

高級象差理論*

王之江

提 要

本文的主要目的在以近似方法討論高級象差特性。首先由对称性討論了二級象差的独立象差数,近似討論了象差的几何意义,再由坐标变换的观点导出了光栏移动时象差变化的規律。由 Fermat 原理和同一光綫可看作是各不同点发出的观点导出了物体移动时象差变化的規律。由于运用 Fermat 原理,所得的結果实际上是略去初級象差影响后的近似結果,因此表示式相当简单。

然后我們把象差产生的原因分为二类,其一称作是本徵的,是入射光束无象差时必然产生的象差,用象差看作球差的观点导出了它們的表示式,結果表明,高級球差和本徵軸外球差是象差产生的原因,并导出了各种象差同时产生的状况。象差的另一类称作是衍生的,它們是由入射光綫原有象差引起的初級象差差异,由初級象差理論即可得出它們的表示式。这一些高級象差的規律和近似表示可作为評断象差产生原因的半定量依据。

最后,用 Fermat 原理討論了高級色差問題。并說明 Fermat 原理之所以可在高級象差理論中应用的理由及不致誤差过大的应用范围。

前言 关于准确和簡化

关于高級象差的理論已有大量文献^[1-6]討論过。由于表示式复杂,似乎可用的結果不多。鉴于此,我們企图寻找一种足够准确而尽可能简单的高級象差近似理論,希望由它导出尽可能多的一般性結論,从而对光学系統結構形式的选择提供形势的判断,并且能够得出定量的結論。因此在要求理論准确和表示式简单之間发生矛盾时,我們舍弃严格的要求而选取简单的表示式。当然,被舍弃的一些不应是理論的主体。

推导的主要路綫与作者为 1958 年光学設計訓練班所写的讲义“实际光学系統与象差的一般性質”相同。但为表示式简单之故,公式的規化条件和系数表示有較大变动,所采用的主要原則是使公式中所有的量尽可能是轉面不变量(例如 Lagrange 不变量 j , 波差 W 等),至少也使公式两方均为轉面不变量。因推导方式相同,故大多数推导就略去了。

首先由对称性导出波象差表示式(5),所选的坐标是光栏和物面的直角坐标系。这是为了在 §2 中导出較简单的公式組(23)所要求的。只有这样才能使光栏新坐标和原坐标間具有简单的关系(19)。但是这样的选择使几何象差与波象差間的关系变复杂或变为不太准确(参看上引文)。于是我們选取形式简单的近似关系式(6—10)作为几何象差与波象差的联系,用来討論二級波象差的几何表現和光束結構的一般性質。所导出的一批这

* 1960 年 1 月 21 日收到。

种关系是(11—18).

为了求得象差在各折射面上产生的分布值,我们把象差分为“本徵的”和“衍生的”二类.前者是入射光束原无任何象差时折射面所产生的象差;后者则由入射光束原有象差而引起.由于这种分类,全部二級象差就较易于求出.我们只对球面求出了本徵象差近似表示式.至于衍生象差的表示式(43)则对球面和非球面都是准确的.为导出衍生高級象差,只須考察入射光束初級象差引起的入射光线坐标变化的作用.易由初級象差理論得出結果.

为得出物体移动对象差的影响,我们运用了 Fermat 原理.由于我们所討論的对象是波差的六次方項,这种运用应认为是近似而是不准确的.但实际上,波差变化都是比较平缓的,相邻点間波差別很小.因此,这种結果仍有足够准确性.我们也用这种观点考察了色差.

§ 1. 軸对称性和象差表示式

軸对称系統的波象差表示式只能由下列三种单元組成:

$$(y^2 + z^2), (\eta^2 + \zeta^2), (y\eta + z\zeta), \quad (1)$$

或者取 $\zeta = 0$, 則为

$$(y^2 + z^2), \eta^2, y\eta, \quad (2)$$

其中 y, z 是光栏坐标, η, ζ 是物面(或象面)坐标. 为簡單起見都取光线与各該平面的交点坐标,而且已都除以光栏最大半径 y_0 和最大象高 η_0 .

于是初級波象差 W_1 和二級波象差 W_2 各可表示为

$$\begin{aligned} 2W_1 = & \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2)^2 + S_{II} (\eta y + \zeta z) (y^2 + z^2) + S_{III} (\eta y + \zeta z)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) (\eta^2 + \zeta^2) (y^2 + z^2) + S_V (\eta^2 + \zeta^2) (\eta y + \zeta z) \end{aligned} \quad (3)$$

或

$$\begin{aligned} 2W_1 = & \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2)^2 + S_{II} \eta y (y^2 + z^2) + S_{III} \eta^2 y^2 + \\ & + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 (y^2 + z^2) + S_V \eta^3 y, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 2W_2 = & \frac{1}{6} S_I^I (y^2 + z^2)^3 + S_{II}^{II} \eta y (y^2 + z^2)^2 + S_{III}^{III} \eta^2 y^2 (y^2 + z^2) + \\ & + \frac{1}{4} (S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2 (y^2 + z^2)^2 + \frac{2}{3} S_{II}^{III} \eta^3 y^3 + (S_{II}^{III} + S_{II}^{IV}) \eta^3 y (y^2 + z^2) + \\ & + S_{III}^{III} \eta^4 y^2 + \frac{1}{4} (S_{III}^{III} + S_{III}^{IV}) \eta^4 (y^2 + z^2) + S_V^{IV} \eta^5 y, \end{aligned} \quad (5)$$

式中系数的选择是考虑到几何象差表示式和光栏移动表示式等能有更简单的形式.

在用上述坐标系时,几何象差与波象差的近似关系如下列.于是垂軸象差二分量是:

$$nu_0 T A_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (6)$$

$$nu_0 T A_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (7)$$

对軸向象差有:

$$nu_0^2 LA = 2 \frac{\partial W}{\partial (y^2 + z^2)} \quad (\text{对軸对称波差}) \quad (8)$$

及

$$\left. \begin{aligned} nu_0^2 LA_y &= 2 \frac{\partial W}{\partial y^2}, \\ nu_0^2 LA_z &= 2 \frac{\partial W}{\partial z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{偶次波差}) \quad (9)$$

$$(10)$$

上列方程二方均为轉面不变量。式中 u_0 是孔径为 y_0 的近軸光綫孔径角。

由此可得一系列初級和二級象差相互联系的关系式。

(a) 当 η 很小时, 軸向球差 $LA^{(\eta=0)}$ 和子午彗差 K_y 随孔径而变化:

由(8)式:

$$2nu_0^2 LA^{(\eta=0)} = S_I(y^2 + z^2) + S_I^I(y^2 + z^2)^2; \quad (11)$$

由(6)式:

$$2nu_0 K_y = S_{II}\eta(3y^2 + z^2) + S_{II}^I\eta(5y^2 + z^2)(y^2 + z^2). \quad (12)$$

由(12)式, 子午彗差 $K_T(z=0)$ 和弧矢彗差 $K_S(y=0)$ 各为:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0 K_T &= \eta(3S_{II}y^2 + 5S_{II}^Iy^4), \\ 2nu_0 K_S &= \eta(S_{II}z^2 + S_{II}^Iz^4). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由(11)式, 某个一定的光学系統的球差 $LA^{(\eta=0)}$ 中, 初級者与孔径平方成正比; 二級者与孔径四方成正比, 也可推見更高級者与孔径的六次方八次方成正比, 而且在略去 η^2 項时, 球差与象高 η 无关。就在考虑到二級象差时, 高級球差 $S_I^I(y^2 + z^2)^2$ 也仍与象高无关。

由(13)式, 当孔径大小一样时 ($y=z$), 則初級子午彗差为初級弧矢彗差的三倍, 二級子午彗差为二級弧矢彗差的五倍。而且由(4), (5)式可見, 三級子午彗差为弧矢彗差的七倍。高級彗差与象高之比对軸外点也恆不变。

(b) 各种随象高而变化的象差有:

(b1) 球差:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0^2 LA_y &= S_I(y^2 + z^2) + (5S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2 y^2 + (3S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2 z^2, \\ 2nu_0^2 LA_z &= S_I(y^2 + z^2) + (3S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2 y^2 + (S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2 z^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

故子午球差 $[LA_T = LA_y(z=0)]$ 和弧矢球差 $[LA_S = LA_z(y=0)]$ 各为

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0^2 LA_T &= y^2[S_I + (5S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2], \\ 2nu_0^2 LA_S &= z^2[S_I + (S_I^{III} + S_I^{IV})\eta^2]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15) 式表示除初級球差 S_I 外, S_I^{III} , S_I^{IV} 也对軸外光束起了类似軸上点初級球差那样的作用, 但是 S_I^{III} 对光束二截面所起的作用有所不同。因此軸外光束的二截面一般具有不同的結構, 只知道子午截面一般是不够的。但子午球差可能是弧矢球差的五倍, 亦即一般总大得多, 除非 S_I^{IV} 恰是和 $5S_I^{III}$ 等值异号的大数值外, 弧矢面球差常会是可不加考虑的。称这二种象差为軸外球差, 軸外球差随象高平方而增大。

(b2) 彗差:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0 K_T &= y^2[3S_{II}\eta + (5S_{II}^{III} + 3S_{II}^{IV})\eta^3], \\ 2nu_0 K_S &= z^2[S_{II}\eta + (S_{II}^{III} + S_{II}^{IV})\eta^3]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16)式表示軸外彗差有二种,即 S_{III}^{III} 和 S_{IV}^{IV} . 前者对子午和弧矢光束的影响是 5:1,后者則与初級彗差相似,影响为 3:1. 也就是說,子午彗差一般总比弧矢彗差大得多. 軸外彗差随象高三次方增大.

(b3,4) 象散和象面弯曲.

以 X_T, X_S 表示子午和弧矢焦面弯曲:

$$\left. \begin{aligned} nu_0^2 X_T &= 2 \left(\frac{\partial W_{偶次}}{\partial y^2} \right)_{y=0}, \\ nu_0^2 X_S &= 2 \left(\frac{\partial W_{偶次}}{\partial z^2} \right)_{z=0}, \end{aligned} \right\}$$

則

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0^2 X_T &= (3S_{III} + S_{IV})\eta^2 + \left(\frac{5}{2} S_{III}^{III} + \frac{1}{2} S_{III}^{IV} \right) \eta^4, \\ 2nu_0^2 X_S &= (S_{III} + S_{IV})\eta^2 + \left(\frac{1}{2} S_{III}^{III} + \frac{1}{2} S_{III}^{IV} \right) \eta^4. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这就是說,軸外象散和弯曲与象高四次方成正比. 高級象面弯曲 S_{III}^{IV} 对子午和弧矢象面起同样作用,軸外象散 S_{III}^{III} 对子午象面的影响是对弧矢象面影响的五倍. 正由于如此,子午象面因高級象散而引起突变.

(b5) 畸变:

$$2nu_0 D = S_V \eta^3 + S_V^{IV} \eta^5, \quad (18)$$

这就表示軸外畸变 S_V^{IV} 随象高五次方而增大.

总起来說,高級象差一般表现为初級象差随孔径而变—— S_I^I, S_{II}^{II} , 或初級象差随視場而变—— $S_I^{III}, S_I^{IV}; S_{II}^{III}, S_{II}^{IV}; S_{III}^{III}, S_{III}^{IV}; S_V^{IV}$. 出現的新情况是軸外球差、軸外彗差和軸外象散中带符号“III”者对子午截面与弧矢截面的影响約五与一之比. 带符号“IV”者对二截面影响与初級同,而且有二种軸外球差和軸外彗差.

§ 2. 光栏移动时象差系数的变化規律

当光栏移动时,我們保持孔径角 u_0 不变,亦即拉格朗日不变量 i 不变,如图 1. 此时新光栏位置的最大孔径 y_0^* 一般与原孔径 y_0 不等,对新光栏位置的波差表示式中坐标 y^*, z^* 均除以新孔径 y_0^* , 于是有

$$\left. \begin{aligned} y &= y^* + A\eta, \\ z &= z^*, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中

$$A = \frac{(l_P - l_P^*)\eta_0}{(l - l_P^*)y_c} = \frac{\Delta h_{r0}}{h_0} = \frac{\Delta u_{r0}}{u_0} = \frac{\Delta i_{P0}}{i_0}. \quad (20)$$

由于波差对新坐标的表示式形式与(4),(5)相同,例如 W_1 :

$$\begin{aligned} 2W_1 &= \frac{1}{4} S_I^*(y^{*2} + z^{*2})^2 + S_{II}^* \eta y^*(y^{*2} + z^{*2}) + S_{III}^* \eta^2 y^{*2} + \\ &+ \frac{1}{2} (S_{III}^* + S_{IV}^*) \eta^2 (y^{*2} + z^{*2}) + S_V^* \eta^3 y^* \end{aligned} \quad (21)$$

故将(19)代入(4)式后与(21)式比較系数,即可得出新初級象差系数与原系数关系:

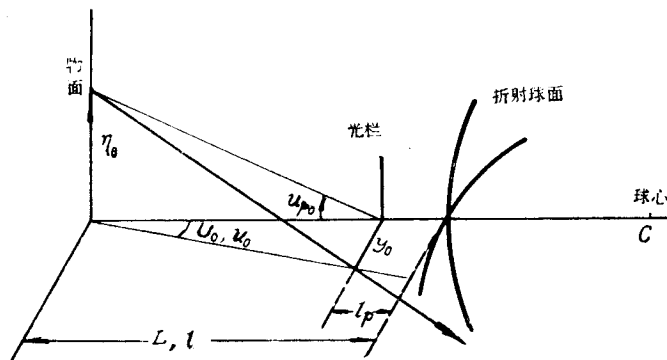


图 1(a) 光线符号图

大写字母表示一般光线; 小写字母表示近轴光线

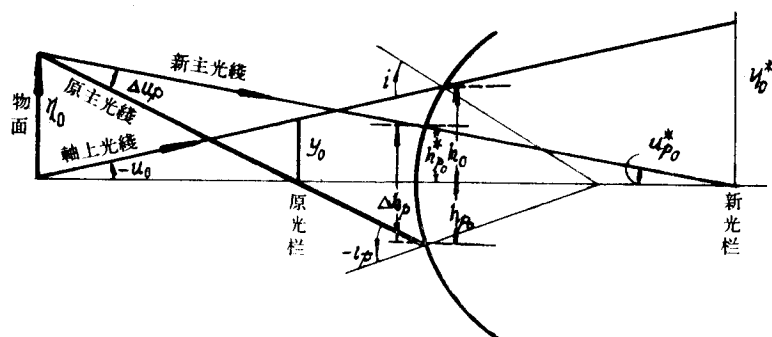


图 1(b) 光栏移动的近轴光线光路图

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= S_I, \\ S_{II}^* &= S_{II} + AS_I, \\ S_{III}^* &= S_{III} + 2AS_{II} + A^2S_I, \\ S_{IV}^* &= S_{IV}, \\ S_V^* &= S_V + A(3S_{III} + S_{IV}) + 3A^2S_{II} + A^3S_I; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

对于二級象差 W_2 也可用同样方法得出:

$$\begin{cases} S_I^{I*} = S_I^I, \\ S_{II}^{II*} = S_{II}^{II} + AS_I^I, \end{cases} \quad (23.1)$$

$$\begin{cases} S_I^{IV*} = S_I^{IV}, \\ S_{II}^{IV*} = S_{II}^{IV} + AS_I^{IV}, \\ S_{III}^{IV*} = S_{III}^{IV} + 2AS_{II}^{IV} + A^2S_I^{IV}, \end{cases} \quad (23.2)$$

$$\begin{aligned} S_I^{III*} &= S_I^{III} + 4AS_{II}^{II} + 2A^2S_I^I, \\ S_{II}^{III*} &= S_{II}^{III} + 3AS_I^{III} + 6A^2S_{II}^{II} + 2A^3S_I^I, \\ S_{III}^{III*} &= S_{III}^{III} + A(4S_{II}^{III} + 2S_{II}^{IV}) + A^2(6S_I^{III} + S_I^{IV}) + 8A^3S_{II}^{II} + 2A^4S_I^I, \\ S_V^{V*} &= S_V^V + A\left(\frac{5}{2}S_{III}^{III} + \frac{1}{2}S_{III}^{IV}\right) + A^2(5S_{II}^{III} + 3S_{II}^{IV}) + A^3(5S_I^{III} + S_I^{IV}) + \\ &\quad + 5S_{II}^{II}A^4 + S_I^IA^5. \end{aligned} \quad (23.3)$$

显然,由于采用 §1 所示的系数形式使公式组(23)有极为简单的形式,其中绝大部分与初级象差情况下的公式组一致[(23.1)(23.2)],(23.2)析出了一组带符号“IV”的象差组,它们之间的相互关系宛如初级象差。 S_V^* 与(22)式中 S_V^* 之各项系数有同一意义,它们各是各种子午象差[(11),(13),(15),(16),(17)式],从子午象差和孔径的关系看来,这是应当如此的。

§3. 物面象差和光栏象差间关系,物面移动时象差系数的影响

和初级象差范围内的情况相同,当已知一定物面位置的象差系数及光栏球差后,其他象差系数也全定了。这一点主要是由于一条光线可以看作是线上任一点所发出的,此同一光线的光程可看作是各不同点的波差,从而各波差间就自然有关系。

如图2, Oyz 是入射光瞳坐标系, $O'y'z'$ 是出射光瞳坐标系, $C\eta\zeta$ 是物面, $C'\eta'\zeta'$ 是象面,在物空间的光线 AB 为光学系统折射后应与出射光瞳相交于 $B'(y', z')$ 点,交象面于 $A'(\eta', \zeta')$ 点, A', B' 各为 A, B 的高斯象点,由于有象差的原故,实际光线会不通过这二点,但实际光线与理想光路 $A'B'$ 间距离是一小量,以 A' 为中心,通过 O' 作球面,此球面即为量度 A' 点的象差的参考波面、实际光线与此参考面的交点和 $B'A'$ 与参考面的交点间距离是一小量,按 Fermat 原理,由 A 点到这样的二点的光程是相等的,对于以 B' 为中心的参考波面也同样可以这样说。另一方面,不论波面上的二点间距多少,从 A' 点的参考波面到 A' 点的光程总是相等的。因此波象差是:

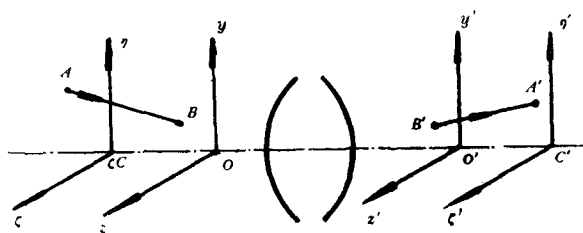


图 2

球面即为量度 A' 点的象差的参考波面、实际光线与此参考面的交点和 $B'A'$ 与参考面的交点间距离是一小量,按 Fermat 原理,由 A 点到这样的二点的光程是相等的,对于以 B' 为中心的参考波面也同样可以这样说。另一方面,不论波面上的二点间距多少,从 A' 点的参考波面到 A' 点的光程总是相等的。因此波象差是:

$$\left. \begin{aligned} W(\eta, \zeta, y, z) &= (AOO'A') - (ABB'A'), \\ W(0, 0, y, z) &= (COO'C') - (CBB'C'), \\ W_F(y, z, \eta, \zeta) &= (BCC'B') - (BAA'B'), \\ W_F(0, 0, \eta, \zeta) &= (OCC'O') - (OAA'O'). \end{aligned} \right\}$$

式中以括号表示光程,所以

$$\begin{aligned} W(\eta, \zeta, y, z) - W_F(y, z, \eta, \zeta) &= (AOO'A') - (BCC'B') + \\ &+ (BAA'B') - (ABB'A') = (OAA'O') - (OA) - (A'O') - \\ &- (CBB'C') + (CB) + (B'C') + (BA) + (A'B') = (OCC'O') - \\ &- W_F(0, 0, \eta, \zeta) + W(0, 0, y, z) - (COO'C') - (OA) - (A'O') + \\ &+ (CB) + (B'C') + (BA) + (A'B'); \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} W(\eta, \zeta, y, z) - W(0, 0, y, z) - [W_F(y, z, \eta, \zeta) - W_F(0, 0, \eta, \zeta)] &= \\ = (BA) - (BC) - (OA) + (OC) - [(B'A') - (B'C') - (O'A') + (O'C')]. \end{aligned}$$

这就是所要求的二种波象差間的关系。等式一方的一些光程都是物空間和象空間的已知长度, 可以用坐标 $\bar{y}, \bar{z}, \bar{\eta}, \bar{\xi}$ 等表示出来:

$$\left. \begin{aligned} (O'C') &= n'(l' - l'_p), \\ (B'C') &= n' \sqrt{(l' - l'_p)^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2}, \\ (O'A') &= n' \sqrt{(l' - l'_p)^2 + \bar{\eta}'^2 + \bar{\xi}'^2}, \\ (B'A') &= n' \sqrt{(l' - l'_p)^2 + (\bar{y}' - \bar{\eta}')^2 + (\bar{z}' - \bar{\xi}')^2}. \end{aligned} \right\}$$

$(O'C')$ 以外的其他三个光程的符号与 $(O'C')$ 相同, 对物空間也有类似的表示式, 因此

$$\begin{aligned} W - W(0) - (W_p - W_p(0)) &= \\ &= \Delta n \{ \sqrt{x^2 + \alpha} - x + \sqrt{x^2 + \bar{\gamma}} - \sqrt{x^2 + \bar{\alpha} + \bar{\gamma} - 2\bar{\beta}} \}, \end{aligned} \quad (24)$$

式中用符号:

$$x = l - l_p, \quad \bar{\alpha} = \bar{y}^2 + \bar{z}^2, \quad \bar{\beta} = \bar{\eta}\bar{y} + \bar{\xi}\bar{z}, \quad \bar{\gamma} = \bar{\eta}^2 + \bar{\xi}^2.$$

符号上加一橫表示除以 η_0, y_0 之前的值。(24)式的四次方項就是初級物面象差与光栏象差系数間关系, 而六次方項就是我們所要求的二級象差系数間关系; 由(5)式, (24)式左方六次項是:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ (S_{II}^{II} - S_{VP}^{VP}) \alpha^2 \beta + (S_{II}^{III} - S_{IIIp}^{IIIp}) \alpha \beta^2 + \frac{1}{4} (S_{II}^{III} + S_{II}^{IV} - S_{IIIp}^{IIIp} - S_{IIIp}^{IV}) \alpha^2 \gamma + \right. \\ &\quad + \frac{2}{3} (S_{II}^{III} - S_{IIp}^{IIIp}) \beta^3 + (S_{II}^{III} + S_{II}^{IV} - S_{IIp}^{IIIp} - S_{IIp}^{IV}) \alpha \beta \gamma + (S_{III}^{III} - S_{IIp}^{IIIp}) \beta^2 \gamma + \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (S_{III}^{III} + S_{III}^{IV} - S_{IIp}^{IIIp} - S_{IIp}^{IV}) \alpha \gamma^2 + (S_V^{VP} - S_{IIp}^{VP}) \beta \gamma^2 \right\}. \end{aligned}$$

而(24)式右方展开式六次項为:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{n}{16} \left\{ \frac{\bar{\alpha}^2}{x^5} + \frac{\bar{\gamma}^2}{x^5} - \frac{(\bar{\alpha} + \bar{\gamma} - 2\bar{\beta})^3}{x^5} \right\} &= \\ &= \Delta \frac{n}{16x^5} \{ 6\bar{\alpha}^2\bar{\beta} - 12\bar{\alpha}\bar{\beta}^2 - 3\bar{\alpha}^2\bar{\gamma} + 8\bar{\beta}^3 + 12\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} - 12\bar{\beta}^2\bar{\gamma} - 3\bar{\alpha}\bar{\gamma}^2 + 6\bar{\beta}\bar{\gamma}^2 \}. \end{aligned}$$

由于

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha y_0^2, & \frac{y_0}{x} &= u_0, \\ \bar{\beta} &= \beta y_0 \eta_0, & -\frac{\eta_0}{x} &= u_p, \\ \bar{\gamma} &= \gamma \eta_0^2, & \frac{n \eta_0 y_0}{x} &= n u_0 \eta_0 = j, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

故上式亦即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16} j \{ 6\alpha^2 \beta \Delta u_0^4 + 12\alpha \beta' \Delta u_0^3 u_{p0} + 3\alpha^2 \gamma \Delta u_0^3 u_{p0} + 8\beta^3 \Delta u_0^2 u_{p0}^2 + \\ &\quad + 12\alpha \beta \gamma \Delta u_0^2 u_{p0}^2 + 12\beta^2 \gamma \Delta u_0 u_{p0}^3 + 3\alpha \gamma^2 \Delta u_0 u_{p0}^3 + 6\beta \gamma^2 \Delta u_{p0}^4 \}. \end{aligned}$$

故二种象差系数間有关系:

$$\left. \begin{aligned} S_{II}^{II} - S_{VP}^V &= \frac{3}{4} j \Delta u^4, \\ S_I^{III} - S_{III P}^{III} &= \frac{3}{2} j \Delta u^3 u_P, \\ S_I^{IV} - S_{III P}^{IV} &= 0, \\ S_{II}^{III} - S_{III P}^{III} &= \frac{3}{2} j \Delta u^2 u_P^2, \\ S_{II}^{IV} - S_{III P}^{IV} &= 0, \\ S_{III}^{III} - S_{III P}^{III} &= \frac{3}{2} j \Delta u u_P^3, \\ S_{III}^{IV} - S_{III P}^{IV} &= 0, \\ S_V^V - S_{III P}^{II} &= \frac{3}{4} j \Delta u_P^4. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

在这个公式和以后所有公式中,为简单起见,将 u, u_P, i, i_P 的下标“0”都略去了。

由(26)及(23)即可求得物体移动时二级象差系数变化的规律(除 S_I^I 外):

$$S_{IP}^{I*} = S_{IP}^I, \quad (27.1)$$

$$S_V^{V*} = S_V^V + B S_{IP}^I, \quad (27.2)$$

$$S_{III}^{IV*} = S_{III}^{IV}, \quad (27.3)$$

$$S_{II}^{IV*} = S_{II}^{IV} + B S_{III}^{IV}, \quad (27.4)$$

$$S_I^{IV*} = S_I^{IV} + 2B S_{II}^{IV} + B^2 S_{III}^{IV}. \quad (27.5)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{III}^{III*} &= S_{III}^{III} + 4B \left(S_V^V + \frac{3}{4} j \Delta u_P^4 \right) + B^2 S_{IP}^I, \\ S_{II}^{III*} &= S_{II}^{III} + 3B \left(S_{III}^{III} + \frac{3}{2} j \Delta u u_P^3 \right) + 6B^2 \left(S_V^V - \frac{1}{2} j \Delta u_P^4 \right) + 2B^3 S_{IP}^I, \\ S_I^{III*} &= S_I^{III} + B(4S_{II}^{III} + 2S_{II}^{IV} - 3j \Delta u^2 u_P^2) + B^2(6S_{III}^{III} + S_{III}^{IV} - 6j \Delta u u_P^3) + \\ &\quad + B^3(8S_V^V - 5j \Delta u_P^4) + 2B^4 S_{IP}^I, \\ S_{II}^{II*} &= S_{II}^{II} + B \left(5S_I^{III} + S_I^{III} - \frac{7}{2} j \Delta u^3 u_P \right) + B^2 \left(5S_{II}^{III} + 3S_{II}^{IV} - \frac{3}{2} j \Delta u^2 u_P^2 \right) + \\ &\quad + B^3 \left(\frac{5}{2} S_{III}^{III} + \frac{1}{2} S_{III}^{IV} + \frac{1}{4} j \Delta u u_P^3 \right) + B^4 \left(5S_V^V - \frac{11}{4} j \Delta u_P^4 \right) + B^5 S_{IP}^I. \end{aligned} \right\}$$

其中由于

$$B = \frac{\Delta h}{h_P} = \frac{\Delta u}{u_P} = \frac{\Delta i}{i_P}, \quad (28)$$

已将 u^* 变换为 u 和 B :

$$\left. \begin{aligned} u^* &= B u_P + u, \\ u^{*2} &= B^2 u_P^2 + 2B u u_P + u^2, \\ u^{*3} &= B^3 u_P^3 + 3B^2 u_P^2 u + 3B u_P u^2 + u^3, \\ u^{*4} &= B^4 u_P^4 + 4B^3 u_P^3 u + 6B^2 u_P^2 u^2 + 4B u_P u^3 + u^4; \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

即

$$\left. \begin{aligned} j(\Delta u^* u_P^3 - \Delta u u_P^3) &= B j \Delta u_P^4, \\ j(\Delta u^{*2} u_P^2 - \Delta u^2 u_P^2) &= B^2 j \Delta u_P^4 + 2B j \Delta u u_P^3, \\ j(\Delta u^{*3} u_P - \Delta u^3 u_P) &= B^2 j \Delta u_P^4 + 3B^2 j \Delta u_P^3 u + 3B j \Delta u_P^2 u^2, \\ j(\Delta u^{*4} - \Delta u^4) &= B^4 j \Delta u_P^4 + 4B^3 j \Delta u_P^3 u + 6B^2 j \Delta u_P^2 u^2 + 4B j \Delta u_P u^3. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

为求得相应的高级球差随物体变化的規則,也可由 Fermat 原理用类似求(24)式的方式得到:

$$\begin{aligned} W^*(0,0,y,0) - W(\eta,0,y,0) - W_P(0,0,\eta,0) = \\ = \Delta u \{ x^* - \sqrt{(x^* - x)^2 + \bar{\eta}^2} - \sqrt{x^2 + \bar{\eta}^2} \}. \end{aligned} \quad (30)$$

故由展开式的六次方項得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S_I^{I*} y^6 - \left\{ \frac{1}{6} S_I^I y^6 + S_{II}^{II} \eta y^5 + \left(\frac{5}{4} S_{II}^{III} + \frac{1}{4} S_{II}^{IV} \right) \eta^2 y^4 + \left(\frac{5}{3} S_{II}^{III} + S_{II}^{IV} \right) \eta^3 y^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{5}{4} S_{II}^{III} + \frac{1}{4} S_{II}^{IV} \right) \eta^4 y^2 + S_V^V \eta^5 y + \frac{1}{6} S_{IP}^I \eta^6 \right\} = \frac{1}{8} \Delta u \bar{\eta}^6 \left\{ \frac{1}{(x^* - x)^6} + \frac{1}{x^6} \right\} = \\ = \frac{1}{8} \{ j \eta y^5 \Delta u^4 + 5 j \eta^2 y^4 \Delta u^3 u_P + 10 j \eta^3 y^3 \Delta u^2 u_P^2 + 10 j \eta^4 y^2 \Delta u u_P^3 + 5 j \eta^5 y \Delta u_P^4 \}. \end{aligned}$$

由于此时 $B = \frac{\eta}{y}$, 故由上式得

$$\begin{aligned} S_I^{I*} &= S_I^I + B \left(6 S_{II}^{II} + \frac{3}{4} j \Delta u^4 \right) + B^2 \left(\frac{15}{2} S_{II}^{III} + \frac{3}{2} S_{II}^{IV} + \frac{15}{4} j \Delta u^3 u_P \right) + \\ &+ B^3 \left(10 S_{II}^{III} + 6 S_{II}^{IV} + \frac{15}{2} j \Delta u^2 u_P^2 \right) + B^4 \left(\frac{15}{2} S_{II}^{III} + \frac{3}{2} S_{II}^{IV} + \frac{15}{2} j \Delta u u_P^3 \right) + \\ &+ B^5 \left(6 S_V^V + \frac{15}{4} j \Delta u_P^4 \right) + B^6 S_{IP}^I. \end{aligned} \quad (31)$$

§ 4. 球面的二級本徵象差

有了公式組 (23), (27), (31) 之后,我們只須知道光栏处在某一定位置时的象差系数即可得到光栏处在任意位置时的象差系数。对于球面而言,我們先令光栏处在球心,同时入射球面的光束又无象差,則各高級象差系数易于求出。于是就能得到球面在任意状况下产生的所有高級象差系数。但是有条件:入射光束是无象差的,在这种条件下的象差我們称之为本徵的。

由于光栏在球心,可能认为波差 W 只是 $(y^2 + z^2)$ 和 η^2 的函数,实际上并非如此。例如对于光栏坐标 $+y$, $-y$ 的二条子午光綫,如图 3, 象差显然毫不相同,因之虽然光栏在球心,波差 W 也并非 $(y^2 + z^2)$ 的函数,因此看来虽取这样特殊的光栏位置也不能得出非常简单的系数表示式。

为求出这些系数,我們采用下述方案。首先求出不随光栏移动而变的二个球差系数 S_I 和 S_I^I , 而后由 (27.5) 和 (31) 式展开求出所有其他系数。为展开方便起见,我們仍然令光栏处在球心。球差系数

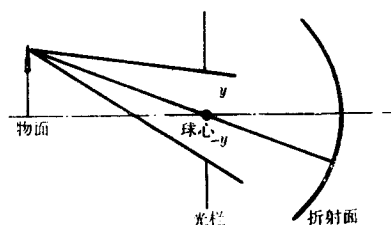


图 3

S_I^{IV} 显然是轴外点与轴上点的初级球差差别。由初级象差理论应可求出这个差别。由物体移动对象差影响的关系式:

$$S_I^* = S_I + B[S_{II} + j(u'^2 - u^2)], \quad (32)$$

今因光栏在球心 $S_{II} = 0$, 而

$$B = \frac{\Delta u}{u_P} = \frac{u \Delta l}{(l - l_P)u_P} = \frac{u \Delta l}{\eta} = -\frac{u}{\eta} \cdot \frac{\eta^2}{2(l - r)} = -\frac{\eta u}{2(l - r)} = \frac{-j}{2n(l - r)}, \quad (33)$$

$$S_I^{IV} = S_I^* - S_I = -\frac{j^2}{2n(l - r)}(u'^2 - u^2) = -S_{IV}u \left\{ \frac{1}{2}(i - i') + u \right\}. \quad (34)$$

这个公式也可以由 j 不变 (i 不变) 时从初级球差表示式微分而得。

至于高级球差 S_I^I 则可由 $\Delta L \sin U ni$ 的展开式求得其近似值^[7]:

$$S_I^I = \frac{1}{8} S_I \{ (i' + u)^2 + (i + i')^2 + (i - u)^2 \}. \quad (35)$$

下面由物体移动的关系式导出其他系数。由于 (34), S_I^{IV} 是已知的, 于是 (27.5) 式中 S_I^{IV*} 和 S_I^{IV} 都可以知道, 从而求出 $S_{II,0}^{IV}$ 和 $S_{III,0}^{IV}$ (下标“0”表示光栏在球心时的系数)。由于光栏在球心, 故 $(l - r)u = (l^* - r)u^*$, 即 $i = i^*$, 故

$$S_I^{IV*} - S_I^{IV} = -S_I^{IV} \left\{ \frac{1}{2}(i - i')(u^* - u) + u^{*2} - u^2 \right\}.$$

由 (29) 将 u^* 变换为 B , 得

$$\begin{aligned} S_I^{IV*} - S_I^{IV} &= -S_{IV} \left\{ \frac{1}{2}(i - i')Bu_P + B^2u_P^2 + 2uu_P \right\} = \\ &= -S_{IV} \left\{ \frac{1}{2}(i - i' + 4u)u_PB + u_P^2B^2 \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$u_P = -\frac{j}{-n(l - r)u} = -\frac{j}{nri}. \quad (37)$$

故与 (27) 式比较即得

$$\begin{aligned} S_{II,0}^{IV} &= \frac{jS_{IV}}{nri} \left(\frac{1}{4}(i - i') + u \right), \\ S_{III,0}^{IV} &= -\frac{j^2S_{IV}}{n^2r^2i^2} \end{aligned} \quad (38)$$

再由 (23.2) 求得光栏处在任意位置时的系数:

$$S_{II}^{IV} = S_{II,0}^{IV} + \frac{i_P}{i} S_I^{IV} = -S_{IV} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n}{n'} \right) (i_P u + i u_P) u u_P \right\}, \quad (39)$$

$$S_{III}^{IV} = S_{III,0}^{IV} + 2 \frac{i_P}{i} S_{II,0}^{IV} + \left(\frac{i_P}{i} \right)^2 S_I^{IV} = -S_{IV} u_P \left\{ u_P + \frac{i_P - i'_P}{2} \right\}. \quad (40)$$

这就是全部带上标“IV”的三个象差系数。为求其他系数, 可利用 (31) 式, 仍令光栏在球心, 即 i 不变, 于是因

$$\begin{aligned} S_I^I &= \frac{1}{8} l u n i (i' - u)(i - i') \{ (i' + u)^2 + (i + i')^2 + (i - u)^2 \} = \\ &= \frac{1}{4} n i (i + i') \{ (i^2 + i'^2 + i i') i' - (i^2 + 2 i i') u + i u^2 - u^3 \} l u, \end{aligned} \quad (41)$$

并因

$$l^*u^* = lu + r(u^* - u) = lu + ru_p B, \quad (42)$$

故由(29)式,

$$\begin{aligned} 4 \frac{1}{ni(i-i')} (S_I^* - S_I^I) &= B^4(-ru_p^4) + B^3u_p^3(ri - 3ru - lu) + \\ &+ B^2u_p^2\{r(-3u^2 + 2iu - i^2 - 2ii') + lu(-3u + i)\} + \\ &+ Bu_p\{r[-u^3 + iu^2 - (i + 2i')iu + (i^2 + i'^2 + ii')i'] + \\ &+ lu(-3u^2 + 2iu - i^2 - 2ii')\}. \end{aligned}$$

由于

$$S_{IV} = j^2 \frac{i-i'}{nir} = -j(i-i')u_p = ni(i-i')ru_p^2, \quad (43)$$

故上式即

$$\begin{aligned} S_I^* - S_I^I &= B^4\left(-\frac{1}{4}S_{IV}u_p^2\right) + B^3\left(\frac{1}{4}S_{IV}u_p\right)(i - 3u - i - u) + \\ &+ B^2\left(\frac{1}{4}S_{IV}\right)\{(2iu - 3u^2 - i^2 - 2ii') + (i + u)(i - 3u)\} + \\ &+ B\left(\frac{S_{IV}}{4u_p}\right)\{iu^2 - u^3 - (i + 2i')iu + (i^2 + i'^2 + ii')i' + (i + u)(2iu - 3u^2 - i^2 - 2i')\} = \\ &= B^4\left(\frac{-1}{4}S_{IV}u_p^2\right) + B^3(-S_{IV}u_pu) + B^2\left(\frac{-S_{IV}}{2}\right)(3u^2 + ii') + \\ &+ B\left(\frac{S_{IV}}{4u_p}\right)(-4u^3 - 4ii'u + i'^3 + i'^2i - i'i^2 - i^3), \end{aligned} \quad (43')$$

与(31)式比較系数即得

$$\left. \begin{aligned} S_{IP,0} &= 0, \\ S_V^V &= 0, \\ S_{III,0}^III &= \frac{35}{30}j^2 \frac{S_{IV}}{n^2 r^2 i^2}, \\ S_{II,0}^III &= -\frac{jS_{IV}}{nri} \left\{ \frac{9}{10}(i - i') + 2u \right\}, \\ S_{I,0}^III &= S_{IV} \left(3u^2 + \frac{16}{5}u(i - i') + (i - i')^2 - \frac{2}{15}ii' \right) = \\ &= S_{IV} \left(u'^2 + \frac{6}{5}u'u + \frac{4}{5}u^2 - \frac{2}{15}ii' \right), \\ S_{II,0}^II &= \frac{-1}{4}j(i - i')(2u'^3 + 6u'^2u - 4i^2u' - 4i(u - u')u). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

一般情况下的系数可由(23.3)求得。

方程組(44)所表示的是光栏处在球心时的象差系数。假若我們初始所取的光栏坐标如图4的 $y^{\wedge}z^{\wedge}$, 即軸外点的主光綫(通过球心)与坐标軸 $y^{\wedge}z^{\wedge}$ 垂直, 在这样的坐标系内, 本微波差 W 只是 $(y^{\wedge 2} + z^{\wedge 2})$ 的函数。因此, 在这坐标系内, 除 $S_I, S_{IV}, S_I^I, S_I^{IV}, S_{III,0}^{IV}$ 外均等于零。由此可見, 方程組(44)中的复杂表示式本質上是 S_I 和 S_{IV} 由坐标变换而衍生出来

的項,而并非折射面的重要本質,但这也不能简单地略去它們令等于零,所以不能这样做的原因是:在球心附近的坐标差异特大,这种忽略将引起重大誤差。只有保留这些項时才能在球心附近得出不趋于无限大的表示式,并且也只有如此的表示才合乎物体移动和

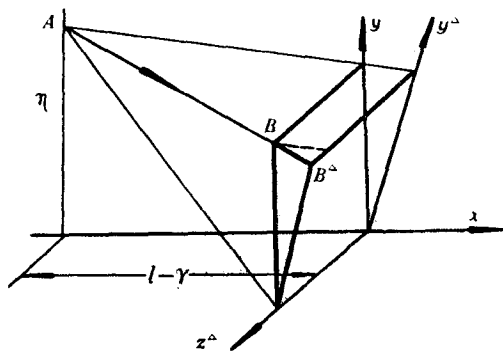


图 4

光栏移动的規則。但是当物体远离球心时,在高级象差計算中可略去它們。这样,象差表示式就大为簡化。在这种情况下,軸外高级象差純由二个原因而引起,由方程組(23),所有象差均为 S_I^I 和 S_I^{IV} 与 i_P/i 之乘积,即与初級象差类似,可将軸外象差看作是球差。对二級本微象差來說,都由軸外本微球差 S_I^{IV} 和高级球差 S_I^I 所引起,而球面的 i_P/i 此时即(23)式中的光瞳位移是 A ,它决定了象差的具体产生情况。

由(23)式,

$$\left. \begin{aligned} S_{II}^{II} &= AS_I^I, \\ S_{II}^{IV} &= AS_I^{IV}, \\ S_{III}^{IV} &= A^2 S_I^{IV} + S_{III,0}^{IV}, \\ S_I^{III} &= 2A^2 S_I^I, \\ S_{II}^{III} &= 2A^3 S_I^I, \\ S_{III}^{III} &= 2A^4 S_I^I + A^2 S_I^{IV}, \\ S_V^{IV} &= A^5 S_I^I + A^3 S_I^{IV} + \frac{1}{2} AS_{III,0}^{IV}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

由此可見,带符号“III”的軸外象差基本上由高级球差 S_I^I 所引起,高级球差对带符号“IV”的象差无影响。在大孔径系統中,高级球差比軸外球差大得多,“III”号象差是主要的(它們严重影响子午光束),对大視場小孔径系統而言, $S_I^{IV} \gg S_I^I$, 此时“IV”号象差成为主要的。 A 大而 S_I^I 小的折射面上产生的高级象散以 S_{III}^{III} 为主,軸外球差 S_I^{III} 則不大;反之,則 S_I^{III} 为主而 S_{III}^{III} 不大,运用这类概念即可以控制高级象差的产生。

§5. 衍生二級象差

当入射于光学系統中某一折射面的光束并非由理想物点发出的共心光束,而是已有象差的光束,則显然将因光綫入射位置变化而使此折射面产生的象差变更。由光束初級象差引起的折射面初級象差变化就是衍生二級象差。

由初級象差理論,入射光束的結構由六个常数 $S_I^I, S_{II}^I, S_{III}^I, S_{IV}^I, S_V^I, S_{VI}^I$ 所完全决定,符号“←”标志“此面之前”,它們使入射光綫坐标 y, z, η, ζ 或为 $y - TA_\eta/y_0, z - TA_\zeta/y_0, \eta - TA_\eta/\eta_0, \zeta + TA_\zeta/\eta_0$ 或写作 $y + \Delta y, z + \Delta z, \eta + \Delta \eta, \zeta + \Delta \zeta$. 我們仍設 $\zeta = 0$, 則由初級象差理論:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0TA_y &= S_I^-(y^2+z^2)y + S_{II}^-(3\eta y^2 + 2\zeta zy + \eta z^2) + 2S_{III}^-(\eta^2 y + \eta\zeta z) + \\ &\quad + (S_{III}^- + S_{IV}^-)(\eta^2 y + \zeta^2 y) + S_V^-(\eta^2 + \zeta^2)\eta, \\ 2nu_0TA_z &= S_I^-(y^2+z^2)z + S_{II}^-(3\zeta z^2 + 2\eta yz + \zeta y^2) + 2S_{III}^-(\zeta^2 z + \zeta\eta y) + \\ &\quad + (S_{III}^- + S_{IV}^-)(\zeta^2 z + \eta^2 z) + S_V^-(\eta^2 + \zeta^2)\zeta. \end{aligned} \right\}$$

对光栏象差 TA_η , TA_ζ 也有类似公式。且除 S_{IP} 外, 光栏象差系数均可以物面象差表示出来, 故

$$\left. \begin{aligned} 2j\Delta y &= S_{IP}\eta^3 + 3(S_V + j\overleftarrow{\Delta}u_r^2)\eta^2 y + 2(S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u_0 u_{P0})(\eta y^2) + \\ &\quad + (j\overleftarrow{\Delta}u_0 u_{P0} + S_{III} + S_{IV})(\eta y^2 + \eta z^2) + (S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u_0^2)y(y^2 + z^2), \\ 2j\Delta z &= (S_V + j\overleftarrow{\Delta}u_r^2)\eta^2 z + 2(S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u_0 u_{P0})\eta yz + (S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u_0^2)z(y^2 + z^2), \\ -2j\Delta\eta &= S_I^-(y^2+z^2)y + S_{II}^-(3\eta y^2 + \eta z^2) + (3S_{III} + S_V)\eta^2 y + S_V\eta^3, \\ -2j\Delta\zeta &= S_I^-(y^2+z^2)z + 2S_{II}\eta yz + (S_{III} + S_{IV})\eta^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

(46)式中已考虑到 $nu_0\eta_0 = j = -nu_{P0}y_0$, 而在等式左方除去了 u_0 , u_{P0} 等系数, 将(3)式求微分即可求出这些 Δy , Δz , $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ 在此折射面上所衍生的 ΔW :

$$\begin{aligned} 2\Delta W &= S_I(y^2+z^2)(y\Delta y + z\Delta z) + S_{II}\{(y^2+z^2)(y\Delta\eta + z\Delta\zeta + \eta\Delta y) + \\ &\quad + 2\eta y(y\Delta y + z\Delta z)\} + 2S_{III}(\eta y)(\eta\Delta y + y\Delta\eta + z\Delta\zeta) + \\ &\quad + (S_{III} + S_{IV})\{\eta^2(y\Delta y + z\Delta z) + (y^2+z^2)\eta\Delta\eta\} + S_V\eta^2(\eta\Delta y + 3y\Delta\eta + z\Delta\zeta). \end{aligned} \quad (47)$$

将(46)式代入(47), 再与(5)式比較系数, 即求得所有二級衍生象差之值。

$$\left. \begin{aligned} j\Delta S_I^I &= 3\{S_I(S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u^2) - S_{II}S_I^I\}, \\ j\Delta S_{II}^I &= \frac{1}{2}\{S_I(3S_{III} + S_{IV} + 3j\overleftarrow{\Delta}uu_P) + 3S_{III}j\overleftarrow{\Delta}u^2 - (3S_{III} + S_{IV})S_I^I\}, \\ j\Delta S_{II}^{III} &= S_I(S_V + j\overleftarrow{\Delta}u_r^2) + S_{II}(3S_{III} + S_{IV} + 4j\overleftarrow{\Delta}uu_P) - \\ &\quad - (3S_{III} + S_{IV})S_{II} + S_{III}j\overleftarrow{\Delta}u^2 - S_VS_I^I, \\ j\Delta S_{II}^{III} + j\Delta S_{II}^{IV} &= 2\{S_I(S_V + j\overleftarrow{\Delta}u_r^2) + S_{III}j\overleftarrow{\Delta}uu_P + (S_{III} + S_{IV})j\overleftarrow{\Delta}u^2 - S_VS_I^I\}, \\ j\Delta S_{II}^{III} &= 3\{S_{II}(S_V + j\overleftarrow{\Delta}u_r^2) + S_{III}j\overleftarrow{\Delta}uu_P - S_VS_{II}^I\}, \\ j(\Delta S_{II}^{III} + \Delta S_{II}^{IV}) &= S_I S_{IP} + S_{II}(4S_V + 5\overleftarrow{\Delta}u_r^2) + (5S_{III} + 3S_{IV})j\overleftarrow{\Delta}uu_P + \\ &\quad + S_V(-4S_{II} + j\overleftarrow{\Delta}u^2), \\ j\Delta S_{III}^{III} &= S_{II}S_{IP} + S_{III}(3S_V + 4\overleftarrow{\Delta}u_r^2) + S_{IV}(S_V + \overleftarrow{\Delta}u_r^2) + \\ &\quad + S_V(-3S_{III} - S_{IV} + \overleftarrow{\Delta}uu_P), \\ j(\Delta S_{III}^{III} + \Delta S_{III}^{IV}) &= 2\{S_{II}S_{IP} + (S_{III} + S_{IV})j\overleftarrow{\Delta}u_r^2 + S_Vj\overleftarrow{\Delta}uu_P\}, \\ j\Delta S_V^I &= \frac{1}{2}\{(3S_{III} + S_{IV})S_{IP} + 3S_Vj\overleftarrow{\Delta}u^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

式中象差系数带“ $\leftarrow$ ”号者为此面之前的象差, 而不带“ $\leftarrow$ ”号者即此面产生的象差。由(48)式可見, 入射光束的任一初級象差都将衍生出相应的高級象差。另一方面, 高級衍生象差一般受多个入射光束象差的影响。虽然如此, 每个表示式的每一項都有它本身的意义, 例如入射光束具有畸变 S_V , 則由于光束射向高于(或低于)理想象高的点, 从而使光束产生的畸变, 象散和場曲, 彗差均变大(或小)。

§6. 高級色差

高級色差即指初級象差的色差別,本可按初級象差表示式微分而得,例如在导出光学系統公差时就作过这种微分^[7,8],但是这样得出的結果由于形式复杂而不便于使用。

最簡單的考察色象差的方法莫过于 Conrady 的“d-D”法。这个方法本质上也是近似方法,其准确性是由 Fermat 原理准确的范围保証的。Conrady 认为他的公式的正确性是由 δn 很小而保証的。事实上,就按 C 綫到 F 綫的折射率差別已足引起光路显著不同。但另外一方面,按照我們的經驗,用“d-D”法足以准确地确定光学系統的色球差。就在光路显著不同的系統中(色差經過长距离后方被消去,例如大孔径复消色显微鏡高倍物鏡),对 C, F, d 而言,边缘带誤差也不超过 $\frac{1}{4}\lambda$ 。这就是說,“d-D”法基本上保証二級以上的(初級色差,初級象差的色差別,二級象差的色差別)准确度。但按 Fermat 原理的一般叙述,它只能保証差誤是二次小量(例如二光路距 0.01, 則光程差数量級約 0.0001 或更小),不能保証到高級象差。只是由于我們討論的是成像的光学系統,而且象差一定作过校正,在这种条件下,这种光綫位置偏离引起的波差为更高次的量。下面对此作一些考察。

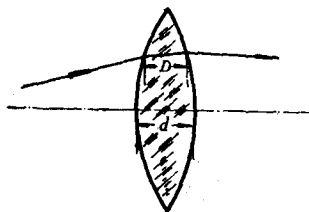


图 5

以 i, u, i_p 等等作为一級小量,于是象点位移引起的光程差为二級小量,例如色差为

$$W = \frac{1}{2} C_1(y^2 + z^2) + C_{II}y\eta,$$

而初級象差为四級小量,亦即無論点在光栏或物面上作一級移动时,波差为四級小量。現在,我們設点作二級位移(即 Δy 和 $\Delta \eta$ 或 $\Delta u, \Delta i$ 均是二級小量),則二級波象差(如色差)之变动量为四級的,四級波象差(如初級单色象差)的变动量是六級的。由此可見,在考虑象差色差別时(四級小量),一般不能不考虑到光綫由于色差而移离标准位置所带来的影响。同样,在考虑二級象差时,不应不考虑光束由初級象差发生位移而产生的影响。这也就是說,在考虑这种問題时, Fermat 原理一般是不能应用的。由此应就得出結論說: d-D 法不能用来考察高級色差。这就无异于宣布 d-D 法毫无价值,因单为初級色差时,表示式本不麻煩。前已提及实际經驗与此判断不符。我們认为其所以如此,根本原因是光学系統作过象差校正,因此,当光綫移离标准位置时,波差的变化并非預計的二級影响四級或二級影响六級,而要比四級或六級为高,而高出的程度是随象差校正状况而异的。正是由于这个原因——由于象差校正而使波面形式极为平緩——才使 d-D 法能够用来考察高級色差。

將 d-D 法推广成 D-D 法,即可用来考察軸外子午光束的象差色差別。此时只須將任一子午光綫在透鏡內的光路长度作为标准来相減即可。由于初級象差的情况可以根据子午光束象差加 Petzval 和而完全知悉,因此,虽然空間光綫的光路长也不难算出,却不用真作这种計算。

既然如此,鑑于 D-D 之易于計算和由之判断色象差应有变化的方向,再另外推导出

一套高級色差理論就几乎沒有必要了(除非更簡單而准确)。

將 D-D 展開為級數一般並不方便, 而 d-D (軸向色差) 展開還是很容易的, 由此可以將校正色球差應有的結構形式作出判斷。這似乎也是唯一須要仔細考察的色象差問題——在大孔徑高質量系統中已出現的問題。下面就來作這一考察。由於上述簡略了的方式, d-D 的展開式一定與微分法所得不一致。

D-D 法的另一重要作用是考察折射率的公差, 如用微分法計算一般要繁得多^[7]。

按照 Conrady, d-D 法可表示為

$$d'_1 - D'_1 = \frac{PA_1 \sin I'_1}{2 \cos \frac{1}{2} I'_1 \cos \frac{1}{2} U'_1} - \frac{PA_2 \sin I_2}{2 \cos \frac{1}{2} I_2 \cos \frac{1}{2} U_2}. \quad (49)$$

設光線在透鏡內的光路與理想光路一致, 即

$$L'_1 = l'_1, \quad \sin U'_1 = u'_1$$

則上式可展開為

$$\begin{aligned} d-D &= \frac{1}{2} l'_1 u'_1 i'_1 \left(1 + \frac{1}{8} i'^2_1\right) \left(1 + \frac{1}{8} u'^2_1\right) \left(1 + \frac{1}{8} (i'_1 - u'_1)^2\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} l_2 u_2 i_2 \left(1 + \frac{1}{8} i^2_2\right) \left(1 + \frac{1}{8} u^2_2\right) \left[1 + \frac{1}{8} (i_2 - u_2)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2} C_I / \delta n + \frac{1}{8} CS_I / \delta n. \end{aligned} \quad (50)$$

其中二次項即為初級色差 $\frac{1}{2} C_I$, 而四次項即為色球差, 以 $\frac{1}{8} CS_I$ 表示:

$$\begin{aligned} C_I &= (l'_1 u'_1 i'_1 - l_2 u_2 i_2) \delta n, \\ \frac{1}{\delta n} CS_I &= l_1 u_1 i'_1 [(i'_1 - u'_1)^2 + i'_1 u'_1] - l_1 u_2 i_2 [(i_2 - u_2)^2 + i_2 u_2] = \\ &= h_1 i'_1 \left(\frac{h^2_1}{r^2_1} - 3 \frac{h_1 i'_1}{r_1} + 3 i'^2_1\right) - h_2 i_2 \left(\frac{h^2_2}{r^2_2} - 3 \frac{h_2 i_2}{r_2} + 3 i^2_2\right). \end{aligned} \quad (51)$$

對於薄透鏡不難將上述公式表達成透鏡彎曲的二次函數 (如象薄透鏡單色球差理論中將 P 表示為 Q 的函數)。

參 考 文 獻

- [1] Herzberger, M., *Jour. Opt. Soc. Amer.* **29** (1939), 395.
- [2] Herzberger, M., *Jour. Opt. Soc. Amer.* **46** (1956), 132.
- [3] Fock, S., *Jenaer Jahrbuch* (1951).
- [4] Wacheadorf, *Optik*, **5** (1949), 80.
- [5] Heel, A.C.S., In "La Théorie des Images Optiques", Éditions de la Revue d'optique (1949).
- [6] Buchdal, *Optical Aberration Coefficient*, Oxford (1954).
- [7] 王之江, 第一次全國光學設計報告會匯編 (1959).
- [8] Губель, *Оптика и Спектроскоп* **1** (1956), 783.
- [9] Conrady, A. E., *Microscop, Optics of* In Glazebrook: A. *Dictionary of Applied Physics* vol. IV (1923).

THEORY OF HIGH ORDER ABERRATIONS

WANG CHIH-CHIANG

ABSTRACT

This paper is to discuss the properties of high order aberrations taking advantage of as much as possible of using the methods of approximation. The number of independent terms of secondary aberrations is first accessed and its geometrical significance ascertained. By a coordinate transformation the effects of the change of stop position on aberration coefficients are determined. The relations between the position of the object and its aberration coefficients are found on the basis of Fermat principle, by regarding each ray as emitting from different object points lying along this ray.

The high order aberrations can be regarded as coming from two sources. The first is of "intrinsic" origin caused by the refracting surface proper, the incident beam being regarded free from aberrations. All aberrations of this origin can be represented in terms of high order spherical aberration and off-axis spherical aberration introduced by the respective surface. The other is of sequential character, introduced on account of the presence of primary aberration of the incident beam introduced by the preceeding refracting surfaces.

The derivations so arrived may not accord exactly with theory but they are close enough for practical purposes so as to access the origin of various aberrations as well as to give a quantitative estimation of them.

The application of Fermat principle to the question of high order chromatic aberration with advantage takes into account of the fact that the method is true only because all other aberrations are already nearly corrected in a given optical system.