第15卷 第11期　　物 理 学 报　　Vol. 15, No. 11
1959年11月　　ACTA PHYSICA SINACA　　Nov., 1959

色散关系的簡单証明*

張 宗 燧

(中国科学院数学研究所)

提　　要

在此短文中，我們給色散关系一个簡单的但不严格的証明．証明的方法为将因果振幅对中間态展开，分别研究能量分母及相应的分子的解析性．能量分母的解析性是較显然的．至于分子的解析性的証明，我們先研究 μ^2 換为 $-\mathbf{p}^2$ 时的相应量（μ 为介子質量，$\mathbf{p}$ 为核子在 Breit 坐标系中的动量，介子核子散射为我們所考虑的具体对象），研究其解析性，通过一个变数的变換而达到我們証明的目的．在此方法中，$\mathbf{p}^2$ 可以大至 $M^2-\mu^2$，M 为核子質量．

我們也考虑了在位場散射中相位移 $\eta(k)$ 的解析开拓問題，証明了如果位能在 $r\to\infty$ 处形如 $e^{-\alpha r}(\alpha>0)$，則 $\eta(k)$ 可以开拓至 $|\mathrm{Im}k|<\frac{1}{2}\alpha$ 的区域．

1. 引　　言

色散关系的証明見于許多文献，但显然地在討論質量不为零的粒子的被散射或光子的非向前散射时，只有一个較好的証明，为 Боголюбов[1] 所給的．为說明此点起見，让我們討論核子对 π 介子散射的情形．如果我們取 Breit 坐标系，費曼振幅及因果振幅都取

$$\int e^{i\omega x_0-i(\mathbf{e}\mathbf{x})(\omega^2-\mu^2-\mathbf{p}^2)^{1/2}}G(\mathbf{x},x_0,\mathbf{p})d^4x \tag{1}$$

的形式，式中 ω,μ 代表介子的能量及質量，$\mathbf{p}$ 代表核子散射前的动量，而 $\mathbf{e}$ 代表介子在散射前后动量和的方向．Боголюбов 正确地指出：当 ω 被开拓（指解析开拓）至上半平面时，

$$|\mathrm{Im}(\omega^2-\mu^2-p^2)^{1/2}|>\mathrm{Im}\,\omega, \tag{2}$$

因而即使推迟因果振幅中的 $G(x)$ 滿足由定义及因果律而来的关系

$$G(\mathbf{x},x_0,\mathbf{p})=0 \qquad (\text{在 } |\mathbf{x}|>x_0 \text{ 时或 } x_0<0 \text{ 时}), \tag{3}$$

我們也不能一定获得收斂的(1)式．因此作为 ω 的函数的(1)式不一定是解析的．

Боголюбов 的方法是将上式中的 μ^2 換为一个新变数 τ，先討論 $\tau<-\mathbf{p}^2$ 时的情形．該时色散关系是成立的，即

$$\mathfrak{M}(\omega,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{M_r(\omega',\tau)-M_a(\omega',\tau)}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad (\omega\text{ 在上半平面中}), \tag{4}$$

式中 M_r 为推迟因果振幅；M_a 为超前因果振幅；而 $\mathfrak{M}(\omega)$ 为在 ω 平面中自 M_r, M_a 进行解析开拓而获得的复变数函数．上式中的 M_r-M_a 即 $2i$ 乘上 M_r 的吸收部分 A．Боголюбов 自 $\tau<-\mathbf{p}^2$ 的(4)式出发，对 τ 进行解析开拓，获得了 $\tau=\mu^2$ 的(4)式．在此証明中，必

*1959年9月7日收到．

須首先証明 $A(\omega,\tau)$ 为二部分之和，一为 $F_1(2\omega\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau,\tau)$（$M$ 为核子质量），在 $2\omega\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+\tau$ 为实数时 F_1 对它的第二个变数 τ 解析，直至 $\tau=\mu^2$ 点；另一部份为 $F_2(\tau-2\omega\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2},\tau)$，在 $\tau-2\omega\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}$ 为实数时，F_2 对它的第二个变数解析，直至 $\tau=\mu^2$ 点．但这些性質不是 A 所明显具有的．因为 A 也是由一个类似(1)式的式子所給出，而由这一类式子，我們看不出 A 何以可能具有上述的性質．虽然 Боголюбов 給了一个关于 A 的上述的性質的証明，但自此不易看出 A 所以对 τ 解析的物理原因．Bremermann[2] 等也曾作了一个类似的討論，但也有同样的缺点．

因此，給 $\tau=\mu^2$ 的(4)式一个新的証明还是有意义的．

在本文中，我們企图給一个簡单的証明．这个証明是极不严格的，它只是企图說明 $\tau=\mu^2$ 的(4)式大概是可靠的．在这样的証明中，对于 $\mathbf{p}^2$ 的大小的限制也有了削弱，詳情見下节．

此外，我們附带地討論了在位場中散射的相位差 $\eta_l(k)$ 的解析开拓問題，証明了如果位能 V 在无穷远处形如 $e^{-\alpha r}(\alpha>0)$，那末 $\eta(k)$ 可以自实軸开拓至

$$|\mathrm{Im}k|<\alpha/2 \tag{5}$$

的区域．

2. 場論中色散关系的証明

討論介子为核子所散射的問題．令 q,q',p,p' 为介子核子在散射前后的动量能量矢量．取 Breit 坐标系，得 S 矩陣元

$$S_{p'q',pq}=\delta_{\mathbf{q}'\mathbf{q}}\,\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}+\frac{i}{2\pi(q_0q_0')^{1/2}}\,\delta(q'+p'-q-p)f,$$

$$f=2\pi^2 i\int d^4x\,e^{i\omega x_0-i(\mathbf{e}\mathbf{x})(\omega^2-\mu^2-\mathbf{p}^2)^{1/2}}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\,Tj_{\rho'}\left(\frac{x}{2}\right)j_\rho\left(-\frac{x}{2}\right)\right|\mathbf{p}s\right\rangle, \tag{6}$$

式中

$$\begin{gathered}p=(\mathbf{p},E_p),\quad p'=(-\mathbf{p},E_p),\quad E_p=+(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2},\\ \mathbf{q}=-\mathbf{p}+(\omega^2-\mu^2-\mathbf{p}^2)^{1/2}\mathbf{e},\quad \mathbf{q}'=\mathbf{p}+(\omega^2-\mu^2-\mathbf{p}^2)^{1/2}\mathbf{e},\\ \mathbf{e}=(\mathbf{q}+\mathbf{q}')/|\mathbf{q}+\mathbf{q}'|\qquad q_0=q_0'=\omega,\end{gathered} \tag{7}$$

T 为时間排列算符，ρ,ρ' 为介子在同位旋空間中的极化指标，s,s' 为核子除动量外的其他指标．在上式的积分的被积項中，应加入一項，形式为二个同时的算符的对易子，因此与色散关系的成立无关，所以不再写出．推迟及超前振幅分别为

$$\begin{aligned}M_{r,a}(\omega)=2\pi^2 i\int d^4x\,\frac{1}{2}(\pm 1+\mathrm{sgn}\,x_0)\,e^{i\omega x_0-i(\mathbf{e}\mathbf{x})(\omega^2-\mu^2-\mathbf{p}^2)^{1/2}}\times\\ \times\left\langle\mathbf{p}'s'\left|\left[j_{\rho'}\left(\frac{x}{2}\right),j_\rho\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right|\mathbf{p}s\right\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

引入

$$j(x)=e^{ipx}j(0)e^{-ipx}\qquad(px=p_0x_0-\mathbf{p}\mathbf{x}), \tag{9}$$

而又假定对于中間态

$$1=\sum_n\int d\mathbf{p}_n\,\frac{1}{(2\pi)^3}\,(|\mathbf{p}_nM_n\rangle\langle M_n\mathbf{p}_n|)$$

（式中 M_n 代表中間态的質量，Σ_n 可以换为 $\int dn$），得

$$M_r = 2\pi^2 i \sum_n \frac{-1}{i\omega + iE_p - i(p_n^+)_0 - \epsilon} \langle \mathbf{p}'s' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}^+ M_n \rangle \times \langle M_n \mathbf{p}^+ | j_\rho(0) | \mathbf{p}s \rangle +$$
$$+ 2\pi^2 i \sum_n \frac{1}{i\omega - iE_p + i(p_n^-)_0 - \epsilon} \langle \mathbf{p}'s' | j_\rho(0) | \mathbf{p}^- M_n \rangle \times \langle M_n \mathbf{p}^- | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}s \rangle, \quad (10)$$

$$\mathbf{p}^\pm = \pm \mathbf{e}(\omega^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2},$$
$$(p_n^\pm)_0 = \{M_n^2 + (\mathbf{p}^\pm)^2\}^{1/2}.$$

在通常理論中，(9)式是在較后一阶段引入的，但是既然迟早必須引入，不妨在目前立即引入。

現在我們試証明 (10) 式右方是 ω 的一个在上半平面解析函数 $\mathfrak{M}(\omega)$ 在 ω 趋近于实軸时所取的值。先假定含有 j 字样的因子都是解析的，这一点的証明見后。假設 $M_n^2 - \mathbf{p}^2 - \mu^2 > 0$，亦即 $M^2 - \mathbf{p}^2 - \mu^2 > 0$. 討論复变数 ω 的函数

$$\frac{1}{\omega \pm E_p \mp \{M_n^2 + (\mathbf{p}^\pm)^2\}^{1/2}} = \frac{1}{\omega \pm E_p \mp (M_n^2 + \omega^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}}. \quad (11)$$

在引入适当的剖綫后，上式成为 ω 的一个在上半平面单值解析函数。可以看出，在剖綫引入后，我們对于在上半平面的 ω 有

$$\mathrm{Im}(M_n^2 + \omega^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2} < \mathrm{Im}\,\omega$$

式，因此当 ω 趋近于 $\omega_r + i\epsilon$ 时 (ω_r 为一实数)，(11)式趋近于

$$\frac{1}{\omega_r \pm E_p \mp (M_n^2 + \omega_r^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2} + i\epsilon}.$$

因此，(10)式中二个分数都是 ω 在上半平面的解析函数在 ω 趋近于实軸时的值。

現在让我們来証明(10)式中含有 j 字样的項也是 ω 的某一些在上半平面解析函数在实軸上的值，而这是最主要的一点。为此，让我們援用 Боголюбов 的方法，将(8)式中的 μ^2 换为 $-\mathbf{p}^2$. 此时(8)式所給出的 M_r 确是 ω 的某一个在上半平面解析函数在 ω 趋近于实軸时所取的值。称此函数为 $\mathfrak{M}'(\omega)$，得

$$\lim_{\omega\to\omega_r+i\epsilon} \mathfrak{M}'(\omega) = 2\pi^2 i \sum_n \frac{-1}{i\omega_r + iE_p - i(p_{nr}^{+\prime})_0 - \epsilon} \langle \mathbf{p}'s' | j_{\rho'}(0) | p_r^{+\prime} M_n \rangle \times$$
$$\times \langle M_n \mathbf{p}_r^{+\prime} | j_\rho(0) | \mathbf{p}s \rangle + \cdots, \quad (12)$$
$$p_r^{\pm\prime} = \pm \mathbf{e}\omega_r, \quad (p_{nr}^{\pm\prime})_0 = \{M_n^2 + (p_r^{\pm\prime})^2\}^{1/2}.$$

与以前一样，不难看出(12)式中二个分数

$$1/\{i\omega_r \pm iE_p \mp i(M_n^2 + \omega_r^2)^{1/2} - \epsilon\}$$

乃是在上半平面解析函数(在引入剖綫后)

$$1/\{i\omega \pm iE_p \mp i(M_n^2 + \omega^2)^{1/2}\}$$

在 $\omega \to \omega_r + i\epsilon$ 时所取的值。因此，可以想象

$$\langle \mathbf{p}' s' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}_r^{+\prime} M_n \rangle \langle M_n \mathbf{p}_r^{+\prime} | j_\rho(0) | \mathbf{p}\, s \rangle \quad (13)$$

(及其他类似項)也是 ω 的一个在上半平面解析函数 $G(\omega)$ 在 $\omega \to \omega_r + i\epsilon$ 时所取的值。

引入变换 $\omega \to \omega_0$,

$$\omega = \{\omega_0^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2\}^{1/2}, \quad (14)$$

而在 ω_0 平面中引入自 $+(\mu^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$ 至 $+\infty$，$-(\mu^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$ 至 $-\infty$ 的二条剖綫，使 $\mathrm{Im}\,\omega$ 与 $\mathrm{Im}\,\omega_0$ 取同一符号．将 $G(\omega)$ 视为 ω_0 的函数，得 $G_0(\omega_0)$．这样，我們便得了 ω_0 的一个在上半平面中的解析函数(因为当 ω_0 在上半平面中，ω 也如此)．不难看出，$G_0(\omega)$ 便是 ω 的一个在上半平面解析的而当 ω 趋近于实軸时趋近于(10)式的

$$\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho'}(0)|\mathbf{p}^+M_n\rangle\langle \mathbf{p}^+M_n|j_\rho(0)|\mathbf{p}s\rangle \tag{15}$$

的函数．当然，(10)式最初只是在 $\omega>+(\mu^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}$ 情形下定义的，現在我們补上 M_r 在实軸上其他点的值，使以上所述——即 M_r 为 $G_0(\omega)$ 在略高于实軸上点的值——完全成立．这个补充显然是不违背寻常的交叉对称的．这样，我們証明了(10)式右方中含有 i 字样的項都是 ω 的某些在上半平面中的解析函数在略高于实軸上的点的值．如此便証明了(10)式右方可以解析开拓至上半平面中．

必須指出：这个証明是远不够理想的．第一，由(12)式右方可以解析开拓至上半平面的一点認为(13)式也如此，是极不够严格的．其次，必須引入自 $(M^2-\mathbf{p}^2-\mu^2)^{1/2}i$ 自 ∞i 的剖綫，也是不够理想的．可以看出：$\mathfrak{M}'(\omega)$ 在剖綫左右的不連續性不能通过对 n 的积分而全部消去，因为对 n 的积分或取和中，有一項是分立的(相当于中間态为一个核子)．$\mathfrak{M}(\omega)$ 也有同样情形，因此这个缺点看来不是这个証明所独有的．

可以假定，含有 i 字样的項在剖綫左右取如此的值，使 $\mathfrak{M}'(\omega)$ 在全部剖綫上是連續的 [因而使 $\mathfrak{M}'(\omega)$ 在 ω 的上半平面全部解析]，但这样的假定不能同时使 $\mathfrak{M}(\omega)$ 在全部剖綫上連續．

如果我們要求不严格，那末以上可以認为已經証明了 M_r 可以解析开拓至上半平面，由而获得

$$\mathfrak{M}(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_r(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad (\omega\text{ 在上半平面中}). \tag{16}$$

現在我們設法由此导出

$$\mathfrak{M}(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_r(\omega')-M_a(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad (\omega\text{ 在上半平面中}). \tag{17}$$

証明是簡单的．首先証明(17)式对于 $\omega=\omega_1+i\epsilon$ 点成立 (ω_1 为实数)．自(16)式，得

$$\mathfrak{M}(\omega_1+i\epsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{M_r(\omega')}{\omega'-\omega_1-i\epsilon}d\omega',$$

亦即

$$\mathfrak{M}(\omega_1+i\epsilon)=\frac{1}{\pi i}\int P\frac{M_r(\omega')}{\omega'-\omega_1}d\omega'. \tag{18}$$

取上式双方的自厄及反自厄部分．一个矩陣 G 的自厄部分定义为 $\frac{1}{2}(G+G^+)$，以 G^H 代表，反自厄部分定义为 $(1/2i)(G-G^+)$，以 G^A 代表．取(18)式双方的自厄、反自厄部分后，得

$$\mathfrak{M}^H(\omega_1+i\epsilon)=\frac{1}{\pi}\int P\frac{M_r^A(\omega')}{\omega'-\omega_1}d\omega',$$

$$\mathfrak{M}^A(\omega_1+i\epsilon)=-\frac{1}{\pi}\int P\frac{M_r^H(\omega')}{\omega'-\omega_1}d\omega'. \tag{19}$$

因此

$$\mathfrak{M}(\omega_1 + i\epsilon) = \mathfrak{M}^H(\omega_1 + i\epsilon) + i\mathfrak{M}^A(\omega_1 + i\epsilon)$$
$$\doteq iM_r^A(\omega_1) + \frac{1}{\pi}\int P\frac{M_r^A(\omega')}{\omega' - \omega_1}d\omega' = \frac{1}{\pi}\int\frac{M_r^A(\omega')}{\omega' - \omega - \epsilon i}d\omega'. \tag{20}$$

但我們知道 M_r 的自厄部分卽是它的耗散部分 D，它的反自厄部分卽是它的吸收部分 A，亦卽

$$M_r^A(\omega) = A(\omega) = \frac{1}{2i}(M_r - M_a). \tag{21}$$

(这一点可以直接自 M_r, D, A 的类如(8)式的式子直接証实，利用 $j_\rho, j_{\rho'}$ 为自軛算符或互軛算符的事实；另一証明見文献[1])因此我們得

$$\mathfrak{M}(\omega_1 + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{M_r(\omega') - M_a(\omega')}{\omega' - \omega_1 - \epsilon i}d\omega'. \tag{22}$$

这証明了(17)式对于略高于实軸上的点是成立的.

定义 $H(\omega)$ 为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_r(\omega') - M_a(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega' \qquad (\omega\text{ 在上半平面中}). \tag{23}$$

如果不要求严格，那末我們可以認为上述积分定义了一个在上半平面解析的函数 $H(\omega)$. 因 $H(\omega)$, $\mathfrak{M}(\omega)$ 均在上半平面解析，而对所有的实数 ω_1, $H(\omega_1 + i\epsilon) = \mathfrak{M}(\omega_1 + i\epsilon)$，所以 $H(\omega) = \mathfrak{M}(\omega)$，亦卽 $\mathfrak{M}(\omega)$ 滿足(17)式.

在这个証明中，我們不需要假定自 $M_r(\omega)$ 开拓至上半平面而得的某函数与自 $M_a(\omega)$ 开拓至下半平面而得的某另一函数在实軸某一段上重合. 因为不需要这个重合，便不产生由此而来的对于 $\mathbf{p}^2$ 値的限制. 因此，在这里的理論中，$\mathbf{p}^2$ 的唯一限制是(11)式前所提起的

$$\mathbf{p}^2 < M^2 - \mu^2. \tag{24}$$

以上給出了色散关系(17)式的一个証明. 証明是远不够严格的，但它是簡单的，对 $\mathbf{p}^2$ 値的限制是較寬的，而且可以应用至任何坐标系統而不产生新的困难.

3. 位場中散射时相位移的解析开拓問題

最后，我們討論位場散射中相位移的解析开拓問題. 利用散射的形式理論，自动量 $\mathbf{p}$ 至动量 $\mathbf{p}'$ 的散射振幅为

$$(\phi_{\mathbf{p}'}, V\psi_{\mathbf{p}}^+), \tag{25}$$

式中 V 为位場，$\phi_{\mathbf{p}'}$ 为动量为 $\mathbf{p}'$ 的自由波，$\psi_{\mathbf{p}}^+$ 为带有入射波 $\phi_{\mathbf{p}}$ 及外射波(outgoing waves)的波函数. 以

$$\phi_{\mathbf{p}} - \frac{1}{H - \mathbf{p}^2 - i\epsilon}V\phi_{\mathbf{p}}$$

代替 $\psi_{\mathbf{p}}^+$，又以

$$\frac{1}{H_0 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon} - \frac{1}{H_0 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon}V\frac{1}{H_0 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon} + \cdots$$

代替 $(H - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)^{-1}$，获得以下的散射振幅：

$$(\phi_{\mathbf{p}'}, V\phi_{\mathbf{p}}) - (\phi_{\mathbf{p}'}, V\frac{1}{H_0 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon} V\phi_{\mathbf{p}}) + \cdots. \tag{26}$$

在討論相位移 $\eta_l(k)$ 时,我們考慮以下的微分方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - V\right)\psi = 0.$$

因此,应用形式理論,得所欲研究的量

$$(\phi_k, V\phi_k) - \left(\phi_k, V\frac{1}{H_0 - k^2 - i\epsilon} V\phi_k\right) - \cdots, \tag{27}$$

式中

$$H_0 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \qquad \phi_k = j_{l+\frac{1}{2}}(kr).$$

不妨将 k 訉为复数,而討論复变数 k 的函数

$$(\phi_k, V\phi_k) - \left(\phi_k, V\frac{1}{H_0 - k^2} V\phi_k\right) - \cdots. \tag{28}$$

于是,至少在形式上,(26)为(28)式在 k 自上半平面趋近于正实軸时所取的值. 問題是:当 k 在上半平面中时(28)式是否解析.

显然,如果 $V(r)$ 在 $r \to \infty$ 时形如 $e^{-\alpha r}(\alpha > 0)$,那末当

$$|\mathrm{Im}k| < \frac{1}{2}\alpha \tag{29}$$

时,$(\phi_k, V\phi_k)$ 是解析的. 为了討論(28)第二項及其他項起見,我們只消以

$$j_{l+\frac{1}{2}}(kx)h_{l+\frac{1}{2}}(ky) \qquad x < y$$

或

$$j_{l+\frac{1}{2}}(ky)h_{l+\frac{1}{2}}(kx) \qquad y < x$$

的形式代替 $(H_0 - k^2)^{-1}$,也获得同样的結論. 由此可見,只消 $|\mathrm{Im}k| < \frac{1}{2}\alpha$, $\exp i\eta_l(k)$ 是解析的. 但它在全部实軸上不連續.

必須指出:以上并不意味着当我們将散射振幅表为动量的絕对值 k 及动量輸送 Δ 的函数后,这函数将在 Δ 任意而 $|\mathrm{Im}k| < \frac{1}{2}\alpha$ 时解析. 事实上,这个振幅的形式为[3]

$$\iint F(\mathbf{R}, \mathbf{r})d\mathbf{R}\,d\mathbf{r},$$

$$F(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = V\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{r})\right)V\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{r})\right)\frac{e^{ikr}}{r}\, e^{-i\Delta\cdot\mathbf{R} - i(k^2 - \Delta^2/4)^{1/2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}},$$

式中 $\mathbf{n}$ 为一与 Δ 垂直的单位向量.由此不难看出,在 Δ 任意而 $|\mathrm{Im}k| < \frac{1}{2}\alpha$ 时,散射振幅并不一定解析.

参 考 文 献

[1] Боголюбов, Ширков, Введение в теорию квантованных полей, 1957.
[2] Bremermann et al., *Phy. Rev.* **109** (1958), 2178.
[3] Khuri, *Phy. Rev.* **107** (1957), 1148; **109** (1958), 198.

A SIMPLIFIED PROOF OF DISPERSIVE RELATIONS

CHANG TSUNG-SUI
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this note, a simple but not rigorous proof for dispersive relations is given. The proof proceeds by expanding the causal amplitude with respect to the intermediate states and considering the analyticity of the energy denominator and the corresponding numerator separately. While the analyticity of the energy denominator is more or less obvious, the proof of the analyticity of the numerator, say N, is achieved by considering the analyticity of the corresponding numerator where the mass μ^2 has been replaced by $-\mathbf{p}^2$ ($\mu =$ mass of meson, $\mathbf{p} =$ momentum of nucleon in Breit's system, the scattering of mesons by nucleons being considered for definiteness) and passing to the analyticity of N with the help of a suitable transformation. The idea of replacing μ^2 by another quantity is due Bokolubof (Боголюбов), but here analyticity with respect to this new quantity is not considered. In the present method, $\mathbf{p}^2$ is allowed to be as great as $M^2 - \mu^2$ ($M =$ mass of nucleon).

The analyticity of phase shifts $\eta(k)$ in potential scattering is also considered and it is pointed out that if the potential $V \to e^{-\alpha r}$ as $r \to \infty$ ($\alpha > 0$), then $\eta(k)$ may be extended to where $|\mathrm{Im}\ k| < \frac{1}{2}\alpha$.