

# 永久磁鉄周期性聚焦电子束\*

何 国 柱

(南开大学)

## 提 要

在余弦式及非余弦式周期磁坊下描写电子軌跡的傍軸方程曾用微扰法求解,得到了一些最佳聚焦条件.在推导中考虑了空間电荷效应及阴极被部分屏蔽的情况,当电子束在周期坊中波动比较大时这些結果也能应用.

另外用变振幅的方法研究了电子束在周期磁坊内的稳定性問題,得到了一些包含有空間电荷密度及阴极屏蔽程度在内的稳定性条件,并繪出图綫表示禁区位置因各种不同空間电荷密度及阴极屏蔽程度而改变的情况,知道虽然在用全屏蔽的电子枪情况下,正如过去一些著者所指出的,禁区位置不因空間电荷密度的大小而改变,但在阴极被部分屏蔽的情况下,空間电荷密度对禁区位置有显著的影响.

## 一. 引 言

为了配合南开大学物理系設計与試制行波管,曾对用永久磁鉄周期性聚焦行波管内电子束的电子光学問題进行了一些理論的探討.关于周期磁坊聚焦电子束的問題很多人曾經进行过研究工作,例如 Brewer<sup>[1]</sup>, Clogston 和 Heffner<sup>[2]</sup> 及 Mendel 等人<sup>[3]</sup>,以上这些人的工作,都是考虑了当在阴极处沒有磁坊出現的情况,也就是当阴极被完全和磁坊屏蔽了的情况. Chang<sup>[4]</sup> 和 Mendel<sup>[5]</sup> 对当在阴极处有部分磁坊的情况也进行了一些理論工作.半屏蔽阴极可以防止电子束在电子枪内由于热运动而引起的发散现象,同时也还能保留一部分全屏蔽时的磁坊聚焦作用.但是这些理論結果只限于当电子束的波动比较小或是近乎平行流过周期坊时才能应用.对当电子束的波动比较大的情况, Harker<sup>[6]</sup> 和 Beve 等人<sup>[7]</sup> 利用了模拟电子计算机求解周期磁坊内的傍軸电子軌跡方程,得到了周期磁坊最佳聚焦条件的一些曲綫,这些曲綫对設計行波管工作很有指导意义.

本文利用微扰法求解了半屏蔽情况下周期磁坊内的电子軌跡方程.当电子束波动得比较小时,得到与 Mendel<sup>[5]</sup> 的結果相同的最佳聚焦条件;当电子束波动得比较大时,可以在計算中包括二級或更高級微扰項,于是也可以获得接近于 Harker<sup>[6]</sup> 利用电子计算机所获得的最佳聚焦条件的曲綫的結果,同时也能写出描写电子束軌跡的方程的近似解析解.

从測量电子束通过周期磁坊的电流实验中知道<sup>[8]</sup>,在固定周期情况下,如果变化磁坊强度,仅当在某些磁坊强度范围内,电子束才能順利地通过周期磁坊,而在其他磁坊强度区域内,电子束不能通过,也就是說有所謂禁区存在.已經知道,当忽略空間电荷效应,同时又是在阴极被完全屏蔽了的情况下,可以証明理論上确实有一些禁区存在,并且与实验

\* 1959年7月13日收到.

結果符合得相当好。可是当在阴极不被完全屏蔽的情况下,阴极处磁场强度的大小,对禁区位置的影响究竟如何?在空间电荷密度比较大的情况下,禁区的位置是否会移动?对这些问题的看法尚不一致,因此有必要对周期磁场聚焦电子束的稳定性问题进行进一步的理论研究。

本文利用变化周期函数解的振幅和相角的方法,重新研究了电子束在周期磁场内的稳定性问题,得到了禁区因阴极屏蔽程度的不同所引起的变化及空间电荷对禁区的影响的一些关系式。知道仅当阴极被完全屏蔽时,禁区的位置才不因空间电荷的密度而变化,这也就说明了为什么在以前的理论中,虽然忽略了空间电荷作用,仍然可以得到能与实验很好符合的结果。可是当阴极处于半屏蔽情况时,就我们的理论推导可知,禁区的位置应当因电子束中空间电荷密度的不同而有相当大的变化。

以上一些理论工作都假定了轴上磁场分布是余弦式的函数。Buck<sup>[8]</sup>指出:如果考虑周期场中磁铁的厚度,仅当磁铁间的间隔距离与周期之比为1:3时,轴上的磁场分布才能用这个简单的余弦函数表示。如果这比例大于或小于1:3,轴上的磁场分布将不能再用这种简单的余弦函数表示,而必须用比较复杂的非余弦式函数来代替。Buck<sup>[8]</sup>研究了在这种非余弦式的周期磁场下电子束聚焦的稳定性问题。当轴上磁场分布为非余弦式的周期函数时,也可以利用微扰法求解描写在这种情况下电子束的傍轴轨迹方程,得到近似的解析解,并能获得可使电子束近乎平行流过周期磁场的最佳聚焦条件。

## 二. 余弦式周期磁场

### 电子束的轮廓及最佳聚焦条件

假定电子束最外层电子永远在最外层,于是电子束的轮廓可以用电子束上最外层电子的轨迹来描绘。当这些最外层电子离轴不远时,在磁场中它们的轨迹满足下面的傍轴轨迹方程<sup>[4]</sup>:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\eta B^2}{8V_0} r - \frac{\eta B_0^2 r_0^4}{8V_0} \frac{1}{r^3} - \frac{I}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0\eta^{1/2}V_0^{3/2}} \frac{1}{r} = 0, \quad (1)$$

其中  $I$  和  $V_0$  分别是电子束的电流及在周期场中的常数电压,  $r_0$  是阴极的半径;  $B$  和  $B_0$  分别是轴上沿轴方向的磁场分布及在阴极处的磁场强度;  $\eta$  是电子的电荷与质量之比;  $\epsilon_0$  是介电常数。

假定在周期磁场内,轴上沿轴方向的磁场分布为一余弦函数,即

$$B = B_0 \cos kz, \quad (2)$$

其中  $k = 2\pi/L$ ,  $L$  是磁场的周期。并令  $y = r/r_0$ ,  $x = kz$ , 可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b(1 + \cos 2x)y - \frac{2bK}{y^3} - \frac{Q}{y} = 0, \quad (3)$$

其中

$$b = \frac{\eta B_0^2}{16k^2 V_0}, \quad K = \left( \frac{B_0}{B_0} \frac{r_0^2}{r_0^2} \right)^2 \quad \text{和} \quad Q = \frac{I}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0\eta^{1/2}V_0^{3/2}r_0^3 k^2}.$$

为了得到比较强的电流,常常利用球帽状阴极使发射电子的面积增大如图1所示。

Mendel<sup>[6]</sup>曾利用微小波动的方法求解(3)式,得到使电子束近乎平行流过的条件或

最佳聚焦条件为

$$K = \frac{Q-b}{2b}. \quad (4)$$

Harker<sup>[6]</sup>也曾利用模拟电子计算机求解(3)式,得到表示最佳聚焦条件的一组曲线如图2所示.为了与 Mendel 的结果比较,也把(4)式按虚线画在图2上.

当阴极被完全和磁坊屏蔽起来的时候,  
 $B_0=0$ ,  $K=0$ , (3)式变为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b(1 + \cos 2x)y - \frac{Q}{y} = 0. \quad (5)$$

Clogston 和 Heffner<sup>[3]</sup>曾解出(5)式,得到最佳聚焦条件为

$$b = Q \left( 1 + \frac{3}{8} Q \right). \quad (6)$$

(5)式也曾用微扰法解出<sup>[9]</sup>,得到与(6)式相同的結果.式(3)也可用微扰法求解.因为在一般行波管中,空间电荷密度或电流不很大,可满足  $Q \ll 1$ ,于是可把  $Q$  看成为微扰项.使

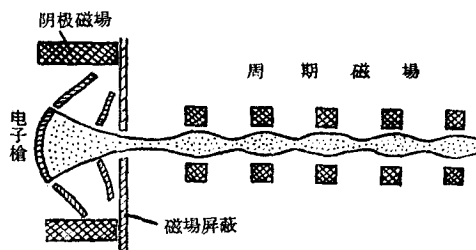


图1. 行波管内周期磁场聚焦系统示意图

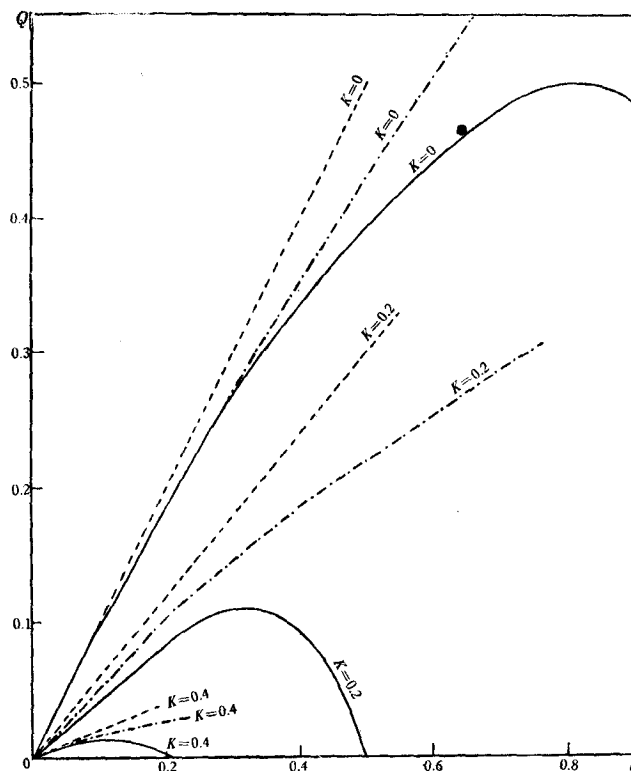


图2. 表示在周期磁场内最佳聚焦条件的曲线

实线为 Harker<sup>[6]</sup> 用模拟电子计算机所获得的结果; 虚线为 Mendel<sup>[3]</sup> 所获得的一级近似结果; 半虚线为利用微扰法得到的二级近似结果

$y$  和  $b$  按  $Q$  展开:

$$y = 1 + y_1 Q + y_2 Q^2 + \cdots; \quad b = b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \cdots.$$

把  $y$  和  $b$  的展开式代入 (3) 式, 然后按  $Q$  的次数整理, 各项系数应为零。并且利用  $y$  应为周期函数及电子束进入周期场的初始条件, 可求出  $y_1, y_2, \cdots$  及  $b_0, b_1, b_2, \cdots$  等。现仅把进行到  $Q$  的二次项的结果写出如下:

$$y = 1 - \frac{Q}{4(1-2K)}(1 - \cos 2x) - \frac{Q^2}{32(1-2K)^2} \left[ \frac{5+12K-16K^2}{1-2K}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) \right] + \cdots. \quad (7)$$

满足以上周期解的条件为

$$b = \frac{Q}{1-2K} \left[ 1 + \frac{3+8K}{8(1-2K)^2} Q \right]. \quad (8)$$

在阴极被完全屏蔽的情况,  $K=0$ , (8) 式变成  $b = Q \left[ 1 + \frac{3}{8} Q \right]$ , 此与以前的结果 (6) 式相符合。

比较 (4) 式与 (8) 式, 知道 Mendel 的结果相当于一级近似, 而 (8) 式包括  $Q$  的二次项或二级近似项。把 (8) 式也用半虚线画在图 2 中, 可以看出二级近似对 Mendel 的结果的改正情况。很容易利用微扰法得到包含更高级微扰项的周期解及最佳聚焦条件, 这些最佳聚焦条件应当更接近于 Harker 利用电子计算机所得到的结果。从 (7) 式也可描绘出仅考虑二级近似时电子束在周期场中的轮廓。

#### 电子束在余弦式周期磁场内的稳定性问题

(1) 式可写成

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + b(1 + \cos 2x)r - \frac{2b}{r^3} \left( \frac{B_c r_c^2}{B_0} \right)^3 - \frac{Q r_0^2}{r} = 0. \quad (9)$$

当  $B_c = Q = 0$  时, 即当阴极完全被屏蔽, 同时忽略空间电荷效应, 式 (9) 变为

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + b(1 + \cos 2x)r = 0. \quad (10)$$

把 (10) 式与 Mathieu 方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + (a + 2q \cos 2x)y = 0$  相比较<sup>[10]</sup>, 知道 (10) 式属于当  $2q=a$  时 Mathieu 方程的一特殊情况。早已知道 Mathieu 方程有稳定区存在 (见图 3), Mendel 等指出<sup>[8]</sup>, 从图上知道, 第一禁区开始于  $b=0.66$  或  $\frac{\eta B_0^2 L^2}{V_0} = 418$ 。第一禁区的宽度及第二禁区的开始位置都在图 3 中表示出来了。并且 Mendel 等<sup>[8]</sup> 做过一些实验, 令  $L$  和  $V_0$  分别固定为一吋及 700 伏, 变化磁场强度  $B_0$ , 用以验证理论上的禁区, 得到很好的符合 (见图 4)。

从以上的结果知道, 忽略了空间电荷效应, 理论与实验值仍然能很好地符合, 似乎空间电荷效应对第一禁区影响应当很小。Mendel<sup>[8]</sup> 甚至进一步认为 (9) 式中第三项或称屏蔽项对第一禁区影响也很小, 可以忽略不计。但是他认为对第二禁区或更高级禁区应慎重的研究。并且指出, 在阴极完全屏蔽的情况下, 实验证明, 高级禁区与 Mathieu 方程所要求的禁区位置差别也不显著。

但是根据 Harker<sup>[6]</sup>用电子计算机求解(9)式时,发现在 $b > 0.66$ 时仍然有解(见图2),并没有发现禁区。这与从 Mathieu 方程所推出的禁区位置及 Mendel 等人的实验结果都不相符合。于是他认为空间电荷及阴极屏蔽程度对第一禁区应当有相当大的影响,它们把禁区移向 $b > 0.66$ 的区域以内,并且认为实验所得到的禁区可能是由于电子热运动造成的结果。

究竟空间电荷及阴极屏蔽情况对禁区的位置是否有影响? 若有,影响究竟多大? 似乎这些问题值得仔细地加以研究。

Kleen 和 Pösche<sup>[11]</sup>指出,如果采用适当的值作为测量单位,(9)式可以写成比较简单的形式。令  $r/r_m = 1 + \delta$ ,代入(9)式,并且选择  $r_m$ , 使

$$r_m = r_B \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ 1 + 8 \left( \frac{r_c^2}{r_B^2} \frac{B_c}{B_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

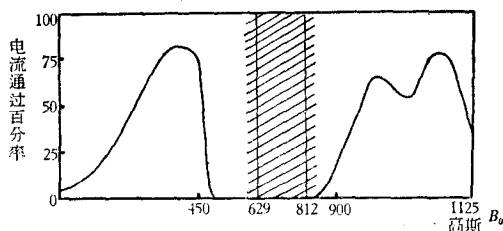


图4. 在周期磁场中固定电压及周期,当变化最大磁场强度  $B_0$  时,电子束通过周期场的实验曲线,实验结果为 Mendel 等人<sup>[3]</sup>所获得

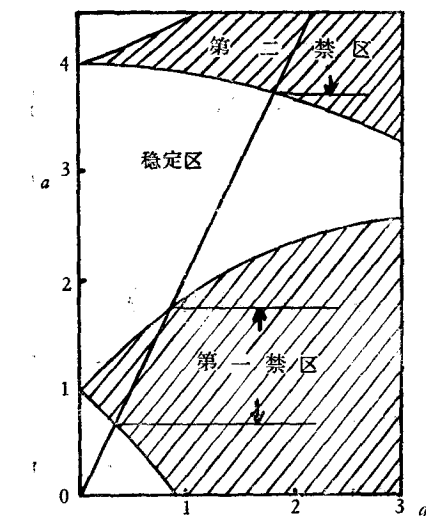


图3. Mathieu方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + (a + 2q \cos 2x)y = 0$  的稳定图直线为当  $2q=a$  时的特殊情况

其中  $r_B = \frac{Qr_0^2}{b}$ , 则(9)式变为

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} + b[2(1 + K')\delta + \cos 2x] = -b\delta \cos 2x, \quad (11)$$

其中  $K' = 2 \left( \frac{B_c}{B_0} \frac{r_c^2}{r_m^2} \right)^2$ . 把  $\delta$  用正弦及余弦函数的展开式表示如下:

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(x) \cos nx + B_n(x) \sin nx]. \quad (12)$$

电子束是否发散或是按周期性聚焦,应当决定于这些振幅  $A_n$  及  $B_n$  的形式,将展开式(12)代入(11)式,经整理后各正弦及余弦项的系数应分别为零。假定  $A_n$  和  $B_n$  是变化缓慢的  $x$  函数,于是  $A_n'' \ll A_n' \ll A_n$ ,  $B_n'' \ll B_n' \ll B_n$ , 但  $A_n$  和  $B_n$  并不要求是周期函数(“'”表示对  $x$  微分)。于是可从各正弦及余弦项系数为零的条件得到:

$$A_0 = -\frac{A_2}{4(1 + K')},$$

$$\sin x: \quad 2A_1' = \left[ 2b(1 + K') - 1 - \frac{b}{2} \right] B_1, \quad (13)$$

$$\cos x: \quad 2B_1' = \left[ 1 - 2b(1 + K') - \frac{b}{2} \right] A_1, \quad (14)$$

$$\sin 2x: \quad 4A_2' = -[4 - 2b(1 + K')]B_2, \quad (15)$$

$$\cos 2x: \quad 4B'_2 = \left[ 4 - 2b(1+K') + \frac{b}{4(1+K')} \right] A_2 - b, \quad (16)$$

$$\sin 3x: \quad 6A'_3 = [2b(1+K') - 9] B_3 + \frac{b}{2} B_1, \quad (17)$$

$$\cos 3x: \quad 6B'_3 = [9 - 2b(1+K')] A_3 - \frac{b}{2} A_1, \quad (18)$$

.....

从(13)和(14)式可得

$$A_1'' = -\frac{1}{4} \left\{ [2b(1+K') - 1]^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\} A_1,$$

于是

$$A_1 = C_{11} \cos Ex + C_{12} \sin Ex, \quad (19)$$

其中

$$E = \frac{1}{2} \left\{ [2b(1+K') - 1]^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

$B_1$ 也可解出,结果是

$$B_1 = \frac{2E}{\left[ 2b(1+K') - 1 - \frac{b}{2} \right]} (C_{12} \cos Ex - C_{11} \sin Ex). \quad (20)$$

从(20)式  $B_1$  的表示式中可以看出,当  $2b(1+K') - 1 - \frac{b}{2} = 0$  时,即

$$b = \frac{2}{3+4K'}, \quad (21)$$

$B_1$  变成无限大,电子束将发散。在阴极被完全屏蔽时,  $K'=0$ , 于是  $b=0.66$  或  $\frac{\eta B_0^2 L^2}{V_0} = 418$ 。此与实验值及 Mathieu 方程要求的禁区位置相符合。但现在  $K'$  中包括空间电荷密度及阴极屏蔽系数,因此可以从(21)式得到电荷密度及阴极屏蔽程度对禁区位置的影响情况。

从(19)式和(20)式知道,仅当  $E^2 > 0$  时,即  $[2b(1+K') - 1]^2 > \left( \frac{b}{2} \right)^2$  时,  $A_1$  和  $B_1$  为周期函数,当  $E^2 < 0$  时,  $A_1$  和  $B_1$  将按  $x$  指数地增大。换句话说,即当  $b$  在下面区域内时,

$$\frac{2}{5+4K'} < b < \frac{2}{3+4K'}. \quad (22)$$

若  $z \rightarrow \infty$ , 则  $\delta \rightarrow \infty$ , 也就是电子束将发散。在这区域内电子束将不稳定,应当相当于第一个禁区。

与 Mendel 等人<sup>[6]</sup>的实验值比较,当阴极被完全屏蔽时  $K'=0$ , (22)式变为  $\frac{2}{5} < b < \frac{2}{3}$ 。若采取 Mendel 等人的实验条件  $L=1$  吋,  $V_0=700$  伏,禁区应在

$$629 \text{ 高斯} < B_0 < 812 \text{ 高斯}$$

之间,这与图 4 中的实验结果符合得很好。

空间电荷密度包含在  $K' = 2 \left( \frac{B_0 r_m^2}{B_0 r_m^2} \right)^2$  中的  $r_m$  项内。当阴极被完全屏蔽时  $B_0 = 0$ , 无论空间电荷密度的大小如何,  $K'$  都是零。因此, 禁区的位置在完全屏蔽情况下, 恰好不因空间电荷密度而变。这也就说明了为什么以前的实验结果和理论, 即使不考虑空间电荷, 也能彼此符合得很好。但当  $B_0 \neq 0$  或半屏蔽时, 空间电荷密度将影响禁区的位置如(22)式所示。

从(15)式和(16)式可得  $B_2'' = -D^2 B_2$ , 其中

$$D^2 = \frac{1}{16} [4 - 2b(1 + K')] \left[ 4 - 2b(1 + K') + \frac{b}{4(1 + K')} \right],$$

使  $B_2$  发散的条件应为  $D^2 < 0$ , 即

$$\frac{2}{1 + K'} < b < \frac{16(1 + K')}{8(1 + K')^2 - 1}, \quad (23)$$

这又是一个禁区。

当阴极被完全屏蔽时,  $K' = 0$ , (23) 式变为  $2 < b < \frac{16}{7}$ 。这也和 Mendel<sup>[6]</sup> 所谈到的在完全屏蔽情况下, 实验结果指出高级禁区的位置与空间电荷密度无关, 仅为  $b$  的函数的结论相符合。

从(15)和(16)式也得到  $A_2'' = -D^2 A_2 + \frac{1}{16} [4 - 2b(1 + K')]$ , 这个非齐次微分方程的解可由齐次微分方程  $A_2'' = -D^2 A_2$  的两个解  $y_1 = \cos Dx$  和  $y_2 = \sin Dx$  用积分形式表示<sup>[12]</sup>。

$$A_2 = C_{21} y_1 + C_{22} y_2 + \frac{1}{16} [4 - 2b(1 + K')] \int_0^x \frac{y_1(\omega) y_2(x) - y_2(\omega) y_1(x)}{y_1(\omega) y_2'(\omega) - y_2(\omega) y_1'(\omega)} d\omega$$

积分后得

$$A_2 = \frac{4(1 + K')b}{16(1 + K') + b - 8b(1 + K')^2} + C_{21} \cos Dx + C_{22} \sin Dx. \quad (24)$$

又知  $B_2$  应写成

$$B_2 = -\frac{4D}{4 - 2b(1 + K')} (C_{22} \cos Dx - C_{21} \sin Dx). \quad (25)$$

从(24)和(25)式知道, 当

$$b = \frac{16(1 + K')}{8(1 + K')^2 - 1} \quad \text{及} \quad b = \frac{2}{1 + K'} \quad (26)$$

时, 电子束的振幅  $A_2$  和  $B_2$  将变为无限大, 电子束将不稳定。

用同样方法可解(17)式和(18)式, 得

$$A_3 = C_{31} \cos Fx + C_{32} \sin Fx + \frac{C}{6(F^2 - E^2)} (C_{11} \cos Ex + C_{12} \sin Ex), \quad (27)$$

其中

$$F = \frac{1}{6} [2b(1 + K') - 9] \quad \text{和} \quad C = \left[ 1 - \frac{2}{3} b(1 + K') - \frac{b}{8} \right] b;$$

$$B_3 = C_{82} \cos Fx - C_{81} \sin Fx + \frac{EC'}{3(F^2 - E^2) \left[ 2b(1+K') - 1 - \frac{b}{2} \right]} (C_{12} \cos Ex - C_{11} \sin Ex), \quad (28)$$

其中

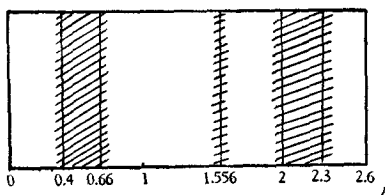
$$C' = \left[ 1 - \frac{2}{3}b(1+K') + \frac{b}{8} \right] b.$$

从 (27) 与 (28) 式可知, 当  $F^2 = E^2$ , 及  $2b(1+K') - 1 = \frac{b}{2}$ ,  $A_3$  和  $B_3$  变成无限大。  
 $2b(1+K') - 1 = \frac{b}{2}$  与  $B_1$  发散的要求相同。从  $F^2 = E^2$  可得

$$b^3 = \frac{72}{32(1+K')^2 - \frac{9}{4}}. \quad (29)$$

当阴极被完全屏蔽时,

$$K' = 0, \quad b^3 = \frac{72}{29.75}, \quad b \approx 1.556. \quad (30)$$



5. 阴极被完全屏蔽时, 禁区的位置

这应当相当于第二个禁区。若仍用 Mendel 等人<sup>[5]</sup>的实验条件为例, 当  $L=1$  时,  $V_0=700$  伏时, (30) 式要求第二禁区在  $B_0=1240$  高斯附近。从图 4 的实验曲线看出, 这理论的推测看样子与实验结果符合得相当好, 虽然实验数据并没有达到这么高的磁场强度。图 5 画出在阴极被完全屏蔽情况下理论推测出的各禁区位置。

为了更明显地看出空间电荷密度与阴极屏蔽情况对禁区的影响, 把

$$K' = 2 \left( \frac{B_c r_c^2}{B_0 r_m^2} \right)^2 \quad \text{和} \quad r_m = r_B \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ 1 + 8 \left( \frac{r_c^2 B_c}{r_m^2 B_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

代入以上表示不稳定情况的 (21), (22), (23) 及 (29) 各式中, 经过整理可得下面的对应式子:

$$b = \frac{2}{3+4K'}: \quad 2Q^2 = K \frac{b(7b-2)^2}{2-3b}, \quad (31)$$

$$b = \frac{2}{5+4K'}: \quad 2Q^2 = K \frac{b(9b-2)^2}{2-5b}, \quad (32)$$

$$b^3 = \frac{72}{32(1+K')^2 - \frac{9}{4}}: \quad 4Q^2 = K b \left[ \frac{9(b^2+32)}{3\sqrt{2b^2+64}-16b} - 32b \right], \quad (33)$$

$$b = \frac{2}{1+K'}: \quad Q^2 = 8K \frac{b(b-1)^2}{2-b}, \quad (34)$$

$$b = \frac{16(1+K')}{8(1+K')^2-1}: \quad Q^2 = K b \left[ \frac{b^2+16b}{4(1-b) \pm \sqrt{2b^2+16}} - (8b-4) \right]; \quad (35)$$

其中  $Q$  可看成为空间电荷密度项;  $K = \left( \frac{B_0}{B_0} \frac{r_0^2}{r_0^2} \right)^2$  为阴极屏蔽系数;  $b$  为磁场强度项。

采取  $K=0.1$ , 将(31)–(35)式按  $b$  与  $Q$  的关系画出曲线如图 6 所示。在曲线附近及在阴影区域内, 电子束在理论上应当不稳定。将图 6 和图 5 比较, 可以看出, 在阴极被半屏蔽的情况下, 空间电荷密度对禁区位置的影响很大。

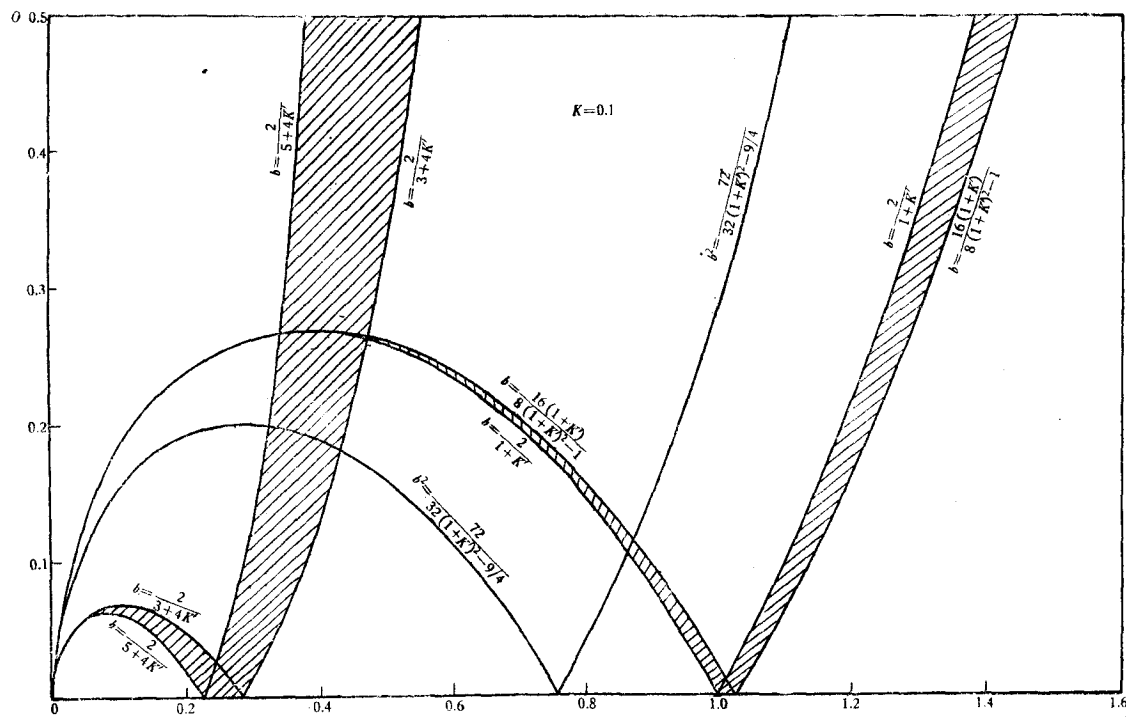


图 6. 表示电子束在周期磁场内稳定性的图。  $b$  与  $Q$  分别为包含磁场强度及空间电荷密度的项。

如果选择  $b$  与  $Q$  在图中曲线附近或阴影区域内时, 电子束将不稳定。

Harker<sup>[6]</sup>及 Bevc 等<sup>[7]</sup>利用电子计算机得到的结果, 所以没有表现出有禁区存在, 可能是因为在固定  $K$  的情况下, 只有当  $b$  与  $Q$  值恰好是在图 6 中的不稳定曲线上, 电子束的振幅才是无限大, 才没有解。在阴影区域内, 电子束的振幅仅趋渐发散而已, 理论上似乎仍有解存在。于是在模拟电子计算机所计算的曲线中, 应当只在几点上没有解, 并不会出现禁区。然而在实际的实验中, 例如在行波管中, 管的半径是有限的, 一般相当细, 电子束若发散, 即将碰在管壁或慢速结构上, 不能顺利地通过周期场。因此在阴影区域内, 电子束不能通过, 于是在实验结果中有禁区出现。

屏蔽系数  $K$  对禁区位置的影响如图 7 所示。在图 7 中, 采取了各种不同屏蔽系数值, 按(29)式画出。可见阴极屏蔽程度的不同也使禁区的位置有所移动。以上这些空间电荷密度及屏蔽系数对禁区位置影响的一些理论结果尚待在实际实验中验证。

### 三. 非余弦式周期磁场

在以前的一些推导中都假定了轴上磁场分布为一余弦式的函数  $B(z) = B_0 \cos kz$ 。这

是一个比较粗略的假定。事实上轴上磁场分布一定会因磁极本身的厚度、磁铁间隔距离及周期长度三者之间的尺寸比例而变化的。只会在某特殊几何情况下才正好能用余弦式函数表示。再者磁极面上的磁场强度也一定会比轴上最高磁场强度  $B_0$  要大一些, 仅当磁铁的内径  $R$  远远小于周期长度  $L$  时,  $B_0$  才接近于磁极面上的磁场强度。实际情况不会如此, 实验室内能达到的  $R/L$  一般都大于 0.1, 因此须要对以前的推导进行改正。  $B(z)$  也必须是  $R/L$  的函数。下面我们考虑用永久磁铁周期性聚焦电子束的情况。

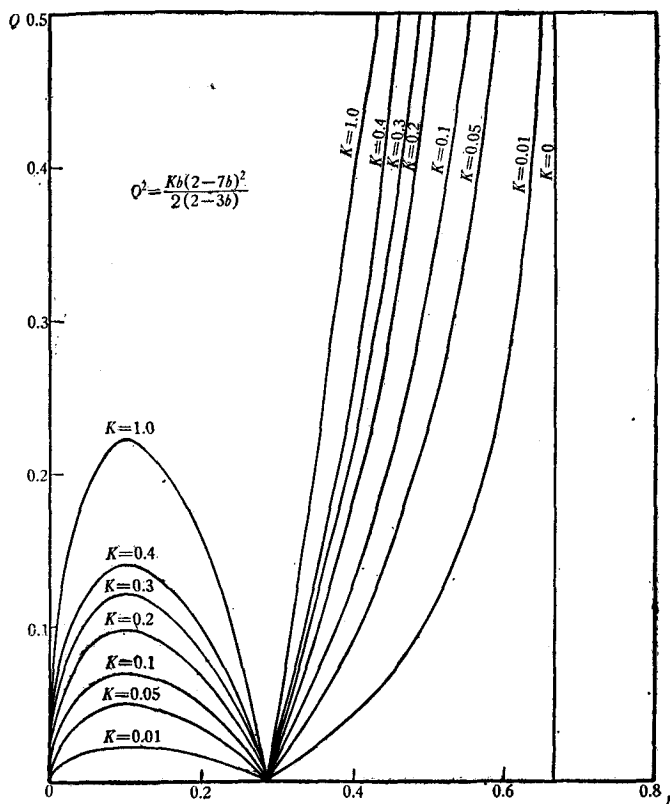


图 7. 阴极屏蔽情况对禁区位置的影响

为了减轻行波管的重量, Siekanowicz and Sterzer<sup>[13]</sup> 曾用永久磁铁代替绕线电磁铁周期性聚焦电子束。这样不但可以把平常如果用均匀磁场聚焦所需要的 50 磅重量减轻到只有 3 磅重, 体积也大大地减小了; 并且还可节省供给电磁铁用的电源。一般用环形永久磁铁同轴排列起来, 相邻两磁铁的磁力方向相反如图 8 所示。在这种轴对称的周期磁场情况下, 解 Laplace 方程, 可获得轴上磁场分布如下式<sup>[14]</sup>:

$$B_z(0, z) = B_0 \sum_{l=\text{奇数}} \frac{4}{l\pi} \frac{\sin(l\pi G/L)}{I_0(2l\pi R/L)} \cos(2l\pi z/L). \quad (36)$$

Buck<sup>[8]</sup> 曾仔细研究了 (36) 式, 知道仅当  $G/L$  约为 1:3 时, (36) 式中第二项为零, 轴上磁场分布才近乎余弦函数如图 9 所示。当  $G/L > 1/3$ , 磁场分布趋近于方形; 当  $G/L < 1/3$ , 形状比余弦函数要窄一些, 也可以从 (36) 式看出, 磁场强度因磁铁内径  $R$  而变化的情况。

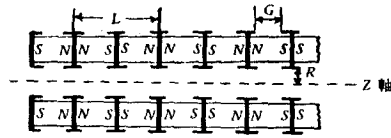


图8. 周期永久磁铁机构示意图

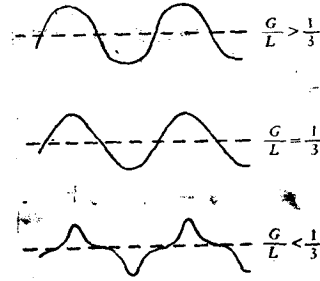


图9. 在不同磁极的几何形状下, 轴上的磁场分布

仅当  $R=0$  时,  $I_0(0)=1$ ,  $B_0$  与磁极的磁场强度始相重合。

将 (36) 式代入傍轴轨迹方程 (3), 可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{8}{\pi^2 b} \left\{ \sum_{l=\text{奇数}} A_l (1 + \cos 2lkz) + \sum_{l \neq l'} B_{ll'} [\cos(l-l')kz + \cos(l+l')kz] \right\} y - \frac{Q}{y} - \frac{2bK}{y^3} = 0, \quad (37)$$

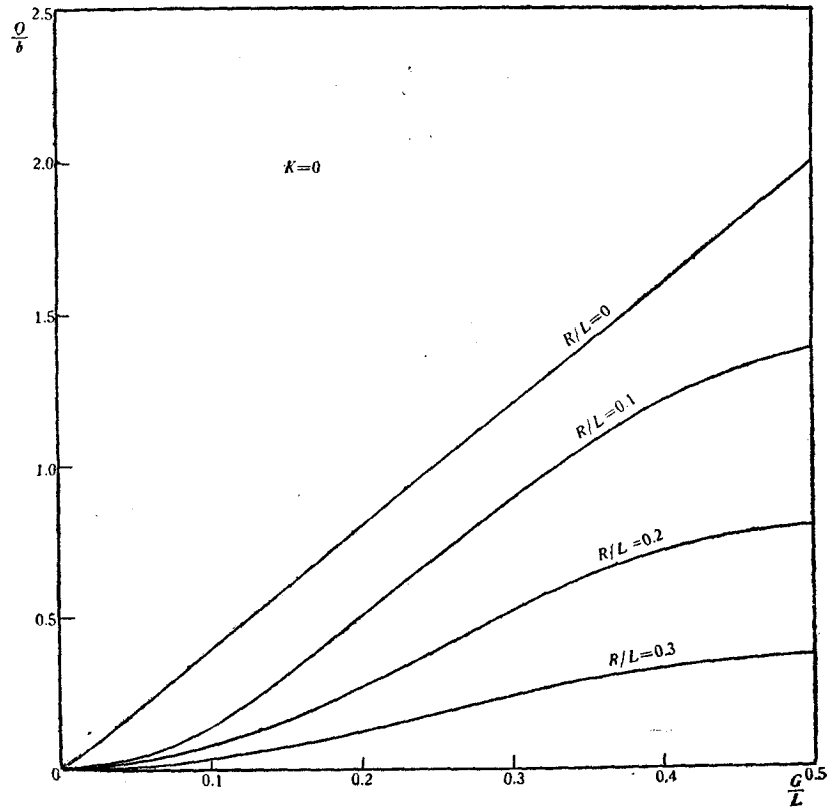


图10. 在阴极被完全屏蔽的情况下, 用非余弦式周期磁场聚焦电子束时, 表示最佳聚焦条件的曲线

其中

$$A_l = \frac{1 - \cos lG}{l^2 I_0^2(lkR)} \quad \text{和} \quad B_{ll'} = \frac{1}{ll'} \frac{\cos \frac{1}{2}(l-l')kG - \cos \frac{1}{2}(l+l')kG}{I_0(lkR) I_0(l'kR)}.$$

(37)式也可用微扰法解出,仍假定  $Q \ll 1$ , 令

$$y = 1 + y_1 Q + y_2 Q^2 + \dots, \quad b = b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \dots,$$

代入(37)式,按  $Q$  的次方整理后,每一项的系数应为零。从而求出  $y_1, y_2, \dots$  及  $b_0, b_1, b_2, \dots$  等。现仅将一級近似的周期解写出如下:

$$\frac{r}{r_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2} b_1 Q \left[ \sum_l A_l (1 - \cos 2lkz) + \sum_{ll'} B_{ll'} \left\{ \frac{1}{(l-l')^2} [1 - \cos (l-l')kz] + \frac{1}{(l+l')^2} [1 - \cos (l+l')kz] \right\} \right] + \dots, \quad (38)$$

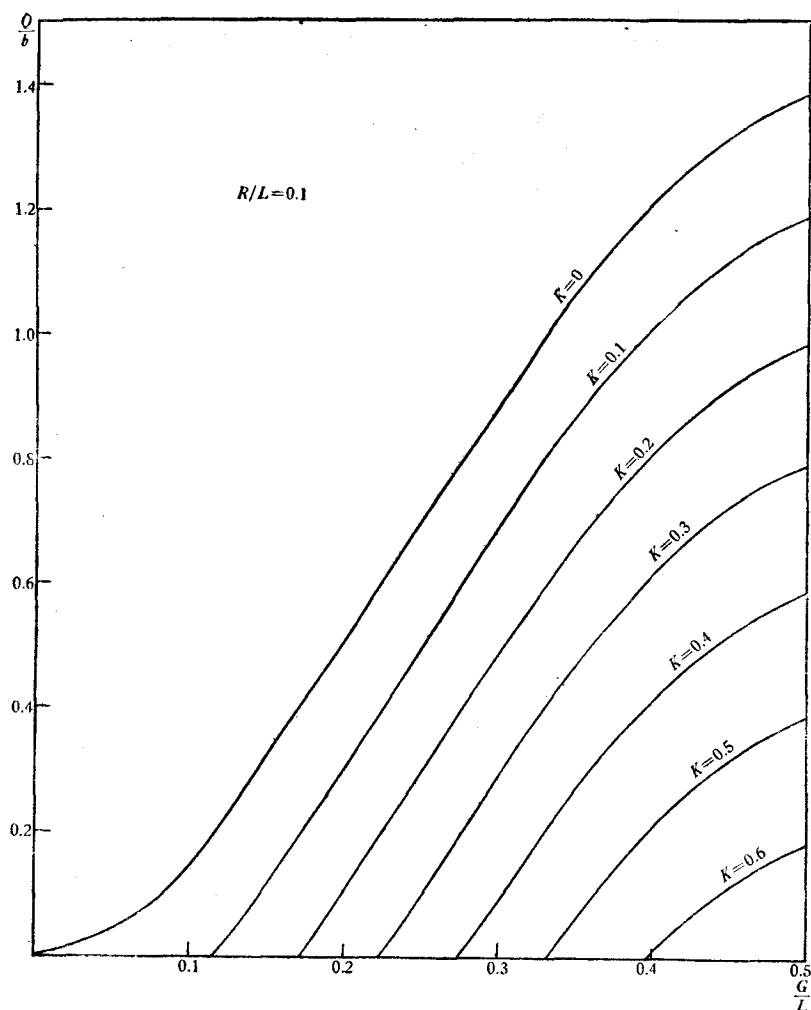


图 11. 在采取  $R/L=0.1$  的情况下,用非余弦式周期磁场聚焦电子束时,表示最佳聚焦条件的曲线

其中  $b_1 = \frac{1}{\frac{8}{\pi^2} \sum_l A_l - 2K}$ . 满足这一级近似周期解的条件为

$$b = \frac{Q}{\frac{8}{\pi^2} \sum_l \frac{1 - \cos lkG}{l^2 I_0^2(lkR)} - 2K} \quad (39)$$

此即在非余弦式周期磁场聚焦情况下, 使电子束能近乎平行流过的必要条件或称最佳聚焦条件.

当  $R \rightarrow 0$  时,  $I_0(lkR) = 1$ ; 如果  $G/L = 1/4$ , 则  $lkG = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos lkG = 0$ ,

$\sum_l A_l = \sum_{l=\text{奇数}} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , 于是(39)式变成

$$b = \frac{Q}{1 - 2K}.$$

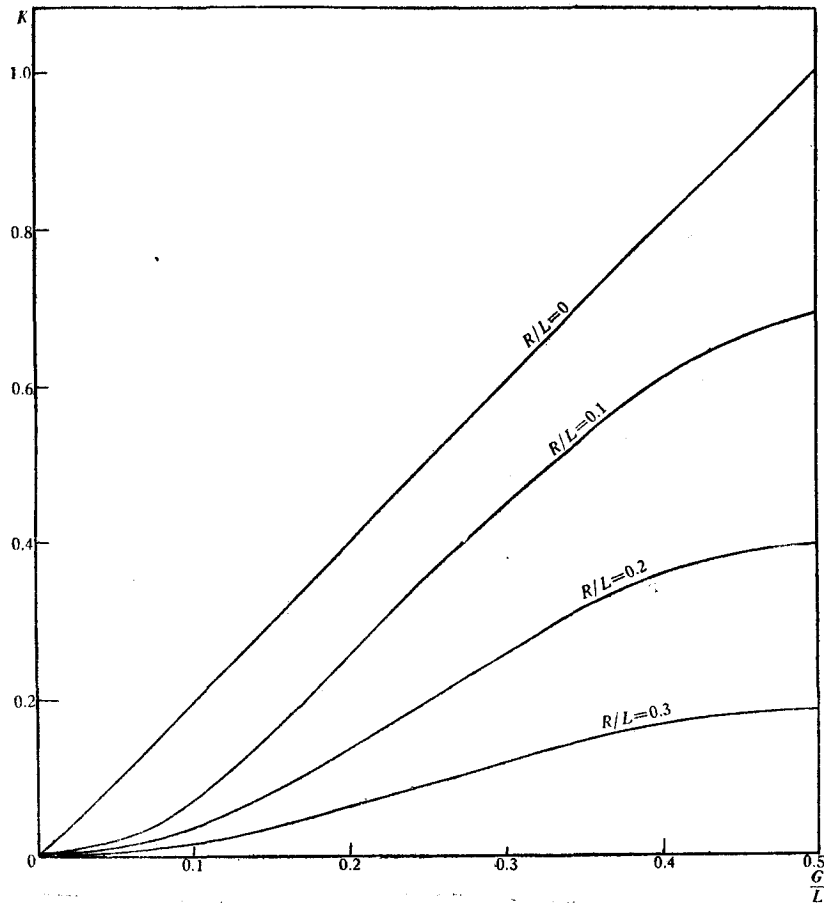


图 12. 表示选择磁铁几何形状, 磁极间隔及阴极屏蔽系数时所必须满足的条件的一组曲线, 在每一曲线的右下方为相应该曲线的允许区域, 左上方为禁用区域

此結果与 (4) 式相同, 即与假定軸上磁場分布为余弦函数所得的結果相同。这与 Buck<sup>[8]</sup> 的論述似乎有些出入。Buck 認為当  $\frac{G}{L} = \frac{1}{3}$  时, 軸上磁場分布应当近乎余弦函数。仔細檢查 (39) 式可知,  $R/L$  的值对  $\sum_l A_l$  的影响相当大。如果采取  $R/L = 0.1$ , 則当  $\frac{G}{L} = \frac{1}{3}$  时, 确实  $b \approx \frac{Q}{1-2K}$ , 如 Buck 所指出的, 可知 Buck 的論述适用于  $R/L = 0.1$  的情况。当  $K = 0$  时, 取各种不同的  $R/L$  值, 把 (39) 式按  $Q/b$  因  $G/L$  之比的变化画出如图 10 所示。取  $R/L = 0.1$  和各种不同的  $K$  值时, 把 (39) 式按  $Q/b$  因  $G/L$  之比的变化画出如图 11。

此外, 因为  $b$  值必須是正数, 于是 (39) 式要求

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_l \frac{1 - \cos lkG}{l^2 I_0^2(lkR)} > 2K. \quad (40)$$

換句話說, 在設計永久磁鉄周期聚焦电子束时, 必須选择磁鉄的几何形狀、磁极的相間距离及阴极屏蔽系数  $K$  使滿足 (40) 式。或是說当磁鉄几何形狀及周期固定后, 阴极处的磁場强度有一定的上限, 取各种不同的  $R/L$  值, 在图 12 中, 按 (40) 式画出一組曲綫, 在每一曲綫的右下方为相当于該曲綫的允許区域, 左上方为禁用区域, 应当避免选择  $G/L$  和  $K$  的值在禁用区域内。

### 参 考 文 献

- [1] Brewer, G. R., *J. Appl. Phys.* **25** (1954), 243.
- [2] Clogston, A. M. and Heffner, H., *J. Appl. Phys.* **25** (1954), 436.
- [3] Mendel, J. T., Quate, C. F. and Yocum, W. H., *Proc. IRE* **42** (1954), 800.
- [4] Chang, K. N., *Proc. IRE* **43** (1955), 62.
- [5] Mendel, J. T., *Proc. IRE* **43** (1955), 327.
- [6] Harker, K. J., *Trans. IRE Ed-2* (1955), 13.
- [7] Bevc, Palmer, and Süsskind, *J. Brit. IRE* **18** (1958), 696.
- [8] Buck, D. C., *Trans. IRE Ed-4* (1957), 44.
- [9] 何国柱, 中国科学, **7** (1958), 1247.
- [10] MacLachlan, *Theory and Applications of Mathieu Functions*, Oxford (1947).
- [11] Kleen, W. and Pösche, K., *Archiv. elektr. Übertr.* **9** (1955), 295; *Proc. IRE* **43** (1955), 1528.
- [12] Morse and Feshbach, *Method of Theoretical Physics*, Part 1, p. 530, McGraw-Hill (1953).
- [13] Siekanowicz, W. W. and Sterzer, F., *Proc. IRE* **44** (1956), 55.
- [14] Chang, K. N., *RCA Review* **16** (1955), 65.

## ELECTRON BEAM FOCUSING WITH PERIODIC MAGNET STRUCTURES

Ho Kuo-CHU

(*Nankai University*)

### ABSTRACT

The paraxial-ray equation for describing the electron trajectories in a periodic magnetic field has been solved by a perturbation method. Space charge effect is included. The cathode may be partially shielded. By this method, it is possible to obtain higher order approximate periodic solutions as well as the optimum focusing conditions. For strong scalloping, these higher order periodic solutions are needed.

The beam stability in a periodic magnetic field has been studied by a varying amplitude and phase method. Both the space charge effect and the effect of the finite flux at the cathode have been considered in the derivation of the stability criteria. Although in these new stability criteria, it does show that for cases where the cathode is completely shielded the space charge should have no effect on the location of the stability regions as pointed out by earlier authors, it is, however, not true for partially shielded cathode cases. A stability chart is plotted to show how the stability regions are shifted due to the space charge and the amount of flux at the cathode.

The perturbation method has also been applied to treat the problem for focusing electron beams in nonsinusoidal periodic magnetic fields. Both periodic solutions and the optimum focusing conditions have been obtained.