

双光子系统的波函数和偏振态*

汪 容

(中国科学院办公厅)

提 要

求出了双光子系统的所有的波函数,这些波函数所代表的态都有一定的角动量和宇称,并且有系统地分析了这些态中光子的偏振情况.指出了以前杨振宁、锡罗柯夫、夏比罗等的讨论中的缺点.

一. 引 言

中性介子或电子-阳电子组成的系统在衰变或湮没后可以转化为一对光子. 研究双光子系统的量子态的个数、偏振状况同双光子系统的宇称、角动量之间的关系,对于确定中性介子以及电子-阳电子系统的宇称和角动量有重要的意义. 这种研究对于其他可以转化为一对光子的基本粒子系统的物理性质的理解也可能有帮助. 朗道(Л. Д. Ландау)^[1]、杨振宁^[2]、锡罗柯夫(Ю. М. Широкоев)等^[3,4,5]曾经讨论过这个问题. 朗道只给出了在总角动量为 j 、 z 方向分角动量为 M 时量子态的个数,没有具体给出各态的偏振情况. 杨振宁和锡罗柯夫分别给出了一些波函数和偏振情况. 然而,杨振宁的讨论在开始的时候没有考虑光子的波色统计,而代之以考虑绕 x 轴转动 180° 的作用 R_x . 显然, R_x 和绕 z 轴转动的作用 R_z 并不是可对易的. 事实上,他所给的 ψ^{RM} 和 ψ^{LR} 两个态也不是 R_x 的本征态. 因此这一讨论是不完善的. 此外,杨振宁给出的偏振状况和锡罗柯夫等给出的结果不一致. 而锡罗柯夫等的关于偏振状况的讨论也是不充分的. 为了澄清这些问题,我们在本文中求出双光子系统的所有的具体波函数,并且逐一地分析它们的偏振状况.

二. 计算方法

我们采用动量空间表象,并且把双光子系统的波函数写成张量形式如 $\phi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 = x, y, z$, $\mathbf{k}_1, \alpha_1$ 和 $\mathbf{k}_2, \alpha_2$ 分别表示第一个光子和第二个光子的动量和偏振. 那么,这个张量必须满足以下的横波条件

$$\sum_{\alpha_1} (\mathbf{k}_1)_{\alpha_1} \phi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0,$$

$$\sum_{\alpha_2} (\mathbf{k}_2)_{\alpha_2} \phi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0$$

和玻色统计条件

$$\phi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \phi_{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1).$$

把坐标系转到质心系统, 则有 $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, 于是 $\phi_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ 可以改写成

* 1958年10月31日收到.

$(\alpha)k\Phi(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2)$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ 是 $\mathbf{k}$ 方向的单位向量。此时横波条件写成:

$$\sum_{\alpha_1} (n)_{\alpha_1} \Phi(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = \sum_{\alpha_2} (n)_{\alpha_2} \Phi(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = 0, \quad (1)$$

玻色条件写成:

$$\Phi(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = \Phi(-\mathbf{n}, \alpha_2 \alpha_1). \quad (2)$$

为了得到具有确定的总角动量 j , 确定的 z 方向分角动量 M 和确定宇称的波函数 $\phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2)$, 我们可以先把两光子的自旋角动量耦合, 然后再和轨道角动量耦合起来。

单个光子的自旋波函数 $\chi_{\sigma\mu}(\alpha)$ 是一个矢量。总自旋 $\sigma=1$, z 方向分量 $\mu=1, 0, -1$, $\alpha=x, y, z$ 。

$$\chi_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \chi_{1,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

把两个光子的自旋波函数用克勒柏许-戈登系数耦合起来, 就得到双光子系统的自旋波函数 $\omega_{s\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$, 它是一个二阶张量 ($\alpha_1, \alpha_2 = x, y, z$), 总角动量的值可以取 $s=2, 1, 0$, z 方向分量 $\mu=s, s-1, \dots, -s$ 。它们的具体形式如下。

1. $s=0$ 的态是对称态:

$$\omega_{0,0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3a)$$

2. $s=1$ 的态是反对称态:

$$\begin{aligned} \omega_{1,1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{1,-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3b)$$

3. $s=2$ 的态是对称的, 它的迹等于零:

$$\begin{aligned} \omega_{2,2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{2,1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{2,0} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \omega_{2,-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{2,-2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3c)$$

再和轨道总角动量为 l , z 方向分角动量为 m 的轨道波函数之中和立体角有关的部分 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 耦合起来, 就可以得到 $\Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2)$. $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 是球谐函数. 考虑到 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 的字称为 $(-1)^l$, 还考虑到角动量相加的规则和玻色条件, $\Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2)$ 应该有以下的几种组合:

1. 在 j 为偶数、字称为 $(+)$ 时, 必须 $l = \text{偶数}$, $s = 0, 2$.

$$\begin{aligned} \Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = & A Y_{jM}(\mathbf{n}) \omega_{0,0}(\alpha_1 \alpha_2) + B_{+2} \sum_{\mu} C_{jM}^{j+2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j+2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) + \\ & + B_0 \sum_{\mu} C_{jM}^{j, M-\mu; 2, \mu} Y_{j, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) + B_{-2} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j-2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2). \end{aligned} \quad (4)$$

2. 在 j 为偶数、字称为 $(-)$ 时, 必须 $l = \text{奇数}$, $s = 1$.

$$\begin{aligned} \Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = & A_{+} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-1, M-\mu; 1, \mu} Y_{j+1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2) + \\ & + A_{-} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-1, M-\mu; 1, \mu} Y_{j-1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2). \end{aligned} \quad (5)$$

3. 在 j 为奇数、字称为 $(+)$ 时, 必须 $l = \text{偶数}$, $s = 2$.

$$\begin{aligned} \Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = & B_{+} \sum_{\mu} C_{jM}^{j+1, M-\mu; 2, \mu} Y_{j+1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) + \\ & + B_{-} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-1, M-\mu; 2, \mu} Y_{j-1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2). \end{aligned} \quad (6)$$

4. 在 j 为奇数、字称为 $(-)$ 时, 必须 $l = \text{奇数}$, $s = 1$.

$$\Phi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha_1 \alpha_2) = \sum_{\mu} C_{jM}^{j, M-\mu; 1, \mu} Y_{j, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2), \quad (7)$$

其中 $C_{jM}^{l, M-\mu; s, \mu}$ 为克勒柏许-戈登系数.

(7) 不满足横波条件(1), 所以立刻知道, $j = \text{奇数的}(-)$ 宇称态不存在.

其余(4), (5), (6) 中的各个常数 A 和 B 都可根据横波条件(1) 求出来. 在计算中, 我们利用了如下的公式:

$$n_z Y_{lM} = \sqrt{\frac{l}{2l+1}} C_{lM}^{l-1, M; 1, 0} Y_{l-1, M} - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} C_{lM}^{l+1, M; 1, 0} Y_{l+1, M}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n_y Y_{lM} = & \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left[C_{lM}^{l-1, M+1; 1, -1} Y_{l-1, M+1} + C_{lM}^{l-1, M-1; 1, 1} Y_{l-1, M-1} \right] - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left[C_{lM}^{l+1, M+1; 1, -1} Y_{l+1, M+1} + C_{lM}^{l+1, M-1; 1, 1} Y_{l+1, M-1} \right] \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} n_x Y_{lM} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left[C_{lM}^{l-1, M+1; 1, -1} Y_{l-1, M+1} - C_{lM}^{l-1, M-1; 1, 1} Y_{l-1, M-1} \right] - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left[C_{lM}^{l+1, M+1; 1, -1} Y_{l+1, M+1} - C_{lM}^{l+1, M-1; 1, 1} Y_{l+1, M-1} \right] \right). \end{aligned} \quad (10)$$

三. 具有确定的 j, M 和宇称的波函数

利用横波条件(1)求出(4),(5),(6)中的系数后,我们就得到具有确定的 j, M 和宇称的归一化波函数如下表.

类别 j	甲 类 宇称(+)	乙 类 宇称(+)	丙 类 宇称(-)
$j=0$	$\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{0,0}(\mathbf{n}) \omega_{00}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu} C_{0,0}^{j+2, M-\mu; 2, \mu} Y_{2, -\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$	—	$\sum_{\mu} C_{0,0}^{j+1, M-\mu; 1, \mu} Y_{1, -\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$
$j=1$	—	—	—
$j=2n$	$\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{jM}(\mathbf{n}) \omega_{00}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j+2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j+2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) -$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{j(j+1)}{(2j-1)(2j+3)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j, M-\mu; 2, \mu} Y_{j, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(j-1)j}{(2j+1)(2j-1)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j-2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j-2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{j(j-1)}{(2j+1)(2j+3)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j+2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j+2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(j+2)(j-1)}{(2j-1)(2j+3)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j, M-\mu; 2, \mu} Y_{j, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j-1)}} \times$ $\times \sum_{\mu} C_{jM}^{j-2, M-\mu; 2, \mu} Y_{j-2, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$	$\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \sum_{\mu} C_{jM}^{j+1, M-\mu; 1, \mu} \times$ $\times Y_{j+1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2) -$ $-\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-1, M-\mu; 1, \mu} \times$ $\times Y_{j-1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{1\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$
$j=2n+1$	—	$\sqrt{\frac{j-1}{2j+1}} \sum_{\mu} C_{jM}^{j+1, M-\mu; 2, \mu} \times$ $\times Y_{j+1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2) +$ $+\sqrt{\frac{j+2}{2j+1}} \sum_{\mu} C_{jM}^{j-1, M-\mu; 2, \mu} \times$ $\times Y_{j-1, M-\mu}(\mathbf{n}) \omega_{2\mu}(\alpha_1 \alpha_2)$	—

$$M = j, j-1, \dots, -j$$

四. 討 論

1. 我們求出了所有的具有确定的 j, M 和宇称的归一化双光子系统波函数, 波函数的个数和朗道、錫罗柯夫的结果一致。

$j=1$ 的态不存在。

2. 和楊振宁得出的波函数相比較: 我們分別討論甲, 乙, 丙三类态的波函数, 并且注意到在 $\mathbf{n}$ 与 z 方向一致时, 所有的 $M \neq \mu$ 的 $Y_{l, M-\mu}(\mathbf{n})$ 都等于零, 波函数中只有 $\mu=M$ 的那些項不等于零。

(1) 甲类态的情况 在 $\mathbf{n}$ 取 z 方向时, 所有的 $|M|>2$ 的甲类态都 $=0$ 。把各个克勒柏許-戈登系数的数值代入后, 可以知道 $M=2, M=-2, M=1, M=-1$ 的甲类态在 $\mathbf{n}$ 取

z 方向时也都等于零。此时只有 $M=0$ 的甲类态取不等于零的張量值 $\frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

它对于繞 z 軸的旋轉是不变的, 所以楊振宁文中的 $\psi^{RB} + \psi^{LB}$ 相当于甲类态中这个 $M=0$ 的态。

(2) 乙类态的情况 在 $\mathbf{n}$ 取 z 方向时, 只有 $M=\pm 2$ 的乙类态分别取不等于零的張

量值 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。在繞 z 軸轉 φ 角时, 有

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2i\varphi},$$

和

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2i\varphi}.$$

所以楊振宁文中的 ψ^{RL} 和 ψ^{LR} 相当于乙类态中同一个 j 的 $M=\pm 2$ 的两个态。

(3) 丙类态在 $\mathbf{n}$ 取 z 方向时, 只有 $M=0$ 的态取不等于零的張量值

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

在繞 z 軸旋轉时, 这个張量不变。所以楊振宁文中的 $\psi^{RB} - \psi^{LB}$ 相当于丙类态中 $M=0$ 的态。

3. 和錫罗柯夫得出的波函数相比較: 利用 (8), (9), (10) 可以証明, 甲类态事实上等于如下的对称張量:

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} (\delta_{\alpha_1 \alpha_2} - n_{\alpha_1 \alpha_2}) Y_{jM} \quad (j=\text{偶数}).$$

丙类态可以写成如下的反对称張量:

$$-e_{\alpha_1 \alpha_2 \gamma} \frac{i}{\sqrt{2}} n_\gamma Y_{jM} \quad (j=\text{偶数}).$$

所以他給出的对称的 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_1}n_{\alpha_2})\psi_0$ 和反对称的 $e_{\alpha_1\alpha_2\gamma}n_\gamma\psi_1$ 在用 Y_{jM} (j = 偶数) 代替 ψ_0 和 ψ_1 后, 就成为角动量为 j, M 的字称 (+) 和宇称 (-) 的波函数 (前者只差一个负号, 后者只差一个常系数 $\frac{-i}{\sqrt{2}}$). 錫罗柯夫文中的跡等于 0 的对称張量則相当于乙类态. 但是他沒有給出具体的波函数.

4. 偏振状况

(1) 上面說过, 甲类态的波函数張量可以写成 $\frac{-1}{\sqrt{2}}(\delta_{\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_1}n_{\alpha_2})Y_{jM}$, 取一个旋轉变换, 使新的 z' 軸在 $\mathbf{n}$ 方向, 則由于 $n_{x'} = n_{y'} = 0$, $n_{z'} = 1$, 所以新的波函数張量呈

$\frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 形式. 这个張量在繞 z' 軸旋轉时不变, 無論 x', y' 取在什么方向, 甲类

波函数都是由如下两个平行态迭加而成:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

式中右方第一項是偏振方向都在 x' 方向的态, 第二項是偏振方向都在 y' 方向的态, 所以甲类态是偏振方向平行态.

(2) 丙类态的波函数張量在經過上述的旋轉后呈現 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 形式. 这从横

波条件和 $\omega_{1\mu}$ 的形式就可以看出. 这一張量在繞 z' 軸旋轉时也是不变的, 所以無論 x', y' 怎样取, 丙类波函数都是由两个光子偏振方向相互垂直的态迭加而成:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以丙类态是偏振方向相互垂直态.

(3) 乙类态比較复杂, 我們先考察 j 取定值的 $2j+1$ 个态的平均情况. 也就是說, 我們先討論始态中的基本粒子系統沒有极化的情况, $M = j, j-1, \dots, -j$ 的各个态的权数都相等. 由于問題的各向同性性, 因此在求平均时可以不失去普遍性地把 $\theta = 0$ 取在 $\mathbf{n}$ 方向. 討論 2 (2) 中曾指出, 这时候只有 $M = \pm 2$ 的两个态不等于 0.

$$M = +2 \text{ 时, 張量是 } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = -2 \text{ 时, 張量是 } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

若沿 x 和 y 方向来测偏振, 則等式右面第一个方括号中的表式代表平行态, 第二个方括号中的表式代表垂直态. 由此可見, 在 $M = +2$ 时, 平行态与垂直态出現几率的比例是 1:1.

又从本节 2 (2) 中的讨论可以看出, 这个比例与 x 轴, y 轴的方向无关。同理, 在 $M = -2$ 时, 平行态与垂直态出现几率的比例也是 1:1, 这个比例也与 x 轴和 y 轴所取的方向无关。所以总起来看, j 取定值时, 乙类态中平行偏振与垂直偏振的出现几率各占 50%, 而且由于问题的各向同性, 这个比例和测量仪器安排的方向无关。

把 (1), (2), (3) 的结果汇总在一起, 就得到下面的表。

	甲 宇称 +	乙 宇称 +	丙 宇称 -
$j=0$	//	—	⊥
$j=1$	—	—	—
$j=2n$	//	平均 $\begin{cases} // 50\% \\ \perp 50\% \end{cases}$	⊥
$j=2n+1$	—	平均 $\begin{cases} // 50\% \\ \perp 50\% \end{cases}$	—

如果对 $j=2n$ 的甲, 乙两部分取平均, 则偏振方向平行的几率大于 50%, 偏振方向相互垂直的几率小于 50%, 和杨振宁的结果相类似。

在这里并没有偏振不确定性。虽然绕 z 轴旋转时, $\begin{pmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ \pm i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中的平行部分可以变成垂直部分, 垂直部分可以变成平行部分 (例如在 $\varphi = 45^\circ$ 时), 但是前面说过, 整个的态只改变一个相角因子, 平行态和垂直态出现几率的比例是不变的。

夏比罗 (И. С. Шапиро) 在文献 [5] 中和锡罗柯夫在文献 [4] 中又认为乙类态是垂直态。理由是: 既然 $\sum_i \Phi_{ii} = 0$, 那么就会有 $\sum_i E_i E'_i = 0$ ($\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ 是两光子的电场) 和 $\sum_k a_k a'_k \Phi_{ij} = 0$, 所以两光子偏振互相垂直。但是, 沿 x 或 y 方向测偏振时, 只要 Φ_{xx} 或 Φ_{yy} 不等于 0, 就会得到偏振方向平行的结果, 完全不需要 $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$ 。因此, 在这一点上他们的结论是不对的。

5. 各向异性时的情况

假使在转化为光子以前, 一群基本粒子或基本粒子系统处在极化的情况下, 那末, 当放出光子的方向不同时, 测量偏振也可能得到不同的结果。假使终态是乙类态, 则根据乙类态的波函数, 可以算出在各个方向放出的光子的不同偏振态的几率。所得平行态与垂直态的比例在一般情况下不是 1:1, 而且这个比例要随着测量仪器绕光子动量方向转动而发生变化。

但是, 假使基本粒子转化为甲类态, 那么, 不论光子在什么方向放出, 它们的偏振方向一定是平行的。假使基本粒子转化为丙类态, 那么, 不论光子在什么方向放出, 它们的偏振一定是相互垂直的。

作者在进行这个工作时曾得到朱洪元先生的指导, 谨向他致谢。

参 考 文 献

- [1] Ландау Л. Д. О Моменте Системы из двух фотонов, *ДАН СССР*. 60 (1948), 207—209.
- [2] 楊振宁 Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons, *Phys. Rev* 77 (1950), 242—245.
- [3] Широков, Ю. М., Квантовая электродинамика в конфигурационном представлении, I, *ЖЭТФ* 24 (1953), 14—23.
- [4] Широков, Ю. М., Поправки, *ЖЭТФ* 26 (1954), 128.
- [5] Шапиро, И. С., Свойства симметрии в теории элементарных частиц и ядерных процессов, *УФН* 53 (1954), 7—68.

WAVE FUNCTIONS AND POLARIZATION STATES OF A TWO-PHOTON SYSTEM

WANG YUNG

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

All the wave function of a two-photon system with definite angular momentum and parity are found out, the polarization states of photons systematically analyzed. The imperfections in the discussions of Yang, Shirokov and Shapiro are also cleared away.