等: Rev. Mod. Phys. **25** (1953), 469
Mihelich 等: Phys. Rev. **95** (1954), 1508

图 9 Po^{210} 的能级图

Mihelich 等: Phys. Rev. **95** (1954), 1508
Hoff 等: Phys. Rev. **109** (1958), 447

图 10 Pb^{206} 的能级图

Alburger 等: Phys. Rev. **96** (1954), 1482

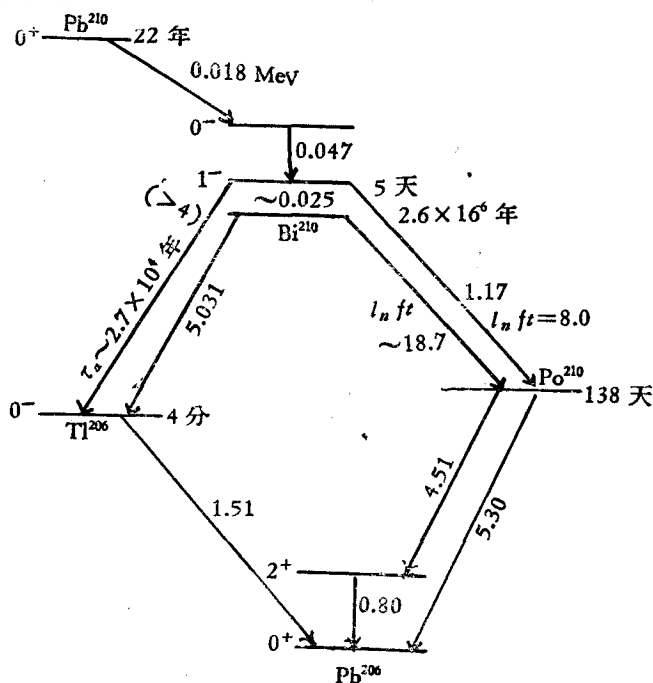
图 11 Bi^{210} 的能级图Plassmann 等: Phys. Rev. **96** (1954), 1593Levy 等: Phys. Rev. **94** (1954), 152Fink 等: Phys. Rev. **103** (1956), 651

图 12 和 13 是关于 Po^{210} 和 Pb^{206} 的能级的理论结果。第一行是实验能级(见图 9 和 10),第二行是由 Bi^{209} 和 Pb^{207} 能级计算出来的 $E_1 + E_2$ 值。以下各行是由第二行的 $E_1 + E_2$ 值加上计算出来的 ΔE_{12} 后所得到的理论能级图。第三行是高斯势 S 波相互作用的计算结果。第五行和第六行是位阱势和介子势的计算结果。第四行是高斯势加上 P 波相互作用的结果。此外,还在最后一行给出了用二体散射相移计算出的能级图(为了使计算值与实验值相应,在这种情况下必须取 $r_0 = 1.70 \times 10^{-13}$ 厘米,这种 r_0 太大了,表示所取相移 $\tan \eta/k$ 太大了,不符合实际情况)。

值得注意的是只包含 S 波相互作用的各种结果所给出的能级图都差不多,并且大致上与实验结果相符合。所以势形状的变化对于计算原子核结构问题的影响不大。势形状不同,所给出的 $\tan \eta/k$ 随 k 的变化也不同。计算结果表明这一点是不重要的。特别是利用二体散射相移所得到的 $\tan \eta/k$ 和用势阱所算得的 $\tan \eta/k$ 在形状上相差得十分悬殊,但是所算得的能级序列大体上却是一样的(当然前者在强度上是太强了,不符合实际情况)。1952 年 Pryce^[6] 曾用 δ 型势计算过这些原子核的能级, δ 相互作用只包含 S 波相互作用,并且 $\tan \eta/k$ 与 k 无关,是一个常数,他所得到的能级序列也大体上与实验结果符合。这也是因为能级序列和 $\tan \eta/k$ 的形状关系不大。

产生这种现象的原因可以从因子 $\mathcal{D}$ [(10)式] 的特点上得到解释。图 14 是按 (11) 式画出来的一些 $\mathcal{D}$ 因子。各种能级的 S 波的 $\mathcal{D}$ 因子都有一个共同的特点:当 $\mu = 1$ ($\mu = \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_0^2}}$, $\mu = 1$ 相当于相对动量 $k = 0$) 时, $\mathcal{D}$ 最大,随着 μ 的减小 $\mathcal{D}$ 也减小,随

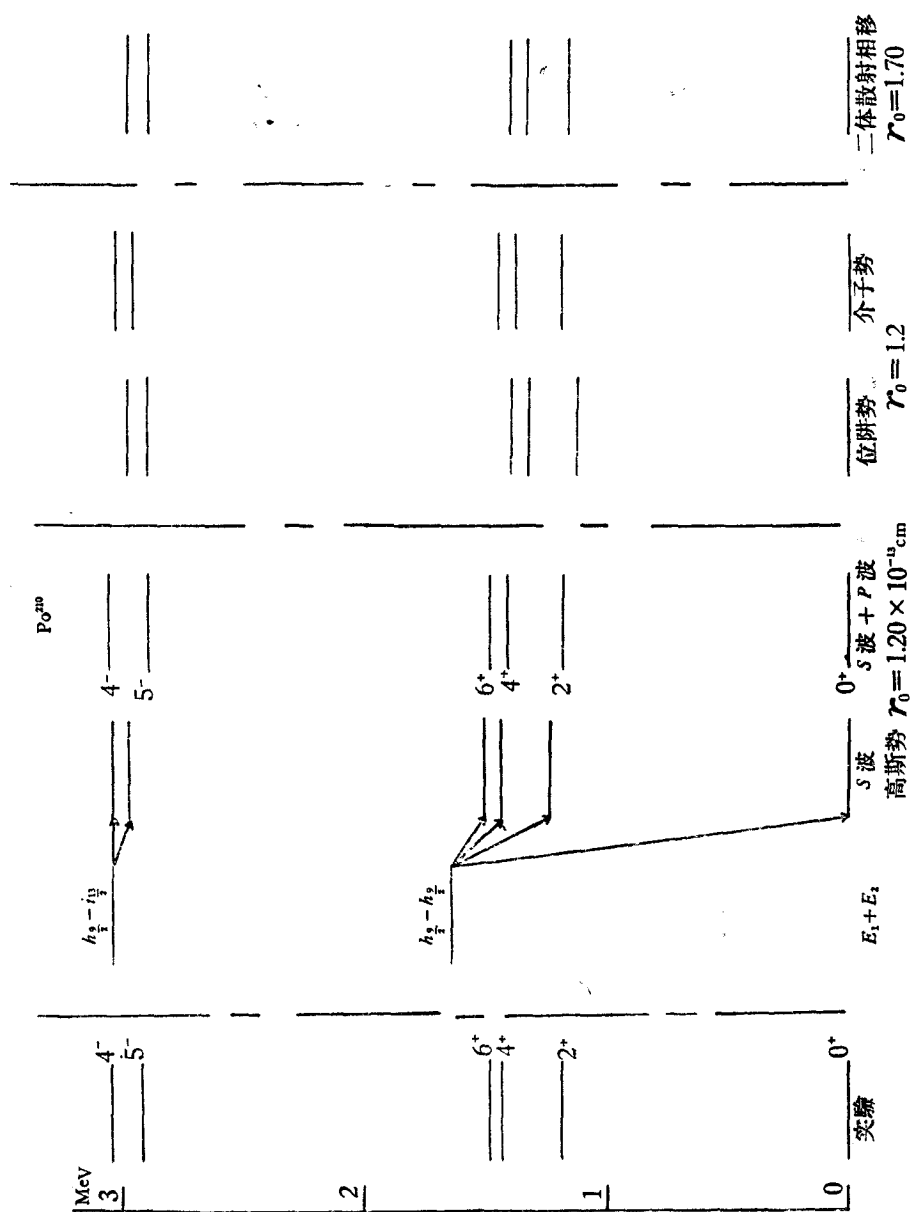


图 12

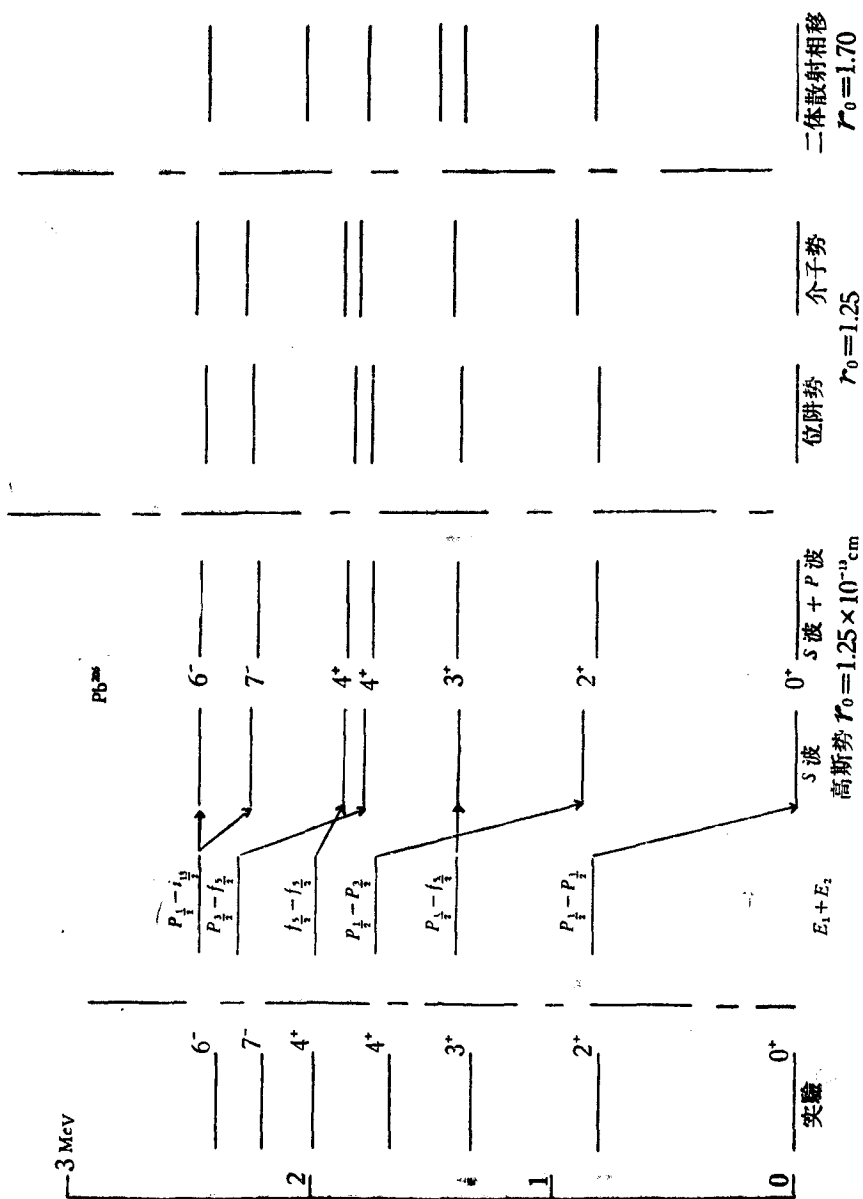


圖 13

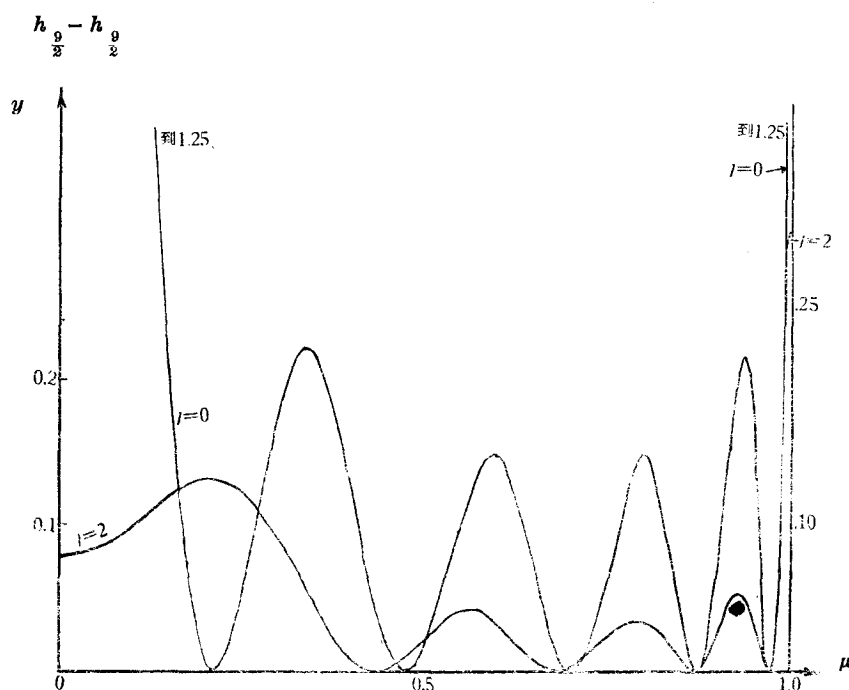


图 14

后 $\mathscr{V}$ 以差不多一定的振幅振荡。 $\mathscr{V}$ 在 $\mu=1$ 时的值与振幅之比近于 $\frac{n+1}{2}$ ($n=n_1$ 或 n_2 中較大的)。因此对于两条不同的能級, $\mathscr{V}$ 因子之比几乎与此无关, 因而取不同形状的 $\tan \eta/k$ 不大影响能級的相对次序。

从理論上看起来, Po^{210} 和 Pb^{206} 除了实验上已观测到的能級外, 还有许多条未观测到的低能能級。我們下面給出一个簡單的估計 ΔE_{12} 的方法, 用以初步估計这些尚未发现的能級的位置。按(11)式,

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{s_{n_j}}(\mu) &= 16\pi^3 P^2 \sum_{Nm} (2j_1+1)(2j_2+1)(2N+1) \\ &\quad (2S+1)(2j+1) \left| \sum_{Lm'} U C_{No, nm}^{Lm} w C_{n_1 m', n_2 m-m'}^{Lm} \right. \\ &\quad \left. Y_n^m(0,0) Y_{n_1}^{m'}(\mu, 0) Y_{n_2}^{m-m'}(\mu, \pi) \right|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

因为平方号内的各項时正时負, 我們假設具有不同的 L 和 m' 的各項是不相干的, 而把求和号拿到平方之外, 这样

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{s_{n_j}} &\approx 16\pi^3 P^2 \sum_{NLmm'} (2j_1+1)(2j_2+1)(2N+1) \\ &\quad (2S+1) U^2 w^2 C_{No, nm}^{Lm} C_{n_1 m', n_2 m-m'}^{Lm} \\ &\quad Y_n^m(0,0)^2 Y_{n_1}^{m'}(\mu, 0)^2 Y_{n_2}^{m-m'}(\mu, \pi)^2. \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^1 Y^2(\mu, 0) d\mu = \frac{1}{4\pi},$$

Y^2 的平均值是 $\frac{1}{4\pi}$, 而 $\mathcal{Y}$ 因子的平均值是

$$\overline{\mathcal{Y}}_{s_{n_j}} \approx \frac{P^3}{4} \sum_{LNm} (2j_1+1)(2j_2+1)(2N+1)(2S+1)(2j+1),$$

$$U^2 w^3 C_{No, nm}^{Lm} (2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}. \quad (12)$$

任何两条能级的由 s_{n_j} 波相互作用产生的 $\Delta E(s_{n_j})$ 之比是

$$\frac{\Delta E^{(1)}(s_{n_j})}{\Delta E^{(2)}(s_{n_j})} = \frac{\int_0^1 \mathcal{Y}_{s_{n_j}}^{(1)} \frac{\tan \eta_{s_{n_j}}}{k} d\mu}{\int_0^1 \mathcal{Y}_{s_{n_j}}^{(2)} \frac{\tan \eta_{s_{n_j}}}{k} d\mu} \approx \frac{\mathcal{Y}_{s_{n_j}}^{(1)}}{\mathcal{Y}_{s_{n_j}}^{(2)}}. \quad (13)$$

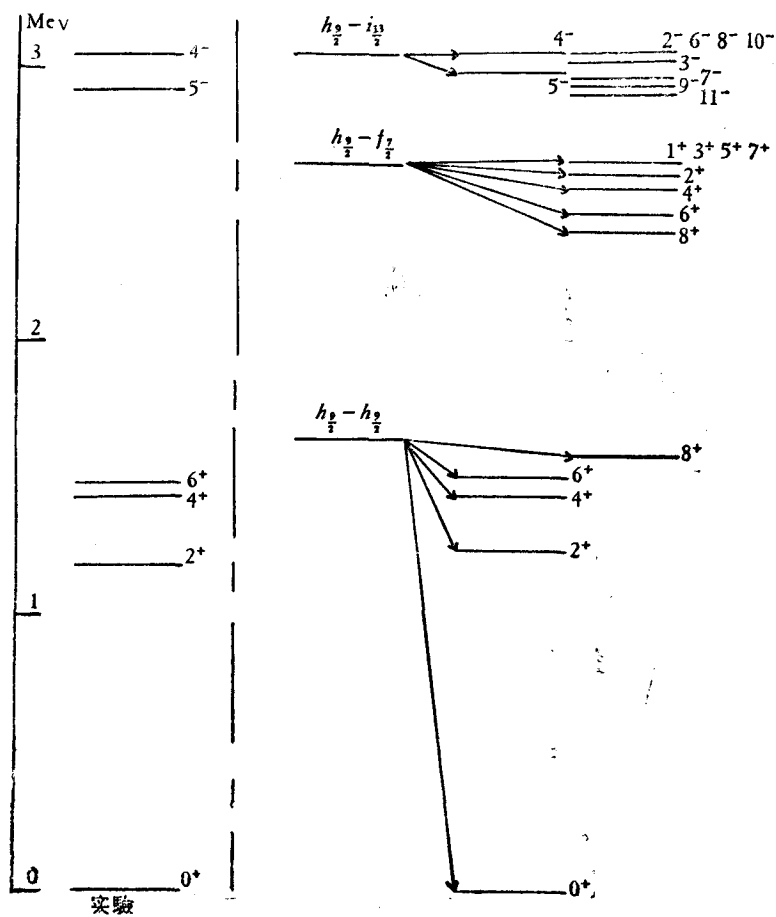


图. 15

附碼(1),(2)分別表示兩個不同的能級。

原子核 Po^{210} 和 Pb^{208} 除了已觀測到的能級外, 還有許多未觀測到的低能能級。利用公式(13)可以粗略地估計出這些能級的位置(圖 15, 16)。其中 Po^{210} 的 2^+ , 4^+ , 6^- 和 3^- 能級以及 Pb^{208} 的 2^+ 能級因為在提高 At^{210} 和 Bi^{208} 的衰變實驗的精確度以後, 有可能不久就被發現, 所以對它們又做了正式計算(只計算了 S 波相互作用)。由表 3 可以看出, 估計值一般是可靠的。由圖 15, 16 可以看出, 這些尚未發現的能級在現有的實驗中確實是不能出現的。在改善 At^{210} 的衰變實驗後, 可能發現 Po^{210} 的能級 3^+ , 5^+ , 4^+ , 6^+ , 它們都可以從 5^- 和 4^- 能級經過 $E1$ 躍遷得到。不過由於 γ 射綫的能量比到 1478 和 1431 能級(圖 9)的 $E1$ γ 躍遷射綫小 3—5 倍, 所以 γ 射綫的強度將弱得多。 γ 射綫能量比較小的時候, 內轉換系數增大, 所以這幾條射綫的內轉換電子綫將比較易于觀測。同樣在改進 Bi^{208} 的衰變實驗後, 可能發現自旋為 2^+ 的新能級。

按照我們的計算結果, Po^{210} 的最后一个質子的結合能應當比 Bi^{209} 質子的結合能大 1.64 Mev ($(\hbar\omega)^2_{J=0}$ 態的 ΔE_{12}), 而實驗值是 1.50 Mev^[7]。 Pb^{208} 最后一个中子的結合能應當比 Pb^{207} 的中子結合能大 0.84 Mev, 而實驗值是 0.99 Mev。理論和實驗是很符合的。

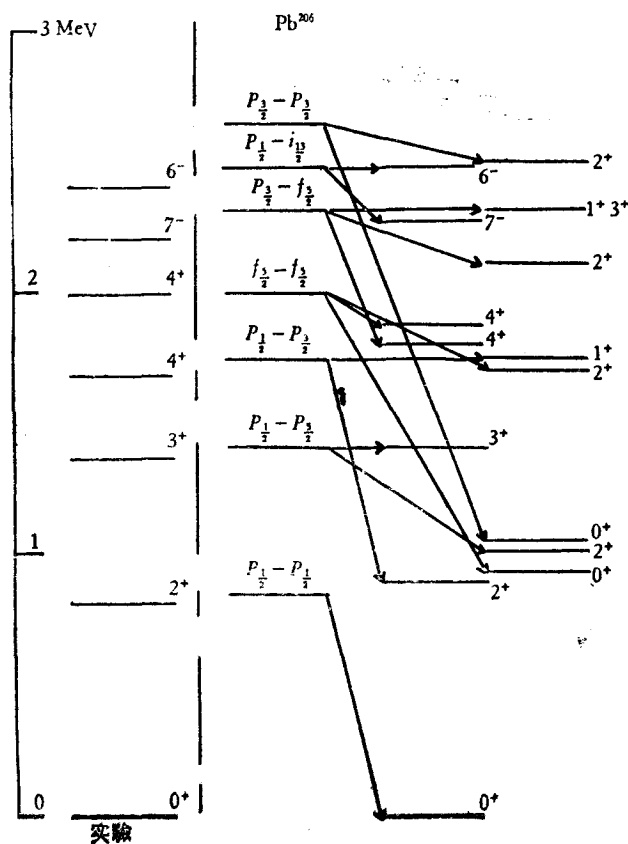


圖 16

表 3

原 子 核	能 级	ΔE_{12} 估计值(Mev), 公式(13)	ΔE_{12} 计算值, 公式(10)
$\text{Po}^{210(*)}$	$f_{\frac{7}{2}} - g_{\frac{9}{2}} \begin{cases} 2^+ \\ 4^+ \\ 6^+ \end{cases}$	0.038	0.041
		0.093	0.090
		0.15	0.185
	$h_{\frac{9}{2}} - i_{\frac{13}{2}} \quad 3^-$	0.036	0.036
$\text{Pb}^{208(**)}$	$p_{\frac{1}{2}} - f_{\frac{5}{2}} \quad 2^+$	0.35	0.40

*) 以 $h_{\frac{9}{2}} - h_{\frac{9}{2}}$, $J=0$ 的 $\Delta E_{12}=1.64$

**) 以 $p_{\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2}}$, $J=0$ 的 $\Delta E_{12}=0.84$

由以上的结果可以看出, 原子核 Po^{210} , Pb^{208} 的能级序列基本上是由独态 S 波相互作用决定的(由于泡利原理, 没有三重态 S 波相互作用)。以下讨论独态 S 波相互作用的特点。

(1) 从角动量上说, $\mathbf{N} + \mathbf{n} + \mathbf{S} = \mathbf{J}$ ($\mathbf{N}$ 是重心轨道角动量, $\mathbf{n}$ 是相对运动轨道角动量, $\mathbf{S}$ 是自旋), 对于独态 S 波, $\mathbf{n}=0$, $\mathbf{S}=0$, 所以 $N=J$; 从宇称上说, $(-1)^{n+N} = (-1)^N = (-1)^J$ 应当等于能级的宇称。所以 J 是奇数的偶宇称能级和 J 是偶数的奇宇称能级都不包含 S 波相互作用, 例如 Po^{210} 的 4^- 和 Pb^{208} 的 6^- , 3^+ 等都是这样的能级。

(2) 当 $j_1 = n_1 + \frac{1}{2}$, $j_2 = n_2 + \frac{1}{2}$, 独态 S 波的 $\mathcal{V}$ 因子平均值是(12):

$$\overline{\mathcal{V}} \approx \frac{1}{8} \frac{(j_1 + j_2 + J + 1)(j_1 + j_2 - J)}{2j_1 \cdot 2j_2 \cdot (2J + 1)}.$$

当 $j_1 = n_1 - \frac{1}{2}$, $j_2 = n_2 - \frac{1}{2}$ 时,

$$\mathcal{V} \approx \frac{1}{8} \frac{(j_1 + j_2 + J + 2)(j_1 + j_2 - J + 1)}{(2j_1 + 2)(2j_2 + 2)(2J + 1)},$$

$\overline{\mathcal{V}}$ 都是随着 J 的增加而减小, 所以 J 愈大能级愈高。以 $h_{\frac{9}{2}} - h_{\frac{9}{2}}$ 的几条能级为例:

$$\overline{\mathcal{V}} \approx \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 11} \cdot \frac{(J+11)(10-J)}{(2J+1)}$$

$$[\Delta E(J=0) - \Delta E(J=2)] : [\Delta E(2) - \Delta E(4)] : [\Delta E(4) - \Delta E(6)] : [\Delta E(6) - \Delta E(8)] \approx 8:1:0.43:0.27.$$

这正是 Po^{210} 的 0, 2, 4, 6, 8 五条能级显示出来的特点。 $J=0$ 和 $J=2$ 间的间隔最大, 以下依次减小, 表现出和转动能级刚好相反的趋向。

(3) 当 $j_1 = n_1 + \frac{1}{2}$, $j_2 = n_2 - \frac{1}{2}$,

$$\overline{\mathcal{V}} \approx \frac{1}{4} \frac{(j_2 - j_1 + J + 1)(j_1 - j_2 + J)}{(2j_2 + 2)2j_1(2J + 1)}.$$

和上面的情况相反, J 愈大能级愈低。当 $j_2 \approx j_1$ 时, $\overline{\mathcal{V}}$ 与 J 大致成比例, 即具有不同 J 的

能級大体上是均匀排列的。例如在 Po^{210} 中, $h_{\frac{9}{2}} - i_{\frac{16}{2}}$ 耦合成的 $3^-, 5^-, 7^-, 9^-, 11^-$ 能級。

§5 关于 Pb^{208} 附近一些原子核的能級: 高次波相互作用

从关于 Po^{210} 和 Pb^{206} 的討論中, 好象高次波相互作用是很不重要的, 但是当我们研究 Bi^{210} 的能級时, 我们将发现一个很突出的問題, 說明事实并非如此。 Bi^{210} 有三条能級 $0^-, 1^-$ 和 (>4) 靠近在一起, 能量相差不超过 100 keV。假设我們只考虑 S 波相互作用(独态和三重态), 那末 Bi^{210} 的最低三条能級是由在 $h_{\frac{9}{2}}$ 态的質子和在 $g_{\frac{9}{2}}$ 态的中子耦合成的 $1^-, 9^-$ 和 0^- 三条能級, 这一点好象还符合实验要求。但是 $J=1$ 和 9 两条能級虽然很靠近, 而 $J=0$ 能級却低得多(表 4)。这一点与实验相差很远。

表 4

能 級	$\Delta E(^1S)(\text{Mev})$	$\Delta E(^3S)(\text{Mev})$	总 和
$h_{\frac{9}{2}} - g_{\frac{9}{2}} \begin{cases} 0^- \\ 1^- \\ 9^- \end{cases}$	$\begin{matrix} 0 \\ -0.01 \\ -0.35 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1.88 \\ -0.95 \\ -0.61 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1.88 \\ -0.96 \\ -0.96 \end{matrix}$

上面的問題无论如何不能單單从 S 波相互作用上想办法解决。因为 $J=0$ 态的 3S 波的 $\mathcal{S}$ 因子比 $J=1$ 态的 $\mathcal{S}$ 因子恰好大 1.98 倍。而 $J=1$ 态的 1S 波的 $\mathcal{S}$ 因子小得很, 所以單考虑 S 波, 无论如何不能使 0^- 和 1^- 两条能級靠近在一起。这里所發生的問題不是由于我們所取的 S 波相移有什么問題。

因此应当进一步考虑高次波相互作用。首先考虑 3P_0 波相互作用。

从角动量上考虑, $\mathbf{N} + \mathbf{j} = \mathbf{J}$, 对于 3P_0 波, $j=0$, 所以 $N=J$ 。从宇称上考虑, $n_1 + n_2 + n + N$ 应当是偶数, 所以 $n_1 + n_2 + J$ 应当是奇数。换言之, $n_1 + n_2 + J$ 是偶数的态不包含 3P_0 波。在所提到的 Po^{210} , Pb^{206} 和 Bi^{210} 能級中, 只有 Po^{210} 的 $h_{\frac{9}{2}} - i_{\frac{16}{2}}$ 4^- , Pb^{206} 的 $p_{\frac{1}{2}} - f_{\frac{5}{2}}$ 3^+ , $p_{\frac{1}{2}} - i_{\frac{16}{2}}$ 6^- 和 Bi^{210} 的 $h_{\frac{9}{2}} - g_{\frac{9}{2}}$ 0^- 四条能級包含 3P_0 波相互作用。由 (12) 式所估計的 $\mathcal{S}$ 因子列在表 5 內。由表 5 可以发现, $h_{\frac{9}{2}} - g_{\frac{9}{2}}$ $J=0^-$ 能級包含特別强的 3P_0 波, 比其他三条能級强 5—10 倍。因此, 如果 3P_0 态是斥力, 有可能大大提高 0^- 态能級而

表 5

	能 級	$\mathcal{S}_{^3P_0}$
Po^{210}	$h_{\frac{9}{2}} - i_{\frac{16}{2}} \quad 4^-$	0.007
Pb^{206}	$p_{\frac{1}{2}} - f_{\frac{5}{2}} \quad 3^+$	0.015
	$p_{\frac{1}{2}} - i_{\frac{16}{2}} \quad 6^-$	0.005
Bi^{210}	$h_{\frac{9}{2}} - g_{\frac{9}{2}} \quad 0^-$	0.085

不显著改变其他能級的位置。費西巴哈和婁曼所給的一組相移含有很大的負 3P_0 相移,

在这一点上满足我们的要求。我们就利用他们所给的高次波相移进行了计算。在这组相移中， 8P_2 、 1P_1 和 3D_1 波的相移虽然比 3P_0 波的相移小，但是这些态的统计权重分别比 3P_0 态大 5 倍和 3 倍，所以在考虑 3P_0 波相互作用的同时我们也考虑了 8P_2 、 1P_1 和 3D_1 波相互作用。

关于 Bi^{210} 的计算结果列在表 6 内。我们看到： 0^- 、 1^- 和 9^- 三条能级确实很近，很符合实验结果。根据这里的计算结果， Bi^{210} 的最后一个质子（或一个中子）的结合能应当比 Bi^{209} (Pb^{209}) 最后一个质子（一个中子）的结合能大 0.95 Mev，实验值也是 0.95 Mev^[7]。理论与实验很符合，如果不考虑高次波，理论结果是 1.88 Mev，相差很远。

表 6

(单位 Mev)

能 级	3P_0	8P_2	1P_1	3D_1	${}^1S+{}^3S$	ΔE_{12} 总和
$\text{Bi}^{210} \begin{cases} 0^- \\ 1^- \\ 9^- \end{cases} \begin{matrix} h_{\frac{9}{2}} - g_{\frac{9}{2}} \end{matrix}$	+0.92	-0.12	0	+0.13	-1.88	-0.95
	0	-0.05	~ 0	+0.07	-0.96	-0.94
	0	-0.01	+0.06	~ 0	-0.96	-0.91

关于 Po^{210} 和 Pb^{206} 的计算结果画在图 12 和 13 上。高次波相互作用对它们能级位置的影响很小。特别有趣的是 Pb^{206} 的 3^+ 和 6^- 能级。这两条能级的能量差刚好等于两个单粒子组态 $i_{16/2}$ 和 $f_{\frac{7}{2}}$ 的能量差（前者是 1044 kev，后者是 1064 kev，相差不过 20 kev）说明它们的 ΔE_{12} 是相等的。这两条能级都没有 1S 波相互作用，也没有 1P_1 和 3D_1 、 3S_1 波相互作用。只有 8P_2 和 3P_0 波相互作用。在我们的计算中， 3P_0 波和 8P_2 波的贡献刚好相消，使这两条能级的 ΔE_{12} 差不多是零。这样就满足了实验的要求。为了使 ΔE_{12} 等于零，需要 8P_2 是吸力，并且比 3P_0 波相移小 3—4 倍，费西巴哈和斐曼的相移满足这个要求。

由(12)式所给因子可以看出，不但 $g_{\frac{9}{2}} - h_{\frac{9}{2}}$ $J=0$ 态包含有很强的 3P_0 波，凡是 $n_1 = n_2 - 1$ ， $j_1 = j_2$ ， $J=0$ 波函数都包含有很强的 3P_0 波，所以凡是这种能级由于 3P_0 斥力都要被大大提高。很有趣的是这一点可能和壳模型的反双重态现象之间有密切的联系。现以 $1g_{\frac{9}{2}}$ 和 $1g_{\frac{7}{2}}$ 为例来讨论这个问题。因为在第四满壳层中，含有 $1f_{\frac{7}{2}}$ 能级，它和 $1g_{\frac{7}{2}}$ 之间有很强的斥力，所以 $1g_{\frac{7}{2}}$ 被推向上，而在第四满壳层中，不会包含 $1h_{\frac{9}{2}}$ 能级，所以 $1g_{\frac{9}{2}}$ 能级比 $1g_{\frac{7}{2}}$ 能级低，这样就发生了反双重态现象。这种分裂的数量级自然是百万电子伏特范围。按照这种观点， $2g_{\frac{9}{2}}$ 和 $2g_{\frac{7}{2}}$ 的分裂应当比 $1g_{\frac{9}{2}}$ 和 $1g_{\frac{7}{2}}$ 小，因为第五壳层除 $2f_{\frac{7}{2}}$ 外，还包含 $1h_{\frac{9}{2}}$ ，所以 $2g_{\frac{9}{2}}$ 和 $2g_{\frac{7}{2}}$ 属于同一满壳层，而 $1g_{\frac{9}{2}}$ 和 $1g_{\frac{7}{2}}$ 分属两个满壳层。

最后作者感谢储连元同志帮助计算和提供了很多有益的意见，并感谢田淑韵和高中昌二同志帮助做数值计算。

参 考 文 献

- [1] 于敏、張宗燁、余友文, 物理学报 15 (1959) 397.
- [2] 儲連元、王德靖、于敏, 物理学报 15 (1959) 447.
- [3] Swiatecki, W. J., *Phys. Rev.* 103 (1956), 265; Bethe, H. A., *Phys. Rev.* 103 (1956), 1353.
- [4] 于敏, 物理学报 13 (1957), 101.
- [5] Feshbach, H. and Lomon, E., *Phys. Rev.* 102 (1956), 891.
- [6] Pryce, M. H. L., *Proc. Phys. Soc.* A65, (1952) 773.
- [7] Rosenfeld, L., *Nuclear Forces*.

О ТЕОРИИ ОБОЛОЧНЫХ СТРУКТУР ЯДЕР

Юй Мин

(Институт Атомных Энергий АН)

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривали вопросы о взаимодействии между двумя нуклонами вне заполненных оболочек. Показали, что в этом случае можно применить метод возмущения. Предложили метод разложения волн, при помощи этого метода вычислили энергетических спектров Pb^{206} , Po^{210} и Bi^{210} . Результаты вычислений с опытами хорошо совпадают. Причём заключали, вообще говоря, энергетические спектры ядер определяются взаимодействием S волн. Интенсивность взаимодействия удовлетворяет требованию эффективного радиуса действия ядерных сил и длины рассеяния. Причём она не зависит от формы ядерных сил. В некоторых особых случаях взаимодействие P волн играет довольно важную роль. Анализируя эти случаи, показали, что силы взаимодействия 3P_0 волн отталкивающие, причём являются самым сильным за исключение взаимодействия S волн между двумя нуклонами взаимодействием.