第15卷 第11期 物理学报 Vol. 15, No. 11
1959年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1959

論具有恒定通量的复杂非綫性网絡的試探解法*

虞厥邦
(成都电訊工程学院)

提 要

本文将网絡变换法推广于解任意复杂的具有恒定通量的非綫性网絡，在应用这种方法时，从网絡几何的观点上研究了寻求最佳解案的問題，并获得了一些初步結果.

在附录1中将王显荣建議的解法——克希荷夫方程法和本文介紹的网絡变换法作了一些比較. 在附录2中，研究了其中包含有可分出来的綫性网絡部份的非綫性网絡，得到了当这种网絡包含有任意多个非綫性元件时的解案.

§1 概 說

对于非綫性直流电路及磁路的計算，几年来做了比較多的工作[1—4]. 在这些工作中，已經成功地解决了包含六个非綫性元件的桥路的問題[1—4]；求解包含十个非綫性元件的全五角形网絡的問題[3]；对解包含十五个非綫性元件的全六角形网絡的原則上的考虑[3]；以及对任意复杂非綫性网絡的計算問題的初步探討[4]. 談到解題方法方面，Богатырев 很早就建議了节点电位解法[1]. 稍后，Бессонов 提出了非綫性等效电源的方法[2]；再后，Ионкин 建議了网絡变换法[3]1)；最近王显荣又建議了克希荷夫方程法[4]2).

按本文作者的意見，克希荷夫方程法只对結构較簡单的网絡才有簡便可行的优点(参看附录1)，对于較多数特别是結构較复杂的网絡，以利用网絡变换法为好. 关于网絡变换法，Ионкин 只把它应用到几个特殊的网絡上；作者将在本文中将网絡变换法推广及于任意复杂的网絡，并对寻求这种解題方法的最佳解案方面作一些初步的探索.

文末有两个附录. 如果讀者較詳細地研究过王显荣的論文，并对网絡变换法和他建議的方法之間的比較感到兴趣的話，可以参看附录1. 在那里还可以找到作者对他給出的一个确定試探通量个数的結果的修正. 在附录2中，作者将給出所謂“混合网絡”在一般情形下的解案. 所謂“混合网絡”是指这样的非綫性网絡，其中包含有可以分出的綫性

* 1959年6月16日收到.

1) 在研究非綫性网絡变换方面，国内也曾有人作过一些工作. 如前些时候，哈尔滨工业大学就有人研究过非綫性网絡的 Y-Δ 变换問題；如果这問題具有正面的解答，则复杂非綫性网絡的求解将得到很大程度的解决，但后来他們得到了反面的結果，即証明了这样的变换是不可能的.

2) 王显荣把他自己建議的方法称为突破試探图解法，但这突破試探的原則早已为 Бессонов 和 Ионкин 在他們提出的方法中分別运用过. 其实，王的工作的最大特点在于他是根据克希荷夫方程来找出突破支路的外特性曲綫以及定試探通量确值的，因此作者在这里称之为克希荷夫方程法.

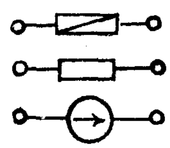
网絡部份，也包含有若干非綫性元件．这問題前几年曾引起一些研究者的兴趣，并在非綫性元件个数不多于 5 的情况下給出了解案或解案的討論，作者在那里将討論所包含的非綫性元件为任意多时的解案．

通过上述工作，作者希望能够将試探法解复杂非綫性网絡的問題发展到較完善的地步．

§2　若干定义及符号

I. 非綫性直流电路及磁路的抽象

不論是非綫性直流电路或磁路，它們都可以抽象为无源元件（既有非綫性的也有綫性的）和有源元件的組合．无源的非綫性元件，在直流电路为各种非綫性电阻、在磁路为各式強磁性材料［以非綫性的 $B(H)$ 曲綫为其特征］构成的磁路路径；无源的綫性元件在直流电路为各式綫性电阻，在磁路則为各式順、反磁性材料［以綫性的 $B(H)$ 曲綫为其特征］构成的磁路路径．有源元件在直流电路是电动势，在磁路則是磁动势（磁化力）．今后，我們将不画出具体的电路和磁路装置，而只研究由上述抽象元件組成的网絡．在作图时，采用下列符号：



表示非綫性无源元件；

表示綫性无源元件；

表示有源元件．

特別是为了簡化起見，将采用网絡拓扑的通常作法，把一有源元件和无源元件組成的支路用一根綫段来表示．

此外，我們把按給定的网絡結构和元件特性来計算磁通量（在磁路中）或电流（在电路中）的問題，統称为求通量分布的問題（注意电流可視为电流密度矢量的通量）．設我們仅限于研究其中通量不随时間改变（即恆定通量）的非綫性网絡．

II. 基本的网絡几何关系

設采用下列代号：

w——网絡的支路总数，

p——网絡的独立迴路数，

q——网絡的节点总数，

則有下列几何关系式存在：

$$w = p + q - 1. \tag{1}$$

III. “复杂网絡”和“簡单网絡”

在研究将試探法应用于复杂非綫性网絡的求解时，首先必須給所謂“复杂网絡”以定义．我們知道：如果一个非綫性网絡是由許多二端网絡按串并联的方式組成的，則它可以利用图解法直接求解而不一定要引入試探通量来求解[5]，这样的网絡我們称之为“簡单网絡”．与此相应，凡非綫性网絡不能利用二端网絡的串并联而直接图解时，則称为“复杂网絡”．

以下我們从网絡几何的观点来研究什么样的网絡是“复杂网絡”，什么样的网絡是“簡单网絡”.

那些不能用串并联手法而必須引入試探通量求解的网絡都是这样的一些网絡，即网絡中的节点可視为多面体的頂点，而网絡中的支路則是这多面体的稜边或对角綫. 例如图1所示的一个最簡单的多面体——三角稜錐形就是一个最簡单的“复杂网絡”，将这网絡的立体画法画成平面結构图，它就变成了一个大家熟悉的桥路或全四角形网絡. 如所周知，这样的网絡的确不能視为二端网絡的串并联而直接图解.

与此对应，如果网絡中的各节点不能視为多面体的頂点，則这网絡就是“簡单网絡”. 例如其节点总数不超过三个的（三点只决定一平面）网絡[图2(a)]；梭形网絡[图2(b)]；扇形网絡[图2(c)]；梯形网絡[图2(d)]；环鏈形网絡[图2(e)]等等.

不言而喻，一般說来，“簡单网絡”与“复杂网絡”的組合仍将是“复杂网絡”. 例如图3(a)所示网絡是由两个多面体（左边的是一个三角稜柱形，右边的是一个三角稜錐形）和一个梯形网絡构成的，它也还是一个“复杂网絡”.

由此可見，如果网絡的全部或一部分节点是多面体的頂点，則这网絡就是一个“复杂网絡”.

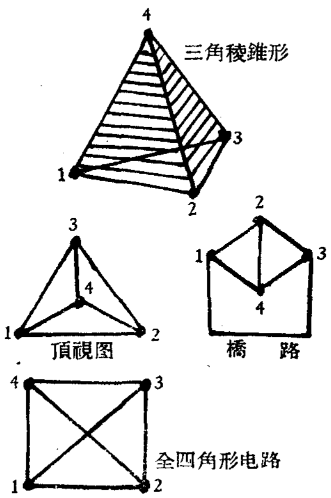


图 1

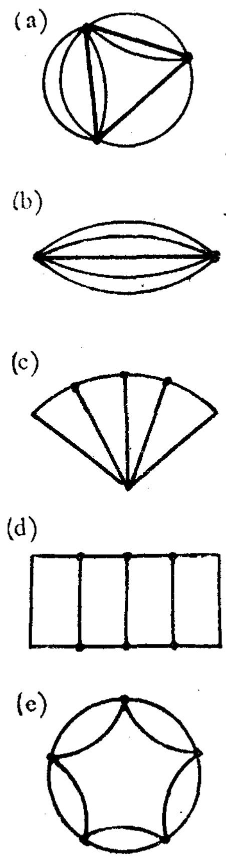


图 2

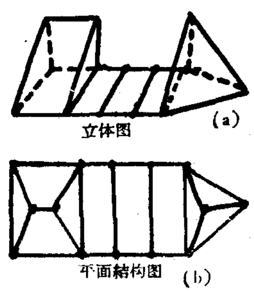


图 3

§3 网絡变换法解“复杂网絡”

如前所述，网絡变换法是由 Ионкин 提出的，但他只将它应用到全六角形为止的几个网絡. 我們現在将它推广而应用至任意复杂的网絡；并研究由于这种推广而引起的一系列問題，特別是研究在应用网絡变换法解“复杂网絡”时，如何去寻求最佳解案以及与此相关的如何确定解題时所需引用的試探通量个数的問題.

在这里，我們首先把 Ионкин 建議的网絡变换法本身（以下簡称为 Ионкин 变换法）作一个介紹，以便下面的研究和討論.

Ионкин 变换法的实質在于利用替代定理簡化网絡；利用它可将任意的“复杂网絡”

簡化为“簡单网絡”．在簡化的过程中，自然就引出了突破支路的外特性曲綫；求这外特性曲綫时，只需解“簡单网絡”，即只需进行一些支路的串并联图解运算．

在这种解题方法中，試探通量就是在突破支路中設定的，在設法由这支路的內特性、外特性曲綫的交点定出試探通量的确值以后，其余的解题步驟已为大家所熟悉，这里就不再介紹了．

在以下的研究中，假定所論及的“复杂网絡”都已經沒有可消迴路[6]（即可用支路并联手法而去除的迴路）．

現在让我們轉入介紹 Ионкин 变換法的細节．

Ионкин 变換法　設网絡中某节点 0 与网絡中其他节点有 j 条支路相接．利用在接在此节点的 j 条支路中，各串入适当的附加电(磁)动势的办法，总可以将第 j 条支路短接；此附加电(磁)动势的大小等于被短接支路中的电(磁)动势与該支路中非綫性元件上的电(磁)压的代数和．

現在簡略地談一談如何实現这样的变換．

設在网絡中抽出节点 0 来加以研究．这节点与网絡中其他的 j 个节点有 j 条支路相接［見图 4(a)］．为簡单計，在图上 $j=4$．第 j 条支路中原有电(磁)动势設为 E'，非綫性元件的特性曲綫設为 $U(I)$，各支路中的通量正方向如图所設．

利用替代定理（或不太确切地称为补偿定理），将非綫性元件 $U(I)$ 用一个电（磁）动势 $E''(I)$ 去代替，这个电（磁）动势除了和通量 I 有关而外，与綫性网絡不同，它还是一个通量的非綫性函数．将支路中原来的电(磁)动势 E' 減去这个电(磁)动势 $E''(I)$ 而得到一个电(磁)动势 $E(I)$，其方向設是由 j 指向 0．然后，在与节点 0 相接的所有支路都同时串入一电（磁）动势 $E(I)$，其方向要保証与第 j 条支路中經过代数求和而得出的电(磁)动势相反［見图 4(b)］．例如在現在情况下，串入的电(磁)动势都离开节点 0；虽然串入了这些个电(磁)动势，但考察一下就可以看出：这时作用在网絡中任一迴路的电(磁)动势的总和，与未串入这些电(磁)动势之前是一样的，这就不会影响到网絡中的通量分布；因而这种作法是完全被容許的．現在来研究第 j 条支路，由于串入了与支路电(磁)动势 $E(I)$ 相等而相

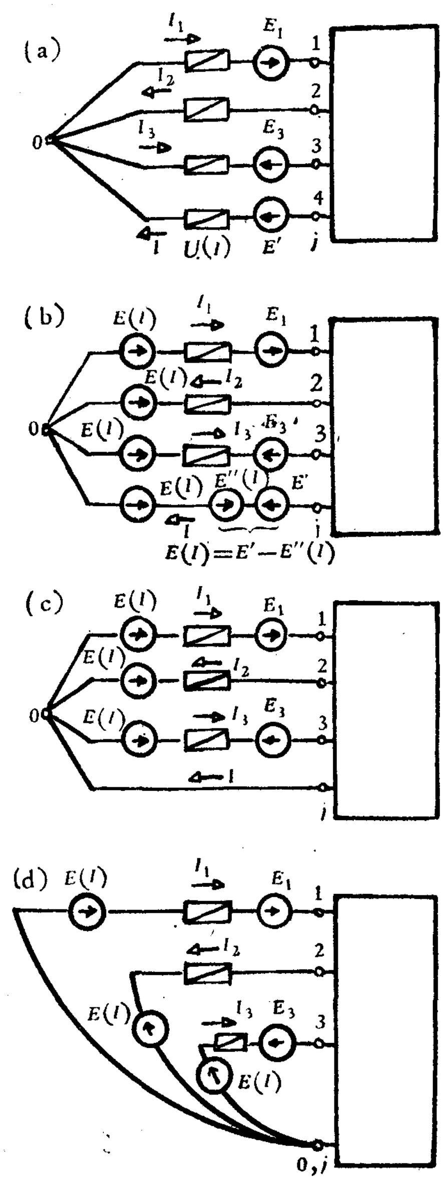


图 4

反的电(磁)动势. 所以这时支路两端的电(磁)位差将变为零,因此可以用一根理想导綫将 0 点和 j 点連接起来;将 j 支路中所有的电(磁)动势都拿开,就得到如图 4(c)所示的网絡. 由图 4(c)可見,經过上述变换以后,网絡中的支路数目就減少了一个,与此同时,网絡的节点数目也就减少了一个. 将 0, j 間的这条理想导綫縮短成一点,这一論述就更为明显了[参看图 4(d)];由图 4(d)还知道,經过这样的变换,$0j$ 支路以及其中的通量是不会在变换后的网絡中出现的.

我們暂时假定,經过一次这样的变换,原来的“复杂网絡”就可以簡化为“簡单网絡”了. 这样,变换后的网絡就可視为二端网絡的串并联而直接图解了.

但是,在这种变换中,需要知道串入的附加电(磁)动势才能求出变换后的网絡中的通量分布,而这附加电(磁)动势又是要知道被短接支路中的通量才求得出来的;不用說,在网絡分析問題中,一般是不会事先就知道任一支路的通量大小的. 因此,只好在这被短接支路中假定一个通量的試探值,根据它算出附加的电(磁)动势之值,以便对变换后的网絡求解. 至于所假定的試探通量值(暂值)是否正确,需要另行設法判断——这就提出了定試探通量的确值的問題.

为了求定試探通量的确值,在被短接支路中,設定了試探通量的某一暂值,由这支路两端的(根据克希荷夫第二定律)电(磁)压方程

$$E(I) = E' - E''(I) = E' - U(I) \tag{2}$$

計算出附加电(磁)动势的某一相应数值 E_1[由式(2)可見:就数值而言,这附加的电(磁)动势其实是等于被短接支路的端电(磁)压的],根据 E_1 值在变换后的网絡[图 4(d)]計算通量分布,然后注意到,在原来的网絡中[图 5(a)],对于节点 0 来講,被短接支路的通量与(在变换后的网絡中計算出来的)接在 0 点的其余支路的通量应該滿足克希荷夫第一定律:

$$I = \sum_{k=1}^{j-1} I_k. \tag{3}$$

列式时注意,如果 I 是流入节点 0 的通量,則式右应視为流出节点 0 的通量的代数和,即流出 0 的通量取正,流入 0 的通量取負. 如果 I 是流出节点 0 的通量,則式右应視为流入节点 0 的通量的代数和,即流入 0 的通量取正,流出 0 的通量取負.

根据对节点 0 的通量方程(3)算出的被短接支路的通量 I 是在附加电(磁)动势取暂值 E_1 的时候得到的,我們記它为 I_{E_1}. I_{E_1} 和最初設定的被短接支路的通量的試探值一般是不一样的,因此不能認为 I_{E_1} 就是問題的解. 为了求定被短接支路通量的确值,必須給它一系列的試探值以及由式(2)算出相应的附加电(磁)动势之值 $E_2, E_3, E_4, \cdots$,并重复上述的計算,得到由通量方程(3)所定出的通量值 $I_{E_2}, I_{E_3}, I_{E_4}, \cdots$,由这些对应点列画出曲綫 $I_{外}(E)$,这就是由通量方程决定的、所謂被短接支路的外特性曲綫(我們前已声明:被短接支路不出現在变换后的网絡中,这曲綫是在沒有被短接支路的参加下計算出来的,故而是外特性曲綫). 将它和电(磁)压方程(2)所决定的所謂被短接支路的內特性曲綫(它只和所論支路的有源元件和无源元件的特性有关)$I_{內}(E)$ 画在同一坐标平面上,求其交点;由这交点即可定出被短接支路中的通量的确值以及其端电(磁)压或附加的电(磁)动势的确值来.

由于必須根据在节点 0 列出的通量方程来定被短接支路的确值，我們規定称 0 点为定值节点.

由上定出附加电(磁)动势的确值后，回到变换后的网絡［图 4 (d)］，其余支路通量的确值自然就很容易决定出来了.

以上是假定一个"复杂网絡"在設定一个試探通量、短接了一条支路后就可以蜕化为"簡单网絡"了. 显然，一般說来，这一点不一定办得到，可能要进行好几次类似的变换，短接好几条支路才能将一个"复杂网絡"化成"簡单网絡". 每进行一次这样的变换，短接一条支路，就要引入一个試探通量；因此，如果要短接 x 条支路才能将一个"复杂网絡"化为"簡单网絡"，那么，解这"复杂网絡"时就要引入 x 个試探通量.

以下将轉入研究如何确定試探通量个数 x，以及与此相关的寻求最佳解案的問題.

在把一个"复杂网絡"借助于短接其中支路而化为"簡单网絡"的过程中，由于被短接支路是可以任意选定的，因此解案就不是唯一的. 例如图 5 (a) 的"复杂网絡"(这是一个三角稜柱形的平面結构图) 通过图 5 (b) 或图 5 (c) 的方式都可以化成簡单网絡 (前法化为一扇形网絡，后法化为一环鏈形网絡).

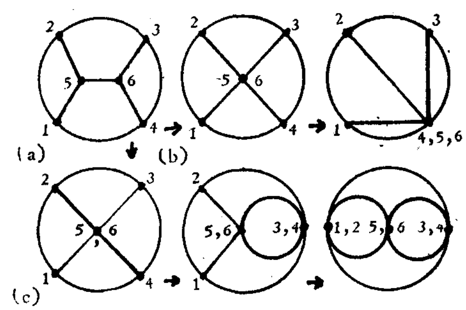


图 5

从这个例子可以看出，如果采用图 5(b) 的簡化方式，只要短接两条支路 56、46，引入两个試探通量；而采用图 5 (c) 的簡化方式，則要短接三条支路 56、34、12，引入三个試探通量. 由于引入的試探通量个数愈多，計算愈繁复(参看后例)，因此，图 5(b) 的解案优于图 5(c) 的解案.

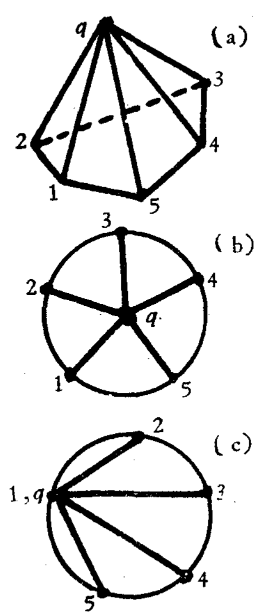


图 6

一般說来，将一个"复杂网絡"簡化为一个"簡单网絡"，解案总不是唯一的，但存在着一个最佳解案；利用这个解案时，解題所需引入的試探通量个数为最少.

不可能在这里把所有形式的"复杂网絡"的最佳解案都給出来. 下面我們只研究几个原始类型的"复杂网絡"的最佳解案. 常見的"复杂网絡"或許是它們的演化，或許是它們的組合.

I. 簡单 $q-1$ 稜錐形网絡

网絡的节点总数为 q［图 6 (a)］，則底的边数为 $q-1$，这底是一个沒有对角綫的多角形. 我們称这网絡为簡单的稜錐形网絡，它的平面結构图如图 6 (b) 所示.

如果选择这稜錐形的任一稜边 $1q$ 作为短接支路，那么短接一条支路就可以把这稜錐形化为"簡单网絡"，如图 6 (c) 的一个 q 射扇形网絡.

如果选择稜錐形的一条底边作为短接支路，則网絡蜕化为 $q-2$ 簡单稜錐形，这仍是一个"复杂网絡". 由此，引入了一个試探通量，仍未解决問題，所以这样作是不妥当的.

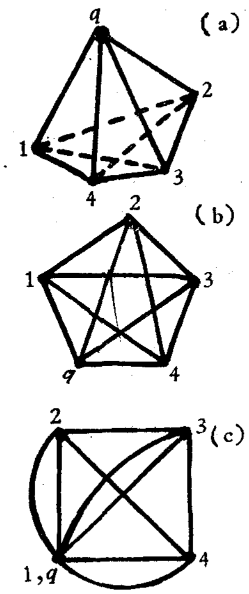


图 7

由此，对簡单稜錐形网絡，应只短接其任一稜边而将它化为扇形网絡，这时

$$x = 1 \qquad [\text{对簡单稜錐形}]. \tag{4}$$

II. 全 $q-1$ 稜錐形网絡

与前不同［見图 7(a)］，这稜錐形的底是一个全 $q-1$ 多角形，将它展为平面图形［見图 7(b)］，显而易見，这就是全 q 角形网絡，它是在解非綫性网絡問題中常常遇見的（参看附录 2）．这种网絡的各支路都处于对等的位置，短接哪一条都是完全一样的．当短接一条支路后，网絡的节点就減少了一个而变成全 $q-1$ 角形网絡［見图 7(c)］．継續进行这样的变換，一直到网絡只剩下三个节点时才变成簡单网絡，明显地，这时必須引入的試探通量个数为

$$x = q - 3 \qquad [\text{对全 } q-1 \text{ 稜錐形}]. \tag{5}$$

III. 簡单的 $q/2$ 稜柱形网絡

这是由两个 $q/2$ 角形作底而构成的稜柱形，它有 $q/2$ 个稜边；这稜柱体的各个面和两个底的頂点間都沒有对角綫［参看图 8(a)］，我們称它为簡单的稜柱形，它的平面結构图如图 8(b)所示．这类“复杂网絡”最快而又最清楚的簡化方案是将各稜边短接而成，如图 8(c)所示的 $q/2$ 环鏈形网絡．唯一的例外是最簡单的三角稜柱形［图 8(d)］．这种网絡在短接了一个稜边以后［見图 8(e)］，再短接一个底边就可以化为如图 8(f) 所示的扇形网絡；这样作只須引入两个試探通量，而将三个稜边短接为三节环鏈形网絡則須引入三个試探通量．当然，按前法作較佳［大家还可以再看图 5(b) 和 (c) 的两种方案］．綜上所述可知：

$$\begin{cases} x = \dfrac{q}{2} & \\ & [\text{对簡单}\,\dfrac{q}{2}\,\text{稜柱形}] \\ x = 2. & \end{cases} \qquad \begin{matrix} \dfrac{q}{2} \geqslant 4 \\ \dfrac{q}{2} = 3 \end{matrix} \tag{6}$$

以上只研究了一些最簡单的“复杂网絡”的原始类型．实用上可能会碰到結构更复杂一些的网絡，在研究它們的解案时，总要注意到用这解案解所有网絡能“最快”地，即只需引入最少数目的試探通量就可以化到“簡单网絡”． 以下提供一些供参考用的意見．

对一般的稜錐形或稜柱形网絡，常常是短接其稜边較短接其底边为有利．举例說，一个如图 9(a) 所示的稜錐形网絡（它的底有两条对角綫，已經不是前述的簡单稜錐形），短接底边仍不如短接稜边有利；这时当然仍要注意最佳解案的寻求，如图，短接稜边

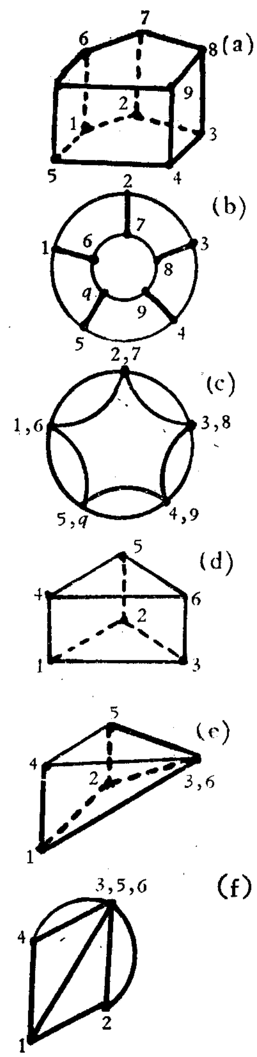


图 8

16 显然是最好的，这时只需引入一个試探通量就可以得到如图 9(b) 所示的扇形网絡. 短接其他稜边会引入多于 1 个的試探通量.

由这例子还可以看出一条选择短接支路的原则，除了应短接稜边外，还应該在各稜边中选择那些稜边来短接，这稜边的两端的頂点連有最多数目的支路，或者說，应选择連有最多支路的节点作为定值节点. 例如本例底的頂点一共有五条支路相連，較其他頂点所連支路数为多，选它为定值节点較好.

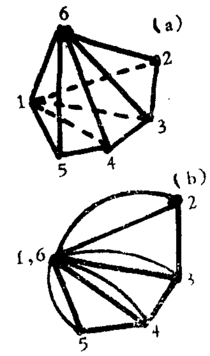


图 9

在确定由一些原始的"复杂网絡"和"簡单网絡"組成的"复杂网絡"的解案以及計算所需引入的試探通量数时，要掌握这样的原則，即只需要将那些原始的"复杂网絡"部分化簡，至于"簡单网絡"部分則不用去管它，即勿須在这部分中短接支路. 例如图 3(b) 的网絡，在知道了它是一个梯形网絡和两个原始的"复杂网絡"組成[图 3(a)]，只需化簡左边的三角稜柱形并引入两个試探通量，化簡右边的三角稜錐形并引入一个試探通量. 經过这样的化簡后，原网絡即可化为"簡单网絡"，由此可知，必需引入的試探通量总数为 $x = 3$.

例 I：解全四角形网絡

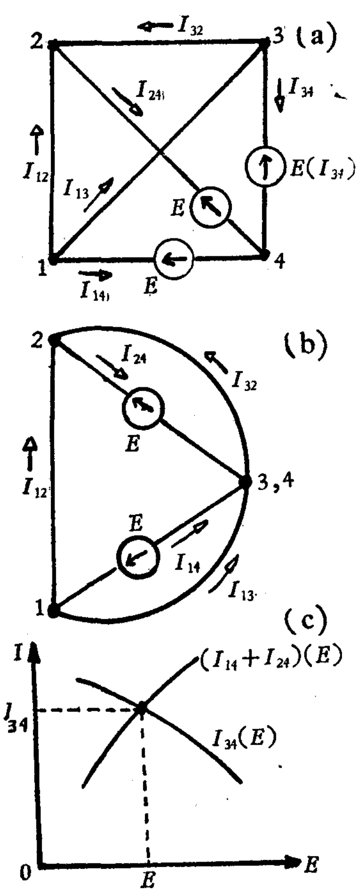


图 10

由式 (5) 計算出 $x = q - 3 = 4 - 3 = 1$. 原网絡短接 1 条支路（我們选为支路 34），减少一个节点（选定值节点为 4）就可化为"簡单网絡". 計我們在图上設定通量正方向.

在与定值节点 4 連接的各支路都串入一附加的电(磁)动势 $E(I_{34})$，它的大小等于支路 34 中原来的电(磁)动势和非綫性元件上电(磁)压的代数和，其方向則能保証节点 3、4 在此串入的附加电（磁）动势加进来以后电(磁)位相等[图 10(a)]. 在这图中，为簡单計(以下的例子也一样)，各支路都只用一根綫段表示，而画出的仅是必須引入的附加电(磁)动势. 此后，将节点 3、4 短接并縮为一点，于是就得到了如图 10(b) 所示的网絡，它只剩 3 个节点，可視为二端网的串并联而求解. 計我們先决定被短接支路的通量. 为此，給 I_{34} 以不同的数值，由式(2)算出相应的附加电(磁)动势 E，根据各 E 值对变换后的网絡求解，算出一系列的 I_{12}, I_{23}, I_{14}, I_{24}, I_{13} 等. 据此，由式(3)算出$(I_{14} + I_{24})(E)$，将这外特性曲綫和由式(2)决定的內特性曲綫 $I_{34}(E)$ 画在同一坐标平面上，求其交点[图 10(c)]，由交点即可讀出所求通量 I_{34} 和附加电(磁)动势的确值. 附加电(磁)动势 E 的确值找到以后，回到图 10(b) 的网絡，其余支路通量 I_{12}, I_{14}, I_{23}, I_{24} 的确值就不难求出来了.

例 II：解全五角形网絡 [图 11(a)]

首先观察到网络的节点数 $q=5$，由式 (5) 算出必須引入的試探通量个数 $x=5-3=2$. 因此，知道了必須在网絡中減少两个节点，选取它們为节点 2 和 5. 必須在网絡中短接两条支路，选取它們为支路 23, 45. 在网絡中設定各支路通量的正方向如图 11(a) 所示. 在与定值节点 2 相接的各支路 21, 23, 24, 25, 各引入附加电 (磁) 动势 $E_1(I_{23})$; 在与定值节点 5 相接的各支路 51, 52, 53, 54, 各引入附加的电 (磁) 动势 $E_2(I_{54})$; 然后将支路 23, 54 分别短接而得到如图 11 (b) 所示的网絡. 这网絡可視为各支路的串并联而求解.

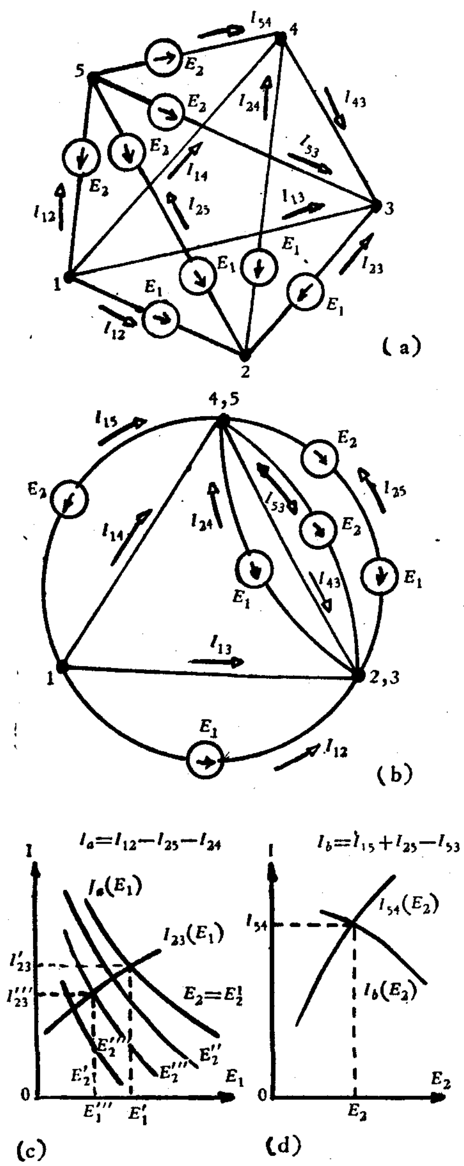


图 11

由于这时有两个試探通量，求解的手續稍为繁一些. 这时，必須以一个試探通量如 I_{54} 以及其相应的附加电 (磁) 动势作为参变量; 設它們为某一数值，例如 I'_{54}, E'_2, 以另一个試探通量 I_{23} 或其相应的附加电(磁)动势 E_1 作为自变量，对变换后的网絡 (b) 根据参变量的值 E'_2 求解，由电流方程描出支路 23 的外特性曲綫 $I'_a(E_1)$, 此处 $I'_a=I'_{12}-I'_{25}-I'_{24}$; 将它和由电压方程 (2) 描出的內特性曲綫 $I_{23}(E_1)$ 画在同一坐标平面上 [图 11(c)], 求得在 I'_{54}, E'_2 下的解答 E'_1, I'_{23}; 此后，根据 E'_1 的值，再回到图 11(b) 网絡求解其余的通量值，这样就会得到一个与 I'_{54}, E'_2, E'_1 对应的值 $I'_b=I'_{15}+I'_{25}-I'_{53}$; 給参变量 I_{54}, E_2 一系列的值 $I''_{54}, I'''_{54}, \cdots; E''_2, E'''_2\cdots$, 仿照上述步驟求解 [图 11(a)], 就可以得到一系列对应的 $I''_b=I''_{15}+I''_{25}-I''_{53}$, $I'''_b=I'''_{15}+I'''_{25}-I'''_{53}, \cdots$. 据此就可以作出支路 54 的外特性曲綫 $I_b(E_2)$ 了. 将它和由电压方程 (2) 决定的內特性曲綫 $I_{54}(E_2)$ 画在同一坐标平面上[图 11(d)], 求其交点，这就定出了 E_2, I_{54} 的确值. 有了 E_2 和 I_{54} 的确值，就可以在图 11 (c) 的曲綫族上內插而得到 E_1, I_{23} 的第一近似值; 再取这第一近似值附近的几个 E_1, I_{23} 的暫值，按 E_2 的确值作出支路 23 的外特性曲綫，再与其內特性曲綫相交就可定出 E_1, I_{23} 的确值了. E_1, E_2 的确值既已找到，回到图 11(b) 的网絡，其余支路的通量自然就很容易地求出来了.

由本例可以知道：当网絡中引入的試探通量个数愈多，解題愈繁.

附 录 1

網絡变换法和克希荷夫方程法的比較

我們在这里将这两种解"复杂网絡"的方法在两个方面来作一个比較.

首先在解"复杂网絡"时所需引入的最少試探通量个数方面进行比較.

王显荣的論文中給出了一个結果，卽利用克希荷夫方程法求解"复杂网絡"时所需引入的試探通量个数为 x',

$$x' = p - 2, \tag{7}$$

但这不是一个普遍的結果. 举例說，如果用克希荷夫方程法解全五角形网絡，则这时对各节点列出的通量方程都同时包含四条支路的通量，突破支路的通量要由其他三条支路的通量来表示；要把这三个通量表为突破支路两端的电（磁）压以作出突破支路的外特性曲綫，必須利用到三个由克希荷夫第二定律列出的电（磁）压方程. 这时剩下未利用到的 $p-3$ 个电（磁）压方程就是检驗方程，由此可知（由于检驗方程数和試探通量个数必須相等），必須引入的試探通量个数为 $p-3$. 由这討論推广可知：在一般情形下，由克希荷夫方程法解"复杂网絡"时，如果是利用对某一节点列出的通量方程作为出发点来求突破支路的外特性曲綫的，那么解这"复杂网絡"所需引入的試探通量个数 x' 和連在这节点上的支路数目 c 是有关系的，而且有下列关系式存在：

$$x' = p - (c-1) = p - c + 1. \tag{8}$$

王显荣之所以得到 $x' = p - 2$ 的結果是因为他研究的几个特殊网絡（一个是該文[4]图 13 的网絡，卽三角稜錐形，另一个是該文图 20 的网絡卽三角稜柱形）恰好都有 $c = 3$.

由此可見，一般說来，利用克希荷夫方程法解"复杂网絡"，解案也不是唯一的；所需引入的試探通量个数，与选择由哪一个节点（我們約定称这节点为起始节点）列出的通量方程出发来求突破支路的外特性曲綫有关. 因为不同的节点，可能会連有不同数目的支路，卽不同的值 c. 如果希望解題时所引入的試探通量个数为最少，那么就应該从网絡中选择連有最多数目支路的节点作为起始节点.

現在我們就几种原始类型的"复杂网絡"就两种方法所需的最少試探通量个数方面进行比較：

I. 簡单的 $q-1$ 稜錐形　在克希荷夫方程法中，如果选稜錐形上端頂点（其上連有最多的支路）作为起始节点，任一稜边作为突破支路，则因有 $c = q - 1$，由式 (1) 及 (8)，并注意在簡单稜柱形中的几何关系 $w = 2q - 2 = 2(q-1)$ [参看图 6(b)]，可以得到 $x' = 1$；而由网絡变换法也有 $x = 1$. 因此，就簡单稜柱形而言，两种方法所需要的最少試探通量个数是一样的，都只需要一个.

II. 全 $q-1$ 稜錐形　由于各节点这时处于对等的地位，在克希荷夫方程法中，选择哪一个节点作为起始节点都是一样的. 这时 $c = q - 1$，由式(1)及(8)，并注意这种网絡的几何关系：$w = \dfrac{q}{2}(q-1)$ [参看图 7(b)]，可求得 $x' = \dfrac{q(q-5)}{2} + 3$；而在网絡变换法中，由式(5)知 $x = q - 3$. 由 x' 及 x 的式子比較可知：仅当 $q = 4$ 时才有 $x = x'$（这

时二者都为 1)，当 $q \geqslant 4$，则恆有 $x' > x$，并且随着节点数 q 的增加，差值 $x' - x = [q(q-7)+12]/2$ 愈来愈大．因此，对解全 $q-1$ 稜錐形网絡来講网絡变换法所需試探通量个数常較克希荷夫方程法所需者为少．

III. 簡单的 $q/2$ 稜柱形　在克希荷夫方程法中，由于网絡各节点处于对等的地位，且有 $c=3$，由式 (1) 及 (8)，并注意这时的几何关系 $w = \frac{q}{2} + q$ [参看图 8(b)]，解得 $x' = (q-2)/2$．将它和式 (6) 比較可知：只当 $\frac{q}{2} = 3$ 时才有 $x = x'$，当 $\frac{q}{2} > 3$，则恆有 $x' = x - 1$．因此，对解簡单的 $\frac{q}{2}$ 稜柱形网絡来說，网絡变换法所需的試探通量数比克希荷夫方程法所需者多 1 ($\frac{q}{2} = 3$ 时除外，这时二者所需的試探通量个数都等于 2)．

以上对几种“复杂网絡”的原始类型进行了比較．在由这些原始类型演化或与“簡单网絡”組合成的“复杂网絡”，则一般說来，x' 常較 x 大．举例說，图 9(a) 的网絡 $x=1$ 而 $x'=3$，图 3(b) 的网絡 $x=3$ 而 $x'=8$；就稜柱形网絡来說，如各柱面出現了对角綫，x 不会因此增加，但 x' 可能就会增加．

由此可知，对結构較复杂的“复杂网絡”来講，利用网絡变换法解題所需引入的最少試探通量个数 x 常較克希荷夫方程法解題所需引入的最少試探通量个数 x' 为少．由于試探通量个数愈多，解題愈繁，因此，就这方面看来，网絡变换法較克希荷夫方程法为优．

其次，我們在求出突破支路的外特性曲綫的便捷与否这一点上来对两个方法作一比較．

对网絡变换法来講，試探通量是在突破支路內設定的．为了求出突破支路的外特性曲綫，需要对由原网絡化成的“簡单网絡”进行串并联运算；换言之，需要对除突破支路以外的所有支路元件进行其特性曲綫的加减、平移、翻轉等运算(所以除突破支路以外，是由于突破支路就是被短接支路，它是不出現在变换后的“簡单网絡”中的)；而每对应于試探通量暫值的一次改变，这种运算手續都得重复一次．对克希荷夫方程法来講，試探通量是在突破支路以外假定的．为了求得突破支路的外特性曲綫，只利用了一部分电 (磁) 压方程，因而并不需要将网絡中各元件的特性曲綫都拿来作加減、平移、翻轉等运算，只需将与上述几个电 (磁) 压方程相关連的元件的特性曲綫拿来作这样的运算卽已足够．不难看出：用来确定突破支路外特性曲綫的通量方程中包含的通量个数也就是起始节点上所連的支路数愈少，那么参加上述运算的曲綫数也就愈少．从这方面来看，克希荷夫方程法較网絡变换法簡便些．而且为了更快地求出突破支路的外特性曲綫，使参加上述运算的曲綫減少，应在网絡中选择連有最少支路数的节点作为起始节点．

但是，在克希荷夫方程法中，突破支路的外特性曲綫的易于求得并不意味着試探通量的确值能很便捷地求得．因为将求得的外特性曲綫与突破支路的內特性曲綫求交点，求定一个突破支路通量的值，并借此利用通量方程等确定其余所有支路的通量及其端压后，还需要用未利用过的电(磁)压方程来检驗，如检驗結果不对，则再重复上述計算．在此要注意到：在网絡变换法中，这种检驗的手續是完全不需要的．因为在把网絡变换的过程中，自然而然地用到了(除定值节点上的通量方程外)所有的通量和电(磁)压方程(所有各

支路的串并联运算自然是在克希荷夫两定律列出的方程的基础上来进行的)．这又是网絡变換法簡便的地方．应該指出：刚才提到的，为了利用最少数目的曲綫来求出突破支路的外特性曲綫，应选連有最少支路数 c 的节点为定値节点，但这种作法未必是有利的．因为自式(8)可知，c 愈小，則用克希荷夫方程法解題必須利用的試探通量个数 x' 就愈大，亦即(与 x' 相等的)检驗方程数愈多，这自然会使解題更为麻煩．举解簡单的 $q-1$ 稜錐形网絡为例［参看图 6(a)］，如选某稜边为突破支路，并选底的任一頂点为起始节点，則利用四条支路元件的特性曲綫就足够求出突破支路的外特性曲綫了；但这时試探通量(也就是检驗方程个数)自式(8)将为(由于 $c=3$ 而 $p=q-1$) $x'=q-3$．如果选这稜錐形的上端頂点为起始节点，則虽然为求出突破支路的外特性曲綫，而必須用到的支路元件特性曲綫数目大大增加．但如本节的 I 所指出的，这时会有 $x'=1$，亦即是試探通量和检驗方程只有一个，这就使检驗的手續大大地簡化了．在这例子中，可以看出：求突破支路的外特性曲綫的便利和检驗手續的便利二者是互相矛盾的．那么：究竟是选較少的支路元件特性曲綫来参加运算(小的 c)好还是取較少的試探通量个数(大的 c)好？依作者个人的意見：宁可用較多的支路元件特性曲綫来参加运算，以求出突破支路的外特性曲綫而保証較少数的試探通量．因为試探通量多了，要在这許多的試探通量的暫值的許多組可能的組合中，利用为数众多的检驗方程逐一选出一組确値来，毕竟是一件較难的事；用較多的曲綫来参加运算以得出突破支路的外特性曲綫虽然麻煩，但毕竟是比較稳妥(由于易于检驗)的方法，反而可以較快地得出所希望的結果来．因此，作者的意見是在試探法解題时，应尽量設法減少試探通量个数．如前所述，克希荷夫方程法所能达到的最少試探通量个数常較网絡变換法者为多，而在結构較复杂的网絡尤其如是．因此，作者个人的意見如下：克希荷夫方程法似以在解較簡单的"复杂网絡"(如簡单稜柱形网絡)时引用才較适宜；至于网絡变換法，則无論对結构較簡单或是較复杂的"复杂网絡"应用都是适宜的，特别在結构較复杂的"复杂网絡"，网絡变換法似能給出較好的結果．

当然，这只是个人不成熟的意見．作者不准备把这一点过于肯定，希望大家提出批評、討論和指正．

附　录　2

包含有任意多非綫性元件的"混合网絡"的解案

所謂"混合网絡"，指的一个其中既包含有非綫性元件，也可以在其中分出綫性网絡部分的非綫性网絡．很早就出現了基于迭加定理之上的"取出电动势法"来研究这种网絡[7]，并且有了正确的結論：即当这样的网絡中包含的非綫性元件不多于三个时，网絡可視为二端网的串并联而直接图解，而包含的非綫性元件在四个以上时，网絡一般就必須用試探法求解[1,8]．但是，沒有对这結論給予充分的証明．此外，当非綫性元件在四个以上时，应用"取出电动势法"会得到什么样的結果？这样的网絡是否在任何情况下都要用試探法来解？这些問題至今还未得到令人滿意的結果．作者准备在一个普遍情形下的研究来提供上述問題的答案，这个普遍情形就是"混合网絡"中含有任意多(n)个非綫性元件时的情形．

研究一个含有 n 个非綫性元件的"混合网絡". 将这 n 个非綫性元件自网絡中分出来,这时除此 n 个非綫性元件以外的网絡一般地将是一个綫性的自发 $2n$ 端网絡［图 12 (a)］. 由于这部分网絡是綫性的(迭加定理有效),因此可以应用"取出电动势法",将它变成一个綫性的非自发 $2n$ 端网絡［或称为此自发网絡的"体"(тело)］和取出的 n 个电动势的組合［图 12 (b)］[9]. 对于綫性的非自发 $2n$ 端网絡,如所周知[10],它具有的独立参数数目是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个,要选取它的最簡单的、具有最少支路数目的代换网絡,莫过于一个所謂全 n 稜錐形网絡了［图 12 (c)］,因为它的支路数目恰好是 $\frac{1}{2}n(n+1)$. 将图 12(b) 的网絡用代換网絡置換,并将立体的网絡画法改为平面的画法,这样网絡就变得是如图 12 (d) 所示的样子;消去图 12 (d) 网絡中的可消迴路,将会得到一个如图 12(e)所示的全 $n+1$ 角形网絡. 在这图中,为簡单計,只包含有綫性元件的支路以虛綫来表示,而包含有非綫性元件及电动势的支路則以实綫画出. 由图 12(e) 可見,这个网絡是由两部分組成的:一部分是綫性的非自发全 n 角形网絡(虛綫),另一部分是非綫性的自发 n 射星形网絡(实綫). 这时得出的网絡可否化为二端网的串并联而求解?假如我們能够将图 12(e) 中的綫性的非自发全 n 角形网絡的这一部分变换成綫性的非自发 n 射星形网絡,那么图 12(e) 网絡将可进一步变换到如图 4 (f) 所示的样子. 对于如图 4 (f) 所示的梭形网絡,可以用二端网的串并联的手法来直接求解,因为这时网絡中只有两个节点 0 和 0′,所以不必引入試探通量来解.

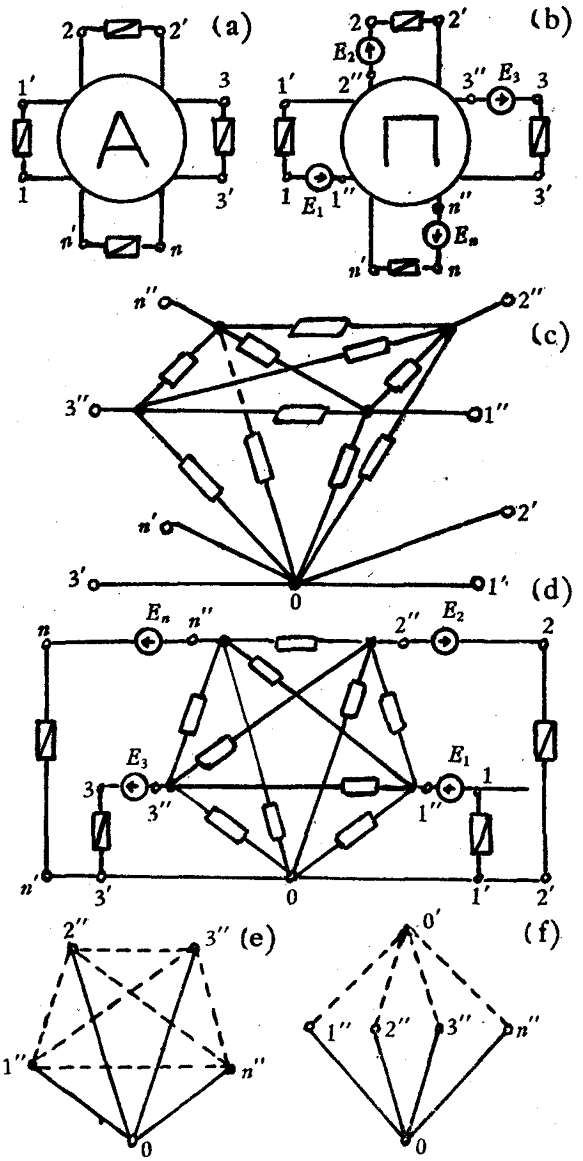


图 12

經过上面的討論,我們得出如下結論:

(1) 对于一个旣包含有綫性部分,又包含有 n 个非綫性元件的"混合网絡",利用"取出电动势法",我們总可以将它变换为一个全 $n+1$ 角形网

絡来求解，这个网絡是一个綫性的非自发全 n 角形网絡和一个非綫性的自发 n 射星形网絡的組合；

（2）如果上述全 $n+1$ 角形网絡中，綫性的非自发全 n 角形网絡的这一部分可以变換为一个綫性的非自发 n 射星形网絡，那么整个网絡就可以視为二端网的串并联而直接求解，毋須用試探法求解这网絡；

（3）但已經知道[11]：綫性的非自发全 n 角形网絡到 n 射星形网絡的变換，当 $n \geqslant 4$ 时，由于星形网絡的支路数 n 将少于角形网絡的支路数 $\frac{1}{2}n(n-1)$，这样的变換一般是不能实现的；而当 $n=3$，星形网絡的支路数恰好等于角形网絡的支路数，因而可以完成这种变換（这是熟知的 $Y-\triangle$ 变換）.

因此，这就充分地証明了：将"取出电动势法"应用于这样的网絡时，当非綫性元件数目 $n \leqslant 3$，网絡可以化为二端网的串并联而直接求解；而当非綫性元件数 $n \geqslant 4$，网絡一般是不能化为二端网的串并联来求解的；这时，必須用本文介紹的試探法来求解；

（4）但是，又已經知道，綫性的非自发全 n 角形网絡到 n 射星形网絡的变換，并非在任何情况下都是不可能的. 当满足一定的条件[11,12,13]时[1]，可以完成这种变換. 因此，不能認为在任何情况下，当网絡中包含的非綫性元件数 $n \geqslant 4$ 时，一定要引入試探通量来求解；只能說：由于所述条件一般是很难满足的，因此，网絡中非綫性元件数 $n \geqslant 4$ 时一般要用試探法来解.

本文承林为干教授提了許多宝貴意見，謹此致謝. 还感謝物理学报編委会对本文初稿的中肯的指正. 在这些指正的启示下，作者得以对不成熟的初稿作了一些較重大的更动.

参　考　文　献

[1] Богатырев, О. М., *Электричество* **2** (1954), 57.
[2] Бессонов, Л. А., *Электричество* **12** (1955), 39.
[3] Ионкин, П. А., *Электричество* **12** (1956), 21.
[4] 王显荣，物理学报，**15** (1959), 123.
[5] Нейман, Л. Р., Калантаров, П. Л., Теоретические основы электротехники, Часть I, гл. 6, §35.
[6] Зелях, Э. В., Основы общей теории линейных электрических схем, 1.5.1, 1951.
[7] Ионкин, П. А., *Электричество* **8** (1953).
[8] 同 [5], §38, §39.
[9] 同 [6], 4.3.
[10] 同 [6], 5.2.
[11] 同 [6], 3.6.3.
[12] Новиков, А. П., *Электричество* **10** (1946), 59.
[13] Горев, А. А. и Костенко, М. В., *Электричество* **3** (1948), 40.

1）我們省掉了这些条件的敍述，因为大家很容易在指定的文献中查到.

ON THE "CUT AND TRY" METHOD FOR SOLVING THE COMPLICATE NON-LINEAR NETWORK WITH CONSTANT FLUX

YU CHUEI-PANG

(*Chengtu Institute of Radio Engineering*)

ABSTRACT

The recent advances of the "cut and try" method for solving the complicate non-linear network with constant flux are reviewed in the present paper.

The network-transform method suggested by P. A. Ionkin[3] (who has solved some special non-linear networks by means of this method) is extended and applied to non-linear network however complicated.

Some researches for optimum solving-plan when using this method is discussed in detail.

In Appendix 1, the comparison of the network-transform method and the Kirchhoff's equations-method suggested by Wang* is given.

In Appendix 2, the application of superposition theorem to a "mixed network" (containing not only non-linear elements but also the portion constructed by linear elements) is considered in a general case, where the network contains any number of non-linear elements.

* Wan Shiang-Yawng, *Acta Physica Sinica*, **15**, No. 3, March 1959, p. 130.