

关于 Chew-Low 理論*

張 宗 燧

(中国科学院数学研究所)

提 要

这篇短文討論了 Chew-Low 方程的二个问题。第一,我們将它与寻常的散射形式理論作一比較,証明了二个理論的波函数除去一个常数倍外,完全相同。这个常数倍即是物理核子及裸核子的波函数的內乘积。第二,我們討論了一般的含有二个 h 函数的 Chew-Low 方程的解,方程的形式使它們在实軸上在 $(1, \infty)$ 及 $(-1, -\infty)$ 二段上不連續。我們証明了为使解存在,交叉对称必須滿足某些条件,而即使这些条件已滿足,在某些情形下解的存在要求原来的 h 的方程含有无穷多个代表中間分立态的項。

1. 引 言

本文討論 Chew-Low 方程^[1]的二个问题。第一,它是否与寻常的散射形式理論一致? 第二,在各种交叉对称的情形下,是否无条件地存在着解? 第一个问题的回答是正面的,即除开某一个常数倍外,Chew-Low 方程中的波函数与寻常的散射形式理論^[2]所决定的完全一致。第二个问题是 Ford^[3]对于李模型理論中 Chew-Low 型方程的討論所启发的,他指出了当耦合常数够大时,而同时如果形如李模型理論中的 Chew-Low 方程沒有相应于奇异态的項,則方程沒有解。我們根据他的精神,討論其他的 Chew-Low 型方程。

2. Chew-Low 方程与寻常散射形式理論的比較

依照 Chew-Low, 相应于单个物理核子态有一个波函数 Ψ_0 , 滿足

$$H\Psi_0 = 0, \quad (1)$$

H 为核子介子系統的总哈密頓。代表单个物理核子与介子 q 的散射态为

$$\Psi_q = a_q + \Psi_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{H - \omega_q - i\epsilon} [V, a_q^\dagger] \Psi_0, \quad (2)$$

式中 V 代表核子介子作用能, ω_q 为自由介子的能量 $(\mu^2 + q^2)^{1/2}$, $a_q^\dagger$ 为寻常的产生算符。另一方面,散射形式理論的結果为

$$\Psi_q = a_q^\dagger \phi_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} iV\Psi_q, \quad (3)$$

式中 ϕ_0 为裸核子态, H_0 为核子的哈密頓。我們的问题为求証(2), (3)式的一致。

将 Ψ_0 写为

$$[\epsilon/(iH + \epsilon)]\Psi_0. \quad (4)$$

* 1959年9月7日收到。

当然, 对于任意一个波函数 Φ , 我們有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \Phi = \Psi_0(\Psi_0, \Phi),$$

亦即

$$\Psi_0 = \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \Phi \frac{1}{(\Psi_0, \Phi)} + O(\epsilon).$$

但因为此后将引入某些除法, 而分母可能有时取值 $O(\epsilon)$, 因此上式是不方便的.

以(4)代入(2)式, 得

$$\Psi_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(a_q^+ \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \Psi_0 - i \frac{1}{i(H - \omega_q) + \epsilon} [V, a_q^+] \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \Psi_0 \right), \quad (5)$$

式中第二項先后的 ϵ 可以取得相同. 利用一些熟知的办法, 将上式化为

$$\Psi_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\epsilon}{i(H - \omega_q) + \epsilon} a_q^+ \Psi_0 \right\}. \quad (6)$$

同样地, 可以証明 Chew-Low 理論中的 $\Psi(q_1, q_2, \dots)$ 等于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{i(H - \sum \omega_q) + \epsilon} \prod_i a_{q_i}^+ \Psi_0.$$

証明与前相仿, 不必写出. 注意上式对于各个 q 明显地对称.

将 H 写为 $H_0 + V$, 将 $[i(H - \omega_q) + \epsilon]^{-1}$ 写为

$$\frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} - \frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} iV \frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} + \dots, \quad (7)$$

代入(6)式, 便得

$$\Psi_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\epsilon}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} a_q^+ \Psi_0 - \frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} iV \Psi_q \right\}. \quad (8)$$

严格讲来, (8)式应为

$$\Psi_q^\epsilon = \frac{\epsilon}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} a_q^+ \Psi_0 - \frac{1}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} iV \Psi_q^\epsilon,$$

而 Ψ_q^ϵ 为(6)式右方曲括号中項. 不难看出, 令上式右方第二項中二个 ϵ 独立地趋近于零不会带来严重錯誤, 因此我們便获得了(8)式.

(8)式右方第一項显然滿足

$$(H_0 - \omega_q) \phi = 0, \quad (9)$$

因而是一个自由波. 事实上, 如果 ϕ_0 为一个归一化的而滿足

$$H_0 \phi = 0 \quad (10)$$

的波函数, 那末对于任何 ϕ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{iH_0 + \epsilon} \phi = \phi_0(\phi_0, \phi). \quad (11)$$

因此(8)式右方第一項为

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{i(H_0 - \omega_q) + \epsilon} a_q^+ \Psi_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_q^+ \frac{\epsilon}{iH_0 + \epsilon} \Psi_0 = a_q^+ \phi_0(\phi_0, \Psi_0). \quad (12)$$

代入(8)式, 得

$$\Psi_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \psi_0(\psi_0, \Psi_0) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i(H_0 - \omega_{\mathbf{q}}) + \epsilon} iV \Psi_{\mathbf{q}}. \quad (13)^{1)}$$

同样,也可获得

$$\Psi_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots} = (a_{\mathbf{q}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{q}_2}^{\dagger} \cdots) \psi_0(\psi_0, \Psi_0) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i(H_0 - \sum \omega_{\mathbf{q}}) + \epsilon} iV \Psi_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots}.$$

如果在 H 分裂为 $H_0 + V$ 时,我们如此地选择 H_0 , 使满足 $H_0 \psi = 0$ 的 ψ 代表一裸核子态, 那时(13)式与(3)式完全相同,所差的只是在(13)右方第一项中多出现了一个因子 (ψ_0, Ψ_0) , 亦即由(13)式所求出的 $\Psi_{\mathbf{q}}$ 多一个因子 (ψ_0, Ψ_0) . $\Psi_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots}$ 的情形也如此.

这里似乎有一个矛盾. 即在 Chew-Low 理论中, $\Psi_{\mathbf{q}}$ 是已证为正交归一的^[4], 而取去 (ψ_0, Ψ_0) 字样的(13)式右方也是正交归一的^[2]. 通过这二个正交归一化的证明, 便可推出 $(\psi_0, \Psi_0) = 1$ 的结论, 而这是不可能的. 所以如此乃是通常的正交归一化的证明不够完善. 在通常的正交归一化的证明中[无论是对于(2)式右方的证明或对于取去 (ψ_0, Ψ_0) 字样后的(13)式的证明], 我们实际上证明了当 $\omega_{\mathbf{q}} \neq \omega_{\mathbf{q}'}$ 时 $(\Psi_{\mathbf{q}'}, \Psi_{\mathbf{q}}) = \delta_{\mathbf{q}' \mathbf{q}}$ 成立, 遂后即认为此式对一般的 $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$ 都成立, 这显然是不够妥当的, 而一个较好的方法是先令 $\mathbf{q}$ 取分立值(即引入一个有限体积 V), 算出 $(\Psi_{\mathbf{q}'}, \Psi_{\mathbf{q}})$, 再令 $V \rightarrow \infty$, 同时将 $V \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}} / (2\pi)^3$ 改为 $\delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q})$. 在形式理论中作这样的计算是不方便的, 所以我们不拟讨论此点.

自(13)式出发, 假定了(1)式, 我们可以逐步退回至(2)式. 自没有 (ψ_0, Ψ_0) 字样的(13)式出发, 假定了(1)式, 我们可以获得

$$\Psi_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \Psi_0 \frac{1}{(\psi_0, \Psi_0)} - \frac{1}{H - \omega_{\mathbf{q}} - i\epsilon} [V, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] \Psi_0 \frac{1}{(\psi_0, \Psi_0)},$$

相差依然是一因子. 以上证明了除开一个因子外, 形式散射理论与 Chew-Low 理论是完全一致的.

我们也可以将 Chew-Low 理论与 Gellmann, Goldberger^[5] 的形式理论作一比较. 根据后者, 在 $t = -\infty$ 处的裸核子 ψ_0 (满足 $H_0 \psi_0 = 0$) 在 $t = 0$ 处变为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \psi_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} \psi_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \psi_0 \quad (14)$$

(因为 $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt}$ 可以了解为

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow -\infty} -\epsilon \int^t e^{(iH+\epsilon)t} dt),$$

在 $t = -\infty$ 处相应于一裸核子加上一介子 $\mathbf{q}$ 的态在 $t = 0$ 处变为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \psi_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i(H-\omega_{\mathbf{q}})t} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \psi_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{i(H - \omega_{\mathbf{q}}) + \epsilon} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \psi_0. \quad (15)$$

将这二个态认为是我们的 $\Psi_0, \Psi_{\mathbf{q}}$, 得

$$\Psi_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \psi_0, \quad (16)$$

1) 我们可以用同样方法导出

$$\Psi_0 = \psi_0(\psi_0, \Psi_0) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{iH_0 + \epsilon} iV \Psi_0,$$

但此处理论完全是形式的, 因为在 Chew-Low 理论中, 核子是不动的, 所以 H_0 在零值附近不连续, 因此上式第二项不代表外射波, 也无其他物理意义.

$$\Psi_q = \text{Lim} \left(a_q^+ \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} - i \frac{1}{i(H - \omega_q) + \epsilon} [V, a_q^+] \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \right) \psi_0. \quad (17)$$

假定可以令上式右方第二项的二个 ϵ 独立地趋近于零, 便得到所欲求的(2)式. 反过来自(2)式及(16)式也可以导出 Ψ_q 为(15)式. 注意, 在这里, (ψ_0, Ψ_0) 的不出现, 乃是因为我们假定了(16)式, 而(16)式带来了 $(\psi_0, \Psi_0) = 1$. 如果将(16)式改动, 改为

$$\Psi_0 = \text{Lim} \frac{\epsilon}{iH + \epsilon} \psi_0 \frac{1}{(\Psi_0, \psi_0)},$$

那末 (ψ_0, Ψ_0) 等字样依然会出现的.

3. Chew-Low 方程型的方程的解

因为 Chew-Low 型方程可以在许多场合下出现, 所以它的研究是饶有兴趣的. 一个有兴趣的结果是 Ford^[3] 所发现的; 在李模型的 Chew-Low 型方程中或在

$$\frac{1}{H(z)} = 1 - z \int_1^\infty \frac{F(\omega)}{(\omega - z)\omega^2 |H(\omega + i\epsilon)|^2} d\omega + \Sigma \frac{a_i z}{(z - \lambda'_i) \lambda'_i}, \quad (a_i > 0, \lambda'_i > 0) \quad (18)$$

方程中, 在

$$I \equiv \int_1^\infty \frac{F(\omega)}{\omega^2} d\omega > 1 \quad (19)$$

时, 亦即耦合常数足够大时, 寻常的解

$$H(z) = 1 + z \int_1^\infty \frac{F(\omega)}{\omega^2(\omega - z)} d\omega - \Sigma \frac{R_i z}{\omega_i(\omega_i - z)} \quad (20)$$

事实上并不是解. 根据他的讨论, 可以看出, (18)式在(19)情形下并没有解.

我们现在根据他的精神来研究其他 Chew-Low 型方程的解是否存在.

首先让我们看一下他的结果是如何导出的. 自(18)式可以看出: 在实轴上 $d[1/H(z)]/dz < 0$. 因此它的极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots [\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots, \lambda$ 等包含(18)式中的 λ'_i] 及零点 $\omega_1, \omega_2, \dots (\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots)$ 的分布只有二个情形:

$$\omega_1 < \lambda_1 < \omega_2 < \lambda_2 \dots, \quad (21)$$

$$\lambda_1 < \omega_1 < \lambda_2 < \omega_2 \dots \quad (22)$$

(等号情形不加讨论). 因为所有的 λ 都在原点之右 [此点可直接由(18)式看出], 所以在情形(21)下, 只有 $\omega_1 < 0 < \lambda_1$ 及 $0 < \omega_1$ 的二个可能. 由于 $1/H(0) = 1 > 0$, 知 $\omega_1 < 0 < \lambda_1$ 的情形是不可能的, 因此得 $0 < \omega_1$; 由此知 $1/H(-\infty) > 0$. 在情形(22)下, 由于 $d(1/H(z))/dz < 0$ 及 λ_1 左方无零点极点, 知 λ_1 左方的 $1/H$ 完全是负的, 因此原点一定在 λ_1 的右方, 这个情形与(18)式形式相矛盾而不存在. 因此, 我们一定得 $1/H(-\infty) > 0$, 亦即 $H(-\infty) > 0$, 亦即

$$1 - I - \Sigma R_i / \omega_i > 0. \quad (23)$$

ω 等已证明大于零, 又可以由 $1/H$ 在它的零点附近的形状证明 $R_i > 0$. 因此, 在解存在时,

$$I < 1 - \Sigma R_i / \omega_i < 1. \quad (24)$$

以上是在已知 $a_i > 0$, $\lambda'_i > 0$ 的情形下的讨论. 不妨假定 a_i, λ'_i 的符号是未知的, 由解的存在及解在 $-\infty, +\infty \pm i\epsilon$ 等点的性质转回来讨论它们所必须适合的性质.

不难看出,为了使(18)式在 $I > 1$ 时可能有解,那末在(18)式中必然有一项相应于奇异态 (ghost state). 因为如果所有的 R_i, ω_i 都大于零,那末在 $-\infty$ 点的研究告诉我们 $H(-\infty)$ 应该小于零. 如果 $H(-\infty) < 0$, 那末我们只能有(22)的情形,亦即

$$\lambda_1 < \omega_1 < \lambda_2 < \omega_2 \cdots$$

又因为 $H(0) > 0$, 我们得 $\lambda_1 < 0$. 这是 R_i, ω_i 都大于零时的结论. 如果有一个 R 小于零,那必然有一个 a 小于零. 如果有一个 ω 小于零,那末因为 $H(0) > 0, d(1/H)/dz < 0$, 在这个 ω 及原点间必有一个 λ . 因此我们证明了如果(18)式在 $I > 1$ 时有解,它必然包含相应于奇异态的项. 在此应该指出,为了解的存在,我们只须引入一个取负值的 λ'_i 而不要求取负值的 a_i , 亦即不要求幂方为负的奇异态. 事实上,在(18)式中,只消取 $\lambda'_i < 0, \lambda'_i \neq 0, a_i > 0$, 便保证了 $H(-\infty) < 0$.

其次,我们证明:如果(18)式中的 λ'_i 是有限多个,而

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} |H(\omega_1 + i\epsilon)|^{-1} < 1,$$

则(18)式也应有相应于奇异态的项. 证明如下:

取 ω_1 比所有的 λ'_i 大出许多. 自(18),(20)式,得

$$\frac{1}{H(\omega_1 + i\epsilon)} = 1 - L - \pi i \omega_1 \frac{F(\omega_1)}{\omega_1^2 |H(\omega_1 + i\epsilon)|^2} + \sum \frac{a_i}{\lambda'_i} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right), \quad (25)$$

$$L = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \omega_1 \int P \frac{1}{(\omega - \omega_1)} \frac{F(\omega) d\omega}{\omega^2 |H(\omega + i\epsilon)|^2},$$

$$H(\omega_1 + i\epsilon) = 1 + L' + \pi i F(\omega_1)/\omega_1 - \sum R_i/\omega_i + O(1/\omega_1), \quad (26)$$

$$L' = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \omega_1 \int P \frac{1}{(\omega - \omega_1)} \frac{F(\omega) d\omega}{\omega^2}.$$

(25),(26)式右方的乘积应为 1, 由此得

$$\left[1 - L + \sum \frac{a_i}{\lambda'_i} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] \left[1 + L' - \sum \frac{R_i}{\omega_i} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] + \omega_1^2 \pi^2 \frac{F(\omega_1^2)}{\omega_1^4 |H(\omega_1 + i\epsilon)|^2} = 1, \quad (27)$$

$$\left[1 - L + \sum \frac{a_i}{\lambda'_i} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] |H(\omega_1 + i\epsilon)|^2 - \left[1 + L' - \sum \frac{R_i}{\omega_i} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right)\right] = 0. \quad (28)$$

令 $\omega_1 \rightarrow \infty$, (27)左方第二项趋近于零,因此自(27),(28)可得

$$\left[1 - L + \sum \frac{a_i}{\lambda'_i}\right] = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{H(\omega_1 + i\epsilon)} \right|. \quad (29)$$

因此,如果(29)右方的极限小于 1, 得

$$1 - L + \sum (a_i/\lambda'_i) < 1. \quad (30)$$

因为自 L 的定义, L 可以认为是负的,得

$$\sum a_i/\lambda'_i < 0, \quad (31)$$

亦即(18)式至少有一些相应于奇异态的项. 以上说明,如果分立态是有限多个,而我们要求散射振幅在 $\omega \rightarrow \infty$ 处比 $F(\omega)/\omega^3$ 小,那末在分立态中必然有一些是奇异态.

Chew-Low 的原来的方程与(18)式有一个极大不同处,即式中所讨论的函数 h 非但在实轴的 $(1, \infty)$ 段上不连续,在 $(-1, -\infty)$ 段上也不连续. 因此利用以上的精神来讨论

解的能否存在带来了不同的結果。为討論方便起見, 讓我們假定只有二个函数 h , 用文献 [1] 中的符号, 将方程写为

$$h_a(\omega) = \frac{\lambda_a}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega_p p^3 v^2(p) \left\{ \frac{|h_a(\omega_p + i\epsilon)|^2}{\omega_p - \omega} + \frac{\sum_\beta A_{a\beta} |h_\beta(\omega_p + i\epsilon)|^2}{\omega_p + \omega} \right\}, \quad (32)$$

$$h_a(\omega) = \sum_\beta A_{a\beta} h_\beta(-\omega), \quad (33)$$

$$\sum A_{a\beta} \lambda_\beta = -\lambda_a, \quad (34)$$

$$\sum A_{a\beta} A_{\beta\gamma} = A_{a\gamma} \quad (\alpha, \beta = 1, -1). \quad (35)$$

(32) 式曲括号中第二項的分子是由 (33) 式决定的。如果我們在 (32) 右方加上一項

$$\sum_i a_{ai}/(\omega - \lambda'_i) \lambda'_i, \quad (36)$$

那末我們也加上一項

$$-\sum_{\beta, i} A_{a\beta} a_{\beta i}/(\omega + \lambda'_i) \lambda'_i, \quad (37)$$

使 (33) 式滿足。現在讓我們求解。在求解过程中, 我們將証明只有当 A 滿足某些条件时才有解; 非但如此, 即使这些条件已被滿足, 对于某些 A , 解只在有无穷多个 λ'_i 时才可能存在, 亦即只在有无穷多个分立态时才可能存在。

这里的求解过程即是通常所用的办法^[1,6]。引入 $g_a(\omega)$, 定义为

$$g_a(\omega) = \lambda_a/\omega h_a(\omega) \quad (\alpha = 1, -1). \quad (38)$$

自 (32) 式, 可以算出

$$g_a(\omega_p + i\epsilon) - g_a(\omega_p - i\epsilon) = -2i\lambda_a p^3 v^2(p)/\omega_p, \quad (39)$$

$$g_a(-\omega_p + i\epsilon) - g_a(-\omega_p - i\epsilon) = -2i\lambda_a [p^3 v^2(p)/\omega_p] \times \\ \times \frac{\sum_\beta A_{a\beta} |h_\beta(\omega_p + i\epsilon)|^2}{|\sum_\gamma A_{a\gamma} h_\gamma(\omega_p + i\epsilon)|^2} \quad (1 < \omega_p < \infty). \quad (40)$$

在 $g_a(\omega')/\omega'(\omega' - \omega)$ 上应用哥西定理, 注意到 $g(\omega')$ 在实軸上的不連續性, 利用不連續量 (39), 获得

$$g'_a(\omega) = 1 - \frac{\lambda_a \omega}{\pi} \int_1^\infty \frac{p^3 v^2(p)}{\omega_p^2} \frac{1}{(\omega_p - \omega)} d\omega_p + \omega \int_{-\infty}^{-1} \frac{b_a(\omega_p)}{\omega_p^2 - \omega} d\omega_p + \sum \frac{R_{ia}\omega}{\omega_i(\omega_i - \omega)}, \quad (41)$$

式中 $b_a(\omega_p)$ 为待定的量。它可以用两个方法来决定。一方面, 由于 g 的定义及 (33), 我們获得

$$g_a(\omega) = -\sum_\beta \frac{\lambda_a}{\lambda_\beta} A_{-a, -\beta} g_\beta(-\omega), \quad (42)$$

由此得

$$b_a(-\omega_p) = \frac{1}{\pi} \sum_\beta A_{-a, -\beta} \lambda_a p^3 v^2(p)/\omega_p^2 \quad (\omega_p > 1); \quad (43)$$

另一方面, 自不連續量 (40), 得

$$b_a(-\omega_p) = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_\beta A_{a\beta} |h_\beta(\omega_p + i\epsilon)|^2}{|\sum_\gamma A_{a\gamma} h_\gamma(\omega_p + i\epsilon)|^2} \lambda_a p^3 \frac{v^2(p)}{\omega_p^2} \quad (\omega_p > 1). \quad (44)$$

因此, 为使解存在, 必須有

$$\sum_\beta A_{-a, -\beta} \left| \sum_\gamma A_{a\gamma} h_\gamma(\omega_p + i\epsilon) \right|^2 = \sum_\beta A_{a\beta} |h_\beta(\omega_p + i\epsilon)|^2. \quad (45)$$

此外,为了满足(42)式,(41)最后一项应改为

$$\sum_{\omega_i > 0} \frac{R_{ia}\omega}{\omega_i(\omega_i - \omega)} + \sum_{\beta, i} \frac{\lambda_a}{\lambda_\beta} A_{-a, -\beta} R_{i\beta} \frac{\omega}{\omega_i(\omega_i + \omega)}.$$

显然,(45)式要求 α 为 1; -1 的二个 $|h_a(\omega_p + i\epsilon)|$ 所成的比例与 ω_p 无关. 将它们的比例写为 c_1/c_{-1} , 得

$$\sum_{\beta} A_{-a, -\beta} |\sum_{\gamma} A_{a\gamma} c_{\gamma}|^2 = \sum_{\beta} A_{a\beta} c_{\beta}^2. \quad (46)$$

(46)是二个式子,但其中只有一个变数 c_1/c_{-1} , 可见 $A_{a\beta}$ 除了(35)式外还必须满足另一些条件,而不是除了(35)式外即是任意的.

$A_{a\beta}$ 的一个最简单的可能值是

$$A_{a\beta} = +\delta_{a, \pm\beta},$$

那时(46)左右二方都是 $c_{\pm a}^2$. 另一个可能值是

$$A_{a\beta} = -\delta_{a, \pm\beta}, \quad (47)$$

那时(46)左右二方都是 $-c_{\pm a}^2$. 让我们讨论(47)的情形,那时(34)成为

$$\lambda_a = \lambda_{\pm a}. \quad (48)$$

可以证明,至少在这个情形下,如果(32)式不含有无穷多的 λ'_i , 解是不存在的.

证明如下. 假定解存在, 假定只有有限多个 λ'_i , 取 ω_p 大于所有的 λ'_i , 令 $\omega_p \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned} \omega_p h_a(\omega_p + i\epsilon) &= \lambda_a - K_{\pm a} + L_a + p^3 v^2(p) |h_a(\omega_p + i\epsilon)|^2 \omega_p i + \\ &\quad + \sum a_{ai}/\lambda'_i + \sum a_{\pm a, i}/\lambda'_i + O(\omega_p^{-1}), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} -\omega_p h_a(-\omega_p - i\epsilon) &= \lambda_a + K_a - L_{\pm a} + p^3 v^2(p) |h_{\pm a}(\omega_p + i\epsilon)|^2 \omega_p i + \\ &\quad + \sum a_{ai}/\lambda'_i + \sum a_{\pm a, i}/\lambda'_i + O(\omega_p^{-1}), \end{aligned} \quad (50)$$

式中

$$K_a = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\pi} \int d\omega_p \frac{p^3 v^2(p) |h_a(\omega_p + i\epsilon)|^2}{\omega_p + \omega},$$

$$L_a = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\pi} \int d\omega_p \frac{p^3 v^2(p) |h_a(\omega_p + i\epsilon)|^2}{\omega_p - \omega} \frac{P}{\omega_p - \omega}.$$

另一方面,以(43)代入(41)式,令 $\omega_p \rightarrow \infty$, 得

$$g_a(\omega_p + i\epsilon) = 1 - \lambda_a L' + \lambda_a K' - \lambda_a p^3 v^2(p) i / \omega_p - \sum R_{ia} / \omega_i - \sum R_{i, \pm a} / \omega_i + O(\omega_p^{-1}), \quad (51)$$

$$g_a(-\omega_p - i\epsilon) = 1 + \lambda_a K' - \lambda_a L' - \lambda_a p^3 v^2(p) i / \omega_p - \sum R_{ia} / \omega_i - \sum R_{i, \pm a} / \omega_i + O(\omega_p^{-1}), \quad (52)$$

式中

$$K' = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\pi} \int \frac{p^3 v^2(p)}{\omega_p^2} \frac{1}{\omega_p + \omega} d\omega_p,$$

$$L' = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\pi} \int \frac{p^3 v^2(p)}{\omega_p^2} \frac{P}{\omega_p - \omega} d\omega_p.$$

(49)右方乘上(51)右方应为 λ_a , (50)右方乘上(52)右方也应为 λ_a , 但(51), (52)右方相等,亦即(49), (50)右方相等,亦即

$$K_a + K_{\pm a} - L_{\pm a} - L_a = 0. \quad (53)$$

但 K_a, K_{-a} 均大于零,而自 L_a 的定义,可以想象在一般情形下 L_a, L_{-a} 小于零,因此上式不能满足,亦即当 λ'_i 个数为有限时解不存在. 以上即是我們所欲证明的.

参 考 文 献

- [1] Chew, G. F., Low, F. E., *Phy. Rev.* **101** (1956), 1570, 1579.
- [2] Moeller, C., *Kgl. Danske Videnskab Selskab.* **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).
- [3] Ford, K. W., *Phy. Rev.* **105** (1957), 320.
- [4] Wick, G. C., *Rev. Modern Phys.* **27** (1955), 339; Norton, R. E. and Klein, A., *Phy. Rev.* **109** (1958), 584.
- [5] Gellmann, M. and Goldberger, M. L., *Phy. Rev.* **91** (1953), 398.
- [6] Castillejo, Dalitz and Dyson, *Phy. Rev.* **101** (1956), 453.

REMARKS ON CHEW-LOW EQUATIONS

CHANG TSUNG-SUI

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This short paper investigates two aspects of Chew-Low equations. First, it is compared with the usual formal theory of scattering, for example, that developed by Moeller. In comparison, it is proved that the wave functions occurring in the two formalisms are identical, apart from a constant multiple which represents the scalar product of the wave functions of a bare nucleon and a dressed nucleon. Next, equations of Chew-Low type with two h functions both possessing discontinuities along real axis from 1 to ∞ and from -1 to $-\infty$ are investigated. It is shown that for the solution to exist, certain conditions on the crossing symmetry must be satisfied and that in certain special cases where the above condition is satisfied, existence of solutions requires the presence in the equations for h of an infinite number of terms representing intermediate discrete states.