

平面上无限长开槽衍射问题的一个新解法

林为干

(成都电讯工程学院)

取导体平面上无限长开槽的衍射问题。

设开槽位于 z - x 面上, 开槽的边缘平行于 z 轴, 由 $x = \pm a, y = 0$ 表出。设 z - x 平面的厚度为零而且是完全导电的。设一平面波由正 y 方向入射 (垂直入射见图1), 极化情况是: 入射磁场只有一个 H_z 分量而电场只有一个 E_x 分量, 而所有的电磁量均与 z 坐标无关, 故文献[1]的方法可用。与这个问题相对应的静磁问题是: 具有宽度为 $2a$ 的裂缝的导体平面对均匀磁场的透过问题。这个问题的解, 可用复数位函数表出^[2]:

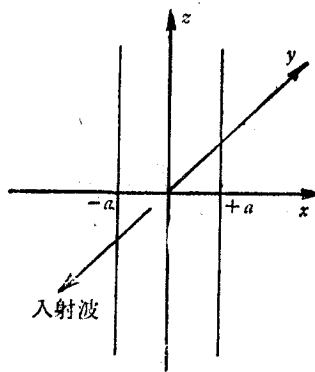


图1

$$W = -\frac{1}{2}H_0[z_1 \pm (z_1^2 - a^2)^{1/2}],$$

$$W = U_0 + jV_0, \quad z_1 = x + jy = re^{j\varphi}$$

其中括号内的符号当 $y > 0$ 时取正号, 而当 $y < 0$ 时取负号。当我们取 U_0 为(无向量磁)位函数时, 当(见图2)

$$|z_1| \rightarrow \infty: W \rightarrow -H_0(x + jy) \quad y > 0;$$

$$W \rightarrow 0 \quad y < 0.$$

由此

$$U_0 = -H_0x, \quad \therefore H'_x = -H_0.$$

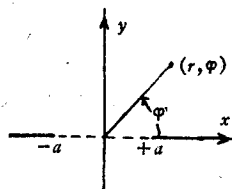


图2

故静磁场只有一个磁场分量 H_x , 这就与我们的电磁场问题相对应。

将上面 W 的表示式用二项定理展开, 取实部, 即得到

$$U_0 = \frac{-H_0}{2} \begin{cases} 2\gamma \cos \varphi - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\psi_{n-1}}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} \cos n\varphi & 0 < \varphi < \pi, \quad r \geq a; \\ \gamma \cos \varphi + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\psi_m a}{m-1} \frac{r^m}{a^m} \sin m\varphi & r \leq a; \\ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\psi_{n+1}}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} \cos n\varphi & r \geq a, \quad \pi < \varphi < 2\pi; \end{cases}$$

其中

$$\psi_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} \quad m=2, 4, 6, \dots$$

$$\psi_{n+1} = \frac{n}{n+1} \psi_n \quad n=1, 3, 5, \dots,$$

故

$$\psi_1=1, \psi_2=1/2, \psi_3=1/2, \psi_4=3/8 \dots$$

为了要能够从这个 U_0 找出相对应的电磁场问题的解, 亦即我们提出的衍射问题的解, 我们要利用文献[1]所建立的方法。当 $\omega \rightarrow 0$ (ω 是角频率) 时, 文献[1] 的(20)式给出一个静磁场(在圆柱坐标中):

$$H_r = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{P}{j\omega\mu} \right),$$

$$H_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{j\omega\mu} \right),$$

$$E_z = P \rightarrow 0.$$

可见 $P/j\omega\mu$ 是以向量磁位的 z 分量的形式出现(此向量位只有一个 z 分量), 故在静磁问题中是拉普拉斯方程的解, 即是说我们的结果是:

当

$$\omega \rightarrow 0,$$

$$\frac{P}{j\omega\mu} \rightarrow P_0,$$

$$\Delta P_0 = 0,$$

$$H_r = \frac{\partial P_0}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{\partial P_0}{\partial r}.$$

在导体平面上磁场的法线分量 H_z 等于零, 故这里的边界条件与在电磁场中的边界条件一致。

在圆柱坐标中 P 满足波动方程, 就是说此时文献[1] 中的(20)式是波动方程, 故 P 的解是[1] 的(30)式形式的级数, 而 P_0 的解则取(31)式形式的级数, 这两个级数的系数间的关系则由文献[1] (32)式给出。

为了要求得 P , 我们先求出 P_0 。

由

$$H_r = \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U_0}{\partial r}$$

不难求出

$$P_0 = \frac{H_0}{2} \begin{cases} 2r \sin \varphi + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\psi_{n+1}}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} \sin n\varphi & r \geq a \\ r \sin \varphi - \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{\psi_m}{m-1} \frac{r^m}{a^{m-1}} \cos m\varphi & r \leq a, \\ \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^n \frac{\psi_{n+1}}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} \sin n\varphi & r \geq a \\ \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

由文献[1]的(7),(8)及(22), 即可得到

$$E_z = P = +j\omega\mu \frac{H_0}{2} \begin{cases} \left(\frac{4}{k} - \frac{\pi k a^2}{2j}\right) J_1(kr) \sin \varphi + \\ + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \psi_{n+1} \frac{\pi k^n a^{n+1} \sin n\varphi}{2^n j n!} H_n^{(2)}(kr) & r \geq a, \\ & 0 < \varphi < \pi, \\ \frac{2}{k} J_1(kr) \sin \varphi - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a \psi_m}{m-1} \frac{m!}{(ka)^m} J_m(kr) \cos m\varphi & r \leq a, \\ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1) \psi_{n+1} \frac{\pi k^n a^{n+1} \sin n\varphi}{2^n j n!} H_n^{(2)}(kr) & r \geq a, \\ & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

其他两个电磁场分量是

$$H_r = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial P}{r \partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial P}{\partial r},$$

故不难求出。试取如下的情形:

$$ka = \frac{2\pi}{\lambda} a \ll 1,$$

则衍射场可近似地取作

$$E_z = -H_0 \frac{\pi (ka)^2}{8} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_1^{(2)}(kr) \sin \varphi \cong -H_0 \frac{\pi (ak)^2}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{e^{-j(kr - \frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \sin \varphi \quad \begin{matrix} r \geq a, \\ 0 < \varphi < \pi, \end{matrix}$$

$$H_\varphi = H_0 \frac{\pi (ak)^2}{4} \frac{e^{-j(kr - \frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \sin \varphi,$$

$$H_r = H_0 \frac{\pi (ak)^2}{kr} j \frac{e^{-j(kr - \frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \cos \varphi \quad r \geq a, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

在上面的微分运算中(在计算 H_φ 时), 我们只对指数函数进行微分。由上式又可见,

$$\frac{E_z}{H_\varphi} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad H_r = O(r^{-3/2}), \quad H_\varphi = O(r^{-1/2}).$$

可见衍射场在 $r \rightarrow \infty$ 处趋近于一平面波而且沿 r 增加的方向行进。

我们所得到的结果与现有结果(例如文献[3])比较, 远区衍射场场强与 $ak = 2\pi \frac{a}{\lambda}$ 的变化关系是相符合的, 但比例常数则不完全一致。

至于平行极化情形(即来波只有 E_z 及 H_z 分量的情形)由于没有适当的静电的解存在, 故这个方法不能应用。

参 考 文 献

- [1] 林为干:由已知相应的电静磁问题求电动力学问题的解,本期 449 页。
[2] Каден, Г., Электромагнитные Экраны, ГЭИ, 1957, стр. 190 或 Smythe, Static and Dynamic Electricity, 1950, § 4.23.
[3] Sommerfeld, Optics, 1954, p. 283.

**A NEW METHOD OF SOLVING THE PROBLEM
OF DIFFRACTION BY A NARROW SLIT**

LIN WEI-GUAN

(Chengtu Institute of Radio Engineering)

ABSTRACT

The problem of diffraction by a narrow slit in an infinitely thin and perfectly conducting plane is solved by a method developed in the accompanied paper, from the known solution of the corresponding magnetostatic problem.