第15卷 第9期 1959年9月
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 15 No. 9 Sept., 1959

由已知相应的静电静磁問題求电动力学問題的解*

林 为 干

(成都电訊工程学院)

一. 引 言

在电磁現象問題中,比拟的方法是最常用的方法之一. 在这方面,新提出的一个問題是从已知的靜电或靜磁問題出发,即可求得相应的电动力学問題[1]; 应用这个方法, 可以解决一些較复杂的問題[2]. 但是,現有的处理这个問題的方法还欠缺普遍性. 本文的目的就是要使这个方法更具普遍性,就是說要使这个方法包括更大的范圍.

二. 电磁場的分解

我們已經知道,在正交曲面坐标 ξ,η,ζ 中,麦克斯威尔方程系(設时間变化为$e^{j\omega t}$)

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho,\quad \nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H},\\&\nabla\cdot\mathbf{H}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=j\omega\varepsilon\mathbf{E}\end{aligned}\tag{1}$$

可以写成(兩个旋度关系式)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta E_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta E_\eta)=-j\omega\mu h_\eta h_\zeta H_\xi,\\&\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi E_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta E_\zeta)=-j\omega\mu h_\zeta h_\xi H_\eta,\\&\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta E_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi E_\xi)=-j\omega\mu h_\xi h_\eta H_\zeta,\\&\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta H_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta H_\eta)=j\omega\varepsilon h_\eta h_\zeta E_\xi,\\&\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi H_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta H_\zeta)=j\omega\varepsilon h_\zeta h_\xi E_\eta,\\&\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta H_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi H_\xi)=j\omega\varepsilon h_\xi h_\eta E_\zeta.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 分别是电场强度和磁场强度; μ, ε 是媒質的导磁系数及介电常数; ω是角頻率. (2)式的每一个量的意义从式子中可以明白,茲不一一贅述.

* 1958年11月28日收到.

在(2)式中,如果下面的关系成立[8],

$$h_\zeta=1,\quad \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\right)=0, \tag{3}$$

则电磁场可以分解为电波型场和磁波型场. 对前者来說,(2)式变为

$$\left.\begin{aligned}
&H_\zeta=0, && E_\zeta=\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}+k^2U,\\
&H_\xi=\frac{j\omega\varepsilon}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial\eta}, && E_\xi=\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\zeta},\\
&H_\eta=-\frac{j\omega\varepsilon}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi}, && E_\eta=\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 U}{\partial\eta\partial\zeta},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon.$$

而对后者(磁波型场)来說,(2)式变为

$$\left.\begin{aligned}
&E_\zeta=0, && H_\zeta=\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}+k^2V,\\
&E_\xi=\frac{-j\omega\mu}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial\eta}, && H_\xi=\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\zeta},\\
&E_\eta=\frac{j\omega\mu}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial\xi}, && H_\eta=\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\partial\zeta}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 U 和 V 是兩个著名的輔助位函数,分别满足与波动方程有关的二阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\right]+k^2U=0. \tag{6}$$

如果我們的曲面坐标系就是直角坐标系 x, y, z, 则 $h_x=h_y=h_z=1$; 輔助位函数U和V都满足的 (6) 式变为

$$\Delta U+k^2U=0,\quad \Delta V+k^2V=0, \tag{7}$$

其中 Δ 是拉普拉斯运算子. (7) 式即是常見的波动方程. 在球面坐标中,

$$\xi=\vartheta,\quad \eta=\varphi,\quad \zeta=r,$$

因而

$$h_\vartheta=r,\quad h_\varphi=r\sin\vartheta,\quad h_r=1,$$

但 (6) 式并不即取 (7) 式的形式. 如果我們令

$$U=Kru;\ V=Krv, \tag{8}$$

其中 K 是一待定常数,则 (6) 式即在球面坐标中取 (7) 式的形式,即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{9}$$

如取 U, V 的形式如下:

$$Kru=U=R(r)\,Y(\vartheta,\varphi),$$

則可將(6)式分解为(其中我們用 λ 作为分离常数)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2R}{dr^2}+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0,\\&\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}=0;\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

又可取分离常数为

$$\lambda=\nu(\nu+1),$$

则(10)式的一个解为

$$\begin{aligned}&R=\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}Z_{\nu+1/2}(kr),\\&Y(\vartheta,\varphi)=P_\nu^m(\cos\vartheta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{matrix}\end{aligned}\tag{11}$$

另一个解在軸綫 $\vartheta=0$ 上趋于无限大，故通常舍去不要(除非軸綫不在問題所包含的范圍之内)。$Z_{\nu+1/2}$ 及 P_ν^m 分别为貝塞尔及勒上特函数。由(10)式即可將(5)式在球面坐标中写成人們熟知的形式[4]：

电波型坊［取 $K=\nu(\nu+1)$］：

$$\left.\begin{aligned}&H_r=0, && E_r=\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}U=\frac{u}{r},\\&H_\vartheta=\frac{j\omega\varepsilon}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(ru), && \nu(\nu+1)E_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(ru),\\&H_\varphi=-\frac{j\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(ru), && \nu(\nu+1)E_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial r}(ru);\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

磁波型坊：

$$\left.\begin{aligned}&E_r=0, && H_r=\frac{\nu(\nu+1)}{r}V=\frac{1}{r}v,\\&E_\vartheta=\frac{-j\omega\mu}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(rv), && \nu(\nu+1)H_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(rv),\\&E_\varphi=\frac{j\omega\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(rv), && \nu(\nu+1)H_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial r}(rv).\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

在圓柱坐标中，ξ,η,ζ 即是 r,φ,z，故(6)式即轉变为波动方程

$$\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+k^2U=0.\tag{14}$$

如取

$$U=R_m(r)\begin{matrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{matrix}e^{\pm\gamma z},$$

则(14)式即轉变为

$$\frac{d^2R_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr}+\left(k^2+\gamma^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R_m=0.\tag{15}$$

(15)式的解为 m 阶的貝塞尔函数：

$$R_m(r)=Z_m(\sqrt{k^2+\gamma^2}r)\tag{16}$$

在这个坐标系中，(4) 式变为电波型场：

$$\left.\begin{aligned} &H_z=0, && E_z=(\gamma^2+k^2)U, \\ &H_r=-\frac{j\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, && E_r=-\gamma\frac{\partial U}{\partial r}, \\ &H_\varphi=-j\omega\varepsilon\frac{\partial U}{\partial r}, && E_\varphi=\frac{\gamma}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

而(5)式則轉化为磁波型场：

$$\left.\begin{aligned} &E_z=0, && H_z=(\gamma^2+k^2)V, \\ &E_r=\frac{-j\omega\mu}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}, && H_r=-\gamma\frac{\partial V}{\partial r}, \\ &E_\varphi=j\omega\mu\frac{\partial V}{\partial r}, && H_\varphi=-\gamma\frac{\partial V}{r\partial\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

对其他的坐标系我們亦可以进行討論，但因为上面所討論的三种坐标是最常用的.故我們只限于列举他們作为例子。

存在有一个特殊情况：当 h_ζ, h_ξ, h_η 与 ζ 无关而且电磁场由于某种对称性也与 ζ 无关，則整个电磁场即可分解为兩个独立組[8]，前者仅含有 H_ξ, H_η, E_ζ，而后者則仅含有 E_ξ, E_η, H_ζ. 前者可以叫做磁波型场(对 ξ 或 η 方向)；后者則可以叫做电波型场(对 ξ 或 η 方向)：

磁波型场：由 (4)，

$$\left.\begin{aligned} &E_\zeta=\frac{1}{h_\zeta}P, \\ &H_\xi=-\frac{1}{j\omega\mu h_\eta h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\eta}, \\ &H_\eta=\frac{1}{j\omega\mu h_\xi h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\xi}, \quad E_\xi=E_\eta=H_\zeta=0; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

电波型场：由(5)，

$$\left.\begin{aligned} &H_\zeta=\frac{1}{h_\zeta}Q, \\ &E_\xi=\frac{1}{j\omega\varepsilon h_\varphi h_\xi}\frac{\partial Q}{\partial\xi}, \\ &H_\eta=-\frac{1}{j\omega\varepsilon h_\zeta h_\eta}\frac{\partial Q}{\partial\eta}, \quad H_\xi=H_\eta=E_\zeta=0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

这里 P、Q 满足一个二阶偏微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)+k^2\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}P=0. \tag{21}$$

这个方程一般来説不是波动方程，但在一些实用上重要的坐标系中，它是波动方程或不难轉变波动方程，例如在圓柱坐标中，如 ζ 是 z 坐标，則 (21) 是波动方程。

三. 电磁場与静电、静磁場的关系

以上我們列举了电动力学上已知的理論，但作了一些必要的安排，以便使我們能够从以上的理論推出更完备的电磁场与静电、静磁场間的比拟，从而可能从已知的静电，静磁問題去解决电磁场的更复杂的問題。以下我們卽进行这項工作，亦卽进入本文的主要工作。

由(1)式可見：当 $\omega\to 0$ 时，电磁场問題亦卽电动力学問題轉化为兩个独立的問題，卽一个为静电场的問題：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho,\quad \nabla\times\mathbf{E}=0,\\&\mathbf{E}=-\nabla\Phi;\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

而另一个則是静磁問題：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{H}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=0,\\&\mathbf{H}=-\nabla\Psi\\ \text{或}\quad&\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A},\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

其中 Φ 是我們所熟知的静电位函数，Ψ 是静磁位函数，而 $\mathbf{A}$ 則是向量磁位。

从(4)式可見；当 $\omega\to 0$ 时，电波型场卽轉变为一个静电场（記住 $h_\zeta=1$）：

$$E_\zeta=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right),\qquad E_\xi=\frac{\partial}{h_\xi\partial_\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right),\qquad E_\eta=\frac{\partial}{h_\eta\partial_\eta}\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right),$$

或者可以写成

$$\mathbf{E}=\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right).$$

如与(22)式比較可見：当 $\omega\to 0$ 时，电波型场的辅助位函数与其所轉化的静电场的静电位函数的关系如下：

$$\Phi=\frac{-\partial U}{\partial\zeta}\tag{24}$$

又从(5)式可見：当 $\omega\to 0$ 时，磁波型场卽轉变为一个静磁场：

$$H_\zeta=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)\qquad H_\xi=\frac{\partial}{h_\xi\partial\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right),\qquad H_\eta=\frac{\partial}{h_\eta\partial\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right),\qquad \mathbf{H}=\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right).$$

故我們又得到磁波型场的辅助位函数 V 与其所轉化的静磁位（无向量磁位）函数之間的关系如下［見(23)式］：

$$\Psi=-\frac{\partial V}{\partial\zeta}.\tag{25}$$

从(19)式可見：当 $\omega\to 0$ 时，H_ξ 和 H_η 都无限增加；如果我們令 P 无限减小，以使 $P/j\omega\mu$ 的值取有限值，則与 H_ξ 和 H_η 比較，E_ζ 卽行消逝，故我們又得到一个静磁场：

$$\left.\begin{aligned}&h_\zeta H_\xi=-\frac{\partial}{h_\eta\partial\eta}(P/j\omega\mu),\\&h_\zeta H_\eta=\frac{\partial}{h_\xi\partial\xi}(P/j\omega\mu),\\ \text{或}\quad&h_\zeta\mathbf{H}=-\nabla\times\mathbf{P},\quad \mathbf{P}=\mathbf{i}_\zeta(P/j\omega\mu),\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

其中 $\mathbf{i}_\zeta$ 代表沿 ζ 增加的方向取向的單位向量。

同样地，从 (20) 可見当 $\omega\to 0$ 时，E_ξ 和 E_η 將无限增加。如我們令 Q 无限減小，以使 $Q/j\omega\varepsilon$ 的值取有限值，則与 E_ξ 和 E_η 相比較，H_ζ 的值卽行消逝，故我們卽得到一个靜电场：

$$\left.\begin{aligned} h_\zeta E_\xi &= \frac{\partial}{h_\eta \partial\eta}(Q/j\omega\varepsilon), \\ h_\zeta E_\eta &= \frac{\partial}{h_\xi \partial\xi}(Q/j\omega\varepsilon) \\ h_\zeta \mathbf{E} &= +\nabla\times\mathbf{q},\quad \mathbf{q}=\mathbf{i}_\zeta(Q/j\omega\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

或

最后从(7)式可見：当 $\omega\to 0$ 时，U 或 V 卽轉变为拉普拉斯方程的解。从以上的討論可見，如从一个已知电动力学的問題去求其对应的靜电或靜磁的解是很容易的：(24)和(25)兩式提供了这个問題的答案。但反过来，卽从已知的靜电，靜磁問題去解对应的电动力学問題則不那么容易，这就是我們要解决的問題：

我們的結論是：从靜电场是电波型场的极限和靜磁场是磁波型场的极限一个事实可見，只有能够用純电波型场表出或用純磁波型场表出的电动力学問題才可能从已知靜电场或靜磁场出发来解决。

什么时候电动力学的問題才能够用純电波型场或純磁波型场表出呢？第一，由(3)式可見，只有当我們的电动力学問題(电磁场問題)能够在滿足 (3) 的坐标系中表出时，这才是可能。由曲面坐标理論，这就要求：只有在直角坐标，圓柱坐标，球面坐标，橢柱坐标，拋物綫柱坐标及双极綫坐标表出时 (3) 式才能成立。故只有当我們的电磁场問題是在以上列举的六种坐标中表出时才有可能由已知的靜电或靜磁問題出发来求解。第二，由于某种对称性，整个电磁场与某一个坐标无关，而且系数 h_ζ, h_ξ 及 h_η 也和这个坐标无关，則整个电磁场問題亦可分为兩个独立組，我們仍把这兩組电磁场分别叫做电波型场与磁波型场。在这个情况下，电磁场的問題亦可能从已知的靜电或靜磁問題出发去求解。

但是，在上面所提及的几种坐标中，还要要求激发源的分布和媒質的特性和媒質的分界面的形狀和性質能够維持單独的电波型场或磁波型场的存在。就激发源来說，均匀平面源，均匀綫源及点源都屬于能够发生純电波型场或純磁波型场的。

至于对电磁场所在的媒質的要求：我們首先要求所有的媒質都必須是均匀的、各向同性的，如果有导体存在則所有的导体必須是理想导体。不同媒質的分界面和导体边界面必須是服从一定規則的分界面和边界面。只有这样才不致发生电波型场与磁波型场之間的“耦合”[5]，也就是說，只有这样才能保証电波型场与磁波型场的相互独立存在的可能性。这里所謂“一定的規則”可因問題的不同而不同，总的說来是如此：所有的分界面和边界面应該是平行于一个坐标曲面而且是連續的。[如果我們分解的可能性是根据对称性而得到的，如(19)及(20)式的結果所示，則在这些分界面和边界面上可以出現不連續性，但这些不連續性必須不破坏整个問題的对称关系。例如有限長双圓錐天綫，如兩端的頂盖是与双圓錐体同心的球面中为双錐体所截出的部分，則此时虽然出現在球面上的不連續性，但問題中的对称性并未遭受破坏，故此时整个电磁场仍可分为相互独立的电波型场或磁波型场。

例如，在理想导体壁的矩形，圓柱形，橢柱形波导和等边三角形波导中[6]，如充以均匀

的电介質，截面週界曲綫又不发生变化，則电波型塲和磁波型塲相互独立地存在是可能的。如果沿波导軸綫上有变化，这个变化要在整个正交于軸綫的截面上发生(例如在某一点之左和这点之右的媒質可以不同，但兩者的分界面則正交于軸綫)。如果在矩形波导中有媒質的分层，而分层面是平行波导壁的一面，則分解为电波型与磁波型塲仍是可能(此时的电波型塲及磁波型塲又叫做縱磁波 LM 和縱电波 LE[7])。同样，如果圓波导內充以均匀同軸的不同介質，則这种分解仍然可能。

但如何解法呢？关鍵問題是在于电波型塲的輔助位函数 U 和磁波型塲的輔助函数 V 所滿足的微分方程(6)或 P,Q 的微分方程(21)往往卽轉变为波动方程。当(6)不变而为波动方程时，我們还可以想办法找到与 U,V 相关的、滿足波动方程的补充函数，如(8)所示。当 $\omega\to 0$，卽 $k\to 0$ 时，波动方程卽轉变为拉普拉斯方程，当原来的波动方程可以用分离变数法解出时；拉普拉斯方程亦可用分离变数法解出，則这兩个解間存在着非常密切的关系，于是由边界条件出发，不难从拉普拉斯方程的解(卽静电問題或静磁問題的解)得回波动方程的解(卽电动力学問題的解)。玆詳細論証如下：

如以 u_1,u_2,u_3 分別代表 ξ,η,ζ，而以 h_1,h_2,h_3 代表 h_ξ,h_η,h_ζ，則波动方程可写成：

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_i^2}\frac{\partial U}{\partial u_i}\right)+k^2U=0\qquad \sqrt{g}=h_1h_2h_3.$$

如果下面的关系成立，

$$\frac{\sqrt{g}}{h_i^2}=M_i(u_j,u_k)f_1(u_1)f_2(u_2)f_3(u_3)\qquad j,k\neq i,$$

又如果我們假設

$$u=F_1(u_1)F_2(u_2)F_3(u_3),$$

則波动方程变为

$$f_1f_2f_3\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{M}_i}{f_iF_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(f_i\frac{\partial F_i}{\partial u_i}\right)+k^2=0. \tag{28}$$

当 $\omega\to 0$，卽 $k\to 0$ 时，(28)变为拉普拉斯方程：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{M_i}{f_iF_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(f_i\frac{\partial F_i}{\partial u_i}\right)=0. \tag{29}$$

当 $M_i(i=1,2,3)$ 都是有理函数时，(29)卽分解为三个常微分方程[8]，而且有兩个分离常数出現。同样(28)亦可以分解为三个常微分方程，出現兩个分离常数，而 k^2 只能在这三个常微分方程中一个里面出現。由此可見，(28)和(29)式都可分解为三个常微分方程，而且有兩个方程是相同的，第三个不同的地方是一个包含有 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 而另一个則否。分离常数总是由問題的單値性和有限値性或其他边界条件的要求来决定，故(28)和(29)兩个方程所需的分离常数对同一种边界条件和对称关系应該是一致的(因为我們要求从已知相应静电，静磁問題出发求解电动力学問題，故边界条件及对称关系是一致的)。由此可見，(28)和(29)式的解之間的关系是如何密切了。为了說明这种关系，最好举出具体坐标为例：

(1) 圓柱坐标：此时(28)式卽轉变为(14)式，其解可以写成[卽將(16)写成 $J_m(x)$ 和 $H_m^{(2)}(x)$ 的綫性組合]：

$$U_m=\left[A_mJ_m(\sqrt{k^2+\gamma^2}\,r)+B_mH_m^{(2)}(\sqrt{k^2+\gamma^2}\,r)\right]\begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}\;e^{\pm\gamma z}$$

其中 A_m, B_m 是待定积分常数，$H_m^{(2)}$ 是第 m 阶第二类汉格函数(与 $e^{j\omega s}$ 一因子連起来代表前进波形式的解，例如，参看文献[6]，§ 3.3)：

$$H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-jN_m(x).$$

在一般問題中，我們取 U_m 的迭加形式作为我們問題的通解：

$$U=\sum_m\left[A_mJ_m(\sqrt{k^2+\gamma^2}\,r)+B_mH_m^{(2)}(\sqrt{k^2+\gamma^2}\,r)\right]\begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}\;e^{\pm\gamma z},$$

当 $k\to 0$ 时，U 可以写作 U_0，

$$U_0=\sum_m\left[A_m'J_m(\gamma r)+B_m'N_m(\gamma r)\right]\begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}\;e^{\pm\gamma z}.$$

式中 U_0 代表静电或静磁問題的解，而 U 則給出电动力学問題的解。U 和 U_0 表示式的求和号內的三个因子中只有第一个不相同，我們能否从 U_0 的求和号內的第一个因子求出 U 的求和号內的第一个因子呢？試取 $r\to 0$ 的极限[当 $r\to 0$ 时，电动力学的問題趋近于静电的問題，因为在波动方程(7)中，当我們的活动范圍被限制在 $r=0$ 附近时，則波長 λ 与其他綫性尺寸比較可以認为是很大的，因而(7)式中的 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 可以認为很小，故(7)式中的 k^2V 一項可以略去，于是(7)式卽轉变为拉普拉斯方程]：

当 $r\to 0$ 时，

$$-jB_m(k^2+\gamma^2)^{-m/2}=B_m'\gamma^{-m}\qquad m=1,2,3\cdots,$$

$$-jB_0=B_0'$$

和

$$(\gamma^2+k^2)^{m/2}(A_m+B_m)=\gamma^mA_m'\qquad m=1,2,3,\cdots,$$

$$A_0+B_0-j\frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\gamma^2+k^2}=A_0'-j\frac{2}{\pi}\ln\gamma.$$

常見的情形是 $A_m'=0$，或 $B_m'=0$，这样就使我們可以令相对应的 $A_m=0$ 或 $B_m=0$。

常見的情形还有二維問題的情形，卽 $\gamma=0$。此时

$$U=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_mJ_m(kr)+B_mH_m^{(2)}(kr)\right]\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi,\end{matrix}\tag{30}$$

而对应的静电、静磁問題的解 U_0 不可能直接在上式中取 $k\to 0$ 的极限，須要回到原来的(29)式，仍設 $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ 的变化，卽得到

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF_1}{dr}\right)=-m^2.$$

其通解应为

$$F_1=R_m=A_0'+B_0'\log r\qquad m=0.$$

$$F_1=R_m=A_m r^m+B'_m r^{-m},\qquad m>0.$$

故静电、静磁問題的通解 U_0 是（略去与 φ 綫性增加的因子）

$$U_0=A'_0+B'_0\log r+\sum_{m=1}^{\infty}(A'_m r^m+B'_m r^{-m})\begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}. \tag{31}$$

由 (30) 和 (31) 兩式可見，静电，静磁問題与其相应的电动力学問題是有其一一对应的項，故由已知的 (31) 可以恢复 (30)。取 $r\to 0$ 的极限：

$$\left.\begin{aligned}&-j\frac{2}{\pi}B_0=B'_0;\qquad j\frac{2^m(m-1)!}{\pi k^m}B_m=B'_m\qquad m=1,2,3,\cdots,\\ &A_0+B_0+j\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{2k}=A'_0,\\ &(A_m+B_m)\frac{1}{m!}\left(\frac{k}{2}\right)^m=A'_m,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

故我們仍可由已知的(31)式恢复(30)式。

以下我們举一个簡要的例子来說明这个問題。

設无限長直綫导体載有直流电 I，則所生的磁场为

$$H_\varphi=\frac{I}{2\pi r},$$

則同一个导体載有角頻率为 ω 的交变电流时所生的电磁场：在交变电流情形下，根据(19)式，令 $\zeta=z$，于是整个电磁场具有 E_z, H_γ, H_φ 三个分量，而且容易看到，

$$P_0=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{P}{j\omega\mu}\right)=\frac{I}{2\pi r},$$

积分一次，由問題的对称性，可見 P 应与 φ 无关（卽旋轉对称性存在），故可写出[根据(19)式的最后一个式子]：

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{P}{j\omega\mu}=\frac{I}{2\pi}\log r.$$

但由(21)式可見 P 滿足波动方程，故由(30)及(31)間的关系，計及(32)时，即可得到

$$\frac{P}{j\omega\mu}=j\frac{\pi}{2}\frac{I}{2\pi}H_0^{(2)}(kr).$$

最后，由(19)即可得到整个电磁场如下：

$$E_z=\frac{1}{h_z}P=j\omega\mu\frac{I}{4}H_0^{(2)}(kr).$$

$$H_r=0,$$

$$H_\varphi=-j\frac{kI}{4}H_1^{(2)}(kr).$$

这是一个簡單的問題，更复杂的衍射問題，將用这个方法来解决（見本期物理学报作者的另一文）。

(2) 直角座标：此时波动方程 (7) 取如下形式：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k^2 U=0,$$

其中U可代表(4),(5)中的輔助位函数,亦可代表电磁场中的一个场强分量。

如取下式作为这个波动方程的特解,

$$U_{mn}=\begin{Bmatrix}\sin\alpha_n x\\ \cos\alpha_n x\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\beta_m y\\ \cos\beta_m y\end{Bmatrix}\left(A_{mn}e^{-\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\,z}+B_{mn}e^{-\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\,z}\right),$$

则当 $k\to 0$ 时,U_{mn} 轉变为 U_{mn0},

$$U_{mn0}=\begin{Bmatrix}\sin\alpha_n x\\ \cos\alpha_n x\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\beta_m y\\ \cos\beta_m y\end{Bmatrix}\left(A'_{mn}e^{-\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z}+B'_{mn}e^{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z}\right)$$

代表静电,静磁场的解。当已知静电,静磁問题的解,要求恢复电磁场的解时,我們一方面把$\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z$ 換成$\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\,z$,另一方面要能够从$A'_{mn}$和$B'_{mn}$求出$A_{mn}$和$B_{mn}$。为此我們試驗研究常見的兩种边界条件:

$$|U_{mn}|_{z=0}=0$$

及

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}U_{mn}\right|_{z=0}=0.$$

前一个条件要求:

$$U_{mn}\sim A_{mn}\sin h\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\,z\xrightarrow[z\to 0]{}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}A_{mn}z,$$

$$U_{mn0}\sim A'_{mn}\sin h\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\,z\xrightarrow[z\to 0]{}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,A'_{mn}z.$$

如果令

$$\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\ A_{mn}=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,A'_{mn};\tag{33}$$

则在$z=0$附近,U_{mn}和U_{mn0}的变化相同;由第二条件出发,如果要求U_{mn}及U_{mn0}的变化率在$z=0$附近相同,则我們同样地得到条件(33),故我們取条件(33)作为由U_{mn0}恢复U_{mn0}的乘数因子。

試取一矩形波导的激发問題为例。先取矩形管的内部格林函数[9]:

$$G=\frac{2q}{\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(m^2a^2+n^2b^2)^{1/2}\pi(z-z_0)}{ab}\right\}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

其中$x=0,a$; $y=0,b$是波导体管壁,点电荷q則位于(x_0,y_0,z_0),这里$z>z_0$; 当$z<z_0$时,須在上式中將z及z_0对調。如果位于(x_0,y_0,z_0)的不是点电荷而是一个平行于軸綫的电偶极子,則可將G对z_0求微分,得到

$$\Phi=\frac{2qdz_0}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{(m^2a^2+n^2b^2)^{1/2}\pi(z-z_0)}{ab}}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

其中qdz_0是电偶极子的电矩。由此式通过

$$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$$

的运算，即可得到靜电场的各个分量，然后以$\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2-k^2}\,z$代替$\sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}\,z$，再計及(33)式的关系，即得到我們的电磁场問題(波导的电偶极子的激发問題)的解：

$$E_z=\frac{2qdz_0}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2-k^2}}e^{-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2-k^2}\,(z-z_0)}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

由(4)式可見，由E_z即可求出U，从而可以求出其他各个电磁场分量。

如在$z=0$处有短路活塞，則我們必須在$(x_0, y_0, -z_0)$放入一个象，但从电象理論不难看出这个象必須是正象，故此时(計及$z>z_0$及$z<z_0$时不同的表示方法)：

$$E_{zs}=E_z(x,y,z;\ x_0,y_0,z_0)+E_z(x,y,z;\ x_0\,y_0,-z_0)=$$

$$=\frac{4I_zdz_0}{\omega\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}{\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}e^{-j\gamma_{mn}z}\times$$

$$\times\cos\gamma_{mn}z_0\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

其中$\gamma_{mn}=\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$，而且我們已代入$q=I_z/j\omega$，其他各个电磁场分量可由(4)式求出，記住$H_z=0$。此結果与用其他方法得到的結果[10]一致。当电偶极子不平行于z軸时，則激发的不是純电波型场，亦非純磁波型场[10]，故我們的方法不能直接应用；但此时我們可以將此偶极子分解为三个相互垂直的分量，平行于z軸的分量可以用上面的方法处理。平行x軸及y軸的分量所生的电磁场可用上面討論过的縱磁波(LM 波)来处理。最后結果可取这三个分量所激发的场的和作为最后的解。例如，我們取平行于x軸的电偶极子分量为例，不难看出此时所生的电磁场中

$$H_x=0,$$

而其他分量則为下列形式的波型的迭加[7]：

$$E_x=\left(k^2-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)A_{mn}e^{-j\gamma_{mn}}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$E_y=-\pi^2\frac{n}{a}\frac{m}{b}A_{mn}e^{-j\gamma_{mn}}\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},$$

$$E_z=j\gamma_{mn}\frac{n\pi}{a}A_{mn}e^{-j\gamma_{mn}z}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},$$

$$H_y=-k\gamma_{mn}A_{mn}e^{-j\gamma_{mn}z}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$H_z=jk\frac{m\pi}{b}A_{mn}e^{-j\gamma_{mn}z}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\qquad\gamma_{mn}=\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}.$$

这个問題相对应的静电問題的解可取上面格林函数(G 函数)的 x_0 导数,再取 x 导数的負值,得到

$$E_x^{(0)}=\frac{2qdx_0}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2(m^2a^2+n^2b^2)^{-1/2}e^{\frac{-(m^2a^2+n^2b^2)^{1/2}\pi(z-z_0)}{ab}}\times$$
$$\times\cos\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\qquad z>z_0.$$

如 $z<z_0$ 时,則在上面的指数中对調 z 和 z_0 的位置. 从这个静电坊分量 $E_x^{(0)}$, 在每一項中以$\left(k^2-\dfrac{n^2\pi^2}{ar}\right)$代替$\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$,再計及(33)式的关系,即以

$$\frac{(m^2\pi^2/b^2+n^2\pi^2/a^2)^{1/2}}{(m^2\pi^2/b^2+n^2\pi^2/a^2-k^2)^{1/2}}$$

乘 $E_x^{(0)}$ 表示式的第 $m\,n$ 項,即可得到波导中当激发源为平行于 x 軸、电矩为 qdx_0 时的电磁坊 (LM 波) 的 E_x 分量如下:

$$E_x=+\frac{2qdx_0}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(k^2-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)}{\left(\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}+\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}-k^2\right)^{1/2}}\times$$
$$\times e^{-j\gamma_{mn}(z-z_0)}\cos\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\qquad z>z_0.$$

当 $z<z_0$ 时,則要在上式中調換 z 和 z_0 的位置. 如果以 $q=I_x/j\omega$ 代入上式,即得到

$$E_x=\frac{2I_xdx_0'}{\omega\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(k^2-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)e^{-j\gamma_{mn}(z-z_0)}}{\left(k^2-\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{1/2}}\times$$
$$\times\cos\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\qquad z>z_0,$$

当 $z<z_0$ 时,要調換 z 和 z_0 的位置。不难看到,当 $k\to0$ 时, $E_x\to E_x^{(0)}$。

我們知道,縱磁波型坊实質上是电波型坊与磁波型坊相迭加而成,故由静电坊轉入电磁坊时每一个电波型坊和每一磁波型坊的振幅都要按 (33) 式所指出的关系处理;其次在縱磁波型坊中,电波型坊和磁波型坊的配合比例是要使 $H_x=0$, 故在 E_x 的表达式中出現$\left(k^2-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)$,当 $k\to0$ 时,此因子趋于$-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$,故还原时我們要把$-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$換以$\left(k^2-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)$.
当 E_x 已知时,即不难由(4)式求得其他分量,此时 ξ,η,ζ 应取作 y,z,x, 而且

$$E_{x_{mn}}=\left(k^2-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)U_{mn},$$

故即可求出 U_{mn}. 因而我們的 x 方向的电偶极子的激发問題即得到解决. 如果在 $z=0$ 处有短路活塞,則我們仍可用电象法处理,但此时的象为負象;計及 $z>z_0$ 和 $z<z_0$ 时 E_x 表示式的分別,即可写出

$$E_{xs}=E_x(x,y,z;\ x_0,y_0,z_0)-E_x(x,y,z;\ x_0,y_0,-z_0)=$$

$$=\frac{4I_x dx_0}{\varepsilon ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k^2-\frac{n^2\pi^2}{a^2}}{\left(k^2-\frac{m^2\pi^2}{b^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{1/2}}e^{-j\gamma_{mn}z}\times$$

$$\times\cos\frac{n\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\gamma_{mn}z_0',$$

其中

$$\gamma_m=\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,.$$

但如果我們于(x_0,y_0,z_0)放入載流小环(即放入一个磁矩偶极子)，則可以激发出純磁波型及縱电波型场，这个场可以用我們这个方法求出．(如果我們直接取文献[9]同一章的114題，經过同样处理即可得到空腔諧振器激发問題的解．如果令腔的長度C趋于无限長，則我們又得回我們这里已得到的解．)

如果波导的截面形狀不是矩形的，但激发源仍然是平行于軸綫方向(即z方向)的电偶极子(或磁偶极子)，則这一个方法仍然可以应用；如果激发偶极子不平行于z軸，則只有当激发情况使某种对称关系存在，故(19)和(20)式所需要的关系成立时，我們这个方法才能应用，但要适当地处理积分常数，如果我們能够得到这个波导的內部格林函数的話．

(3) 球面坐标，此时电磁场的解可由輔助位函数U求出．由(10)可見，

$$U=ru=\sum_{m,\nu}P_\nu^m(\cos\vartheta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\left[A_{m\nu}J_{\nu+1/2}(kr)+B_{m\nu}H_{\nu+1/2}^{(2)}(kr)\right]\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}\,.$$

当$k\to0$时，我們要回到(10)式的第一式：

$$r^2R''-\nu(\nu+1)R=0.$$

此时的解为

$$R=A'_{m\nu}r^\nu+B'_{m\nu}r^{-(\nu+1)},$$

其中$A'_{m\nu}$, $B'_{m\nu}$为新的积分常数．故得到的静电场或磁电场的解为

$$ru_0=U_0=\sum_{m,\nu}P_\nu^m(\cos\vartheta)\begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}\left[A'_{m\nu}r^\nu+B'_{m\nu}\frac{1}{r^{\nu+1}}\right],$$

其中m, ν取任意正整数．

如果要从已知的$u_0=\frac{U_0}{r}$得到$u=\frac{U}{r}$，則如上面我們做过的一样，可由这兩个式子間的一一对应关系写出u的形式；其次我們要定出$A'_{m\nu}$, $B'_{m\nu}$与$A_{m\nu}$, $B_{m\nu}$的关系．在这里我們只取常見的情形，即$A'_{m\nu}=0$，因而可以令$A_{m\nu}=0$，我們即可以取极限来求出$B_{m\nu}$与$B_{m\nu}$間的关系如下：

$r\to0$ 时，

$$j\frac{1}{\alpha^\nu k^{\nu+1}}\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}B_{m\nu}=B'_{m\nu}. \tag{34}$$

利用此式，我們卽可由已知靜电、靜磁問題解求出相对应的电动力学問題的解。

例如，取文献[1]作为出发点的电偶极子的一个例子。我們在靜电中已知电矩为 P 的电偶极子所生的电场为

$$E_r^{CTAT}=\frac{P}{2\pi\varepsilon}\frac{\cos\vartheta}{r^3},$$

$$E_\vartheta^{CTAT}=\frac{P}{2\pi\varepsilon}\frac{\sin\vartheta}{2r^3},$$

故与这个問題相对应的电磁场是电波型场。因为在球面坐标中是 u 而不是 U 满足波动方程，故由(12)式，

$$u_0=\gamma E_r=\frac{P}{2\pi\varepsilon}\frac{\cos\vartheta}{r^2}=\frac{P}{2\pi\varepsilon}\frac{P_1(\cos\vartheta)}{r^2}$$

因为 $u_0\sim\frac{1}{r^2}$，故 $\nu=1$，对应的 u 当計及(33)的关系时应取如下的形式：

$$u=-j\frac{P}{2\pi\varepsilon}k^2H_1^{(2)}(kr).$$

由(12)可見：

$$E_r=\frac{P}{2\pi\varepsilon r^3}e^{-jkr}\cos\vartheta(1+jkr),$$

$$E_\vartheta=\frac{1}{\nu(\nu+1)}\frac{\partial}{r\partial\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}(\nu u)=\frac{Pe^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r^3}\sin\vartheta(1+jkr-k^2r^2),$$

$$H_\varphi=\frac{-j\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(ru)=\frac{j\omega P}{4\pi r^2}e^{-jkr}\sin\vartheta(1+jkr).$$

四. 結 論

由以上討論可知，电磁场問題作为界值問題，当它可以以純电波型场或純磁波型场的形式存在时，則当运行角頻率趋于零($\omega\to 0$)时卽轉化为相应的靜电场問題或靜磁场問題。因而这一类的电磁场問題的解可能从相应的靜电或靜磁問題的解直接写出来。因为此时电动力学問題与靜电磁問題的級数形式的解間有一一对应的項，从一个級数我們可以写出其他一个級数来，并且可以从原級数解中的已知积分常数来找出其对应待求級数的积分常数。

但什么时候电动力学問題才可以表为純电波型场或純磁波型场呢？我們举出兩种可能性，一是在满足(3)的条件的坐标系統中而且满足某些如上面所述的附加条件；另一是由于某种对称性的存在，电磁场卽行分解为兩个独立組，卽电波型场和磁波型场，如(19)及(20)所給出的。

利用这个方法，一些比較复杂的問題，可以从已知靜电靜磁的解出发得到解答，如上面所举的波导激发問題卽是一例。而靜电、靜磁問題的知識累积是非常丰富的，故这个方法所能解决的問題是相当广泛的，是值得进一步研究的。

参 考 文 献

[1] Потехин, А. И., Решение задач электродинамики по известным решениям соотвествующих задач электростатики и магнитостатики, *Радиотехника и электроника*, 3 (1958), 587.

[2] Потехин А. И. и Тартаковский, Л. Б., Излучение диполя герца на кромке идеально проводящего клина, Радиотехника и электроника, 3 (1958), 592.

[3] Вайнштейн, Л. А., Электромагнитные волны, 1957, § 20.

[4]* Slater and Frank, Electromagnetism, §12.1.

[5] Schelkunoff, Generalized Telegraphist's Equation for wave guides, B. S. T. J., 784, 1952.

[6] Schelkunoff, Electromagnetic waves, 1943, pp. 393—394.

[7] Введенский, Б. А. и Аренберг, А. Г., Радиоволноводы, ОГИЗ, 1946, §6-1.

[8] Stratton, Electromagnetic theory, 1941, §3.21.

[9] Smythe, Static and Dynamic Electricity, 1950, p. 213, #113.

[10] Stevenson, A. F., Contributions to the theory of wave guide, part 2, *Canadian Journal of Research*, **A27** (1949), 91—100.

THE METHOD OF SOLVING ELECTROMAGNETIC PROBLEM FROM THE KNOWN SOLUTIONS OF THE CORRESPONDING STATIC PROBLEM

LIN WEI-GUAN

(*Chengtu Institute of Radio Engineering*)

ABSTRACT

If an electromagnetic field can be represented by a pure electric wave (E-wave or TM wave, transverse magnetic field) or a pure magnetic wave (H-wave or TE wave, transverse electric field), then as a boundry value problem, when the operating frequency tends to zero, the electromagnetic field will be reduced to an electrostatic or a magnetostatic field, respectively. Hence the solution of such an electromagnetic problem can easily be obtained from that of the corresponding static problem, because there exists an one-to-one correspondence between the terms of the series solution of the electromagnetic problem and those of the series solution of the static problem, and therefore we can obtain one series from the other, using the rules of determining the integration constants in the unknown series outlined in this paper.

We point out two possibilities of the existense of pure electric waves and pure magnetic waves: one in coordinate systems satisfying eq. (3) and other conditions discussed in this paper and the other in problems where some forms of symmetry exist so that the system of Maxwell's equations can be broken into two

independent groups, which we also call respectively electric waves and magnetic waves.

By means of the proposed method some complicated boundry value problems can be solved with ease as we have done here for the problem of the excitation of waveguides by a dipole from the known solution of the corresponding static problem. Since there is a rich accumulation of electrostatic and magnetostatic problems so the method proposed here should be valuable in solving field problem and should be studied further.