

π^+ 介子辐射衰变分枝比*

陈炎發 宋 澳
(中山大学物理系)

提 要

本文应用标准微扰方法计算 π^+ 介子衰变过程中 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 对 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ 的分枝比。文中应用了 V-A 型普适费米弱作用及萨拉姆提出的强作用。计算结果与目前实验结果没有矛盾。

一、引 言

费曼-盖尔曼^[1]和夏马克森德香^[2]所提出的费米子之间的普适弱作用理论应用于 β 衰变等弱作用现象得到很好的结果。中国科学院原子能所的同志利用费曼-盖尔曼等人提出的费米子普适弱作用哈密顿量密度及萨拉姆所提出的强相互作用哈密顿量密度,用截断方法来处理真空极化带来的无穷大,所算出的 K^+ 介子衰变的分枝比和实验结果符合得不错。本文应用同样的方法来计算 π^+ 介子的辐射衰变

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma \quad (1)$$

对

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \quad (2)$$

的分枝比。我们的结果是 $W_\gamma:W_\mu = 1.23 \times 10^{-5}$ 。目前实验结果是 $W_\gamma:W_\mu \lesssim 10^{-4}$ 。后来,我们发现用切断方法计算出来的结果和利用规范不变性算出的结果是一样的。后者考虑到图 2(3) 中高能光子的贡献后得到和截断方法无关的结果,这样计算出的分枝比是 1.3×10^{-5} 。由此可见,用这种截断方法来计算分枝比仍然可行。在本例中计算产生的相对误差为 6%,仍然能得出主要项,和目前实验结果没有矛盾。

二、相互作用哈密顿量密度和 S 矩阵元

我们假设: π^+ 介子的衰变是通过真空极化来进行的。 π^+ 介子首先转化为一对重粒子,这对重粒子经过普适弱作用转化为 μ^+ 介子(或正电子)及中微子,而整个过程中的带电粒子都可以产生光子。我们仍用费曼-盖尔曼等人提出的普适弱相互作用和萨拉姆所提出的强相互作用哈密顿量密度

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{A} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) B) (\bar{C} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) D), \quad (3)$$

* 1960年1月24日收到。

$$H_s = \sum_{n=1}^8 g_n H_n. \quad (4)$$

上式中的符号和以后本文所用的符号都和文献^[3]中的一样。

电磁作用哈密顿量密度为 $-j_\mu A_\mu$,

$$\text{电子: } -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu, \quad (5)$$

$$\text{介子: } -ie(\partial_\mu\varphi^* \cdot \varphi - \varphi^*\partial_\mu\varphi)A_\mu. \quad (6)$$

π^+ 介子二体衰变的费曼图如图 1.

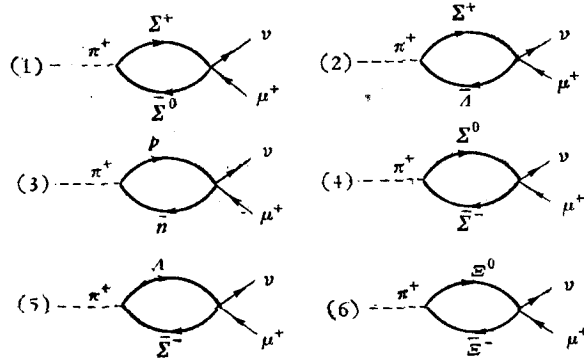


图 1

据(2),(3),(4)按费曼图写出矩阵元:

$$S_2 = \frac{-1}{\sqrt{2\omega_\pi}} \langle \nu | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | \mu^+ \rangle \sum_{n=1}^6 I_n. \quad (7)$$

例如 1(1) 的贡献 I_1 为

$$I_1 = \frac{-ig_3 G}{\sqrt{2}} \int \text{Spur} \left\{ \frac{i\hat{p} - m_{\Sigma^+}}{p^2 + m_{\Sigma^+}^2} \gamma_5 \frac{i(\hat{p} - \hat{K}) - m_{\Sigma^0}}{(p-K)^2 + m_{\Sigma^0}^2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right\} d^4 p \quad (8)$$

其中 K 为 π^+ 介子的动量能量四维矢, m_{Σ^+} , m_{Σ^0} 为 Σ^+ , Σ^0 的质量. 图 1 中其余费曼图的贡献可以照样写出.

我们再画出 π^+ 介子辐射衰变的费曼图, 它们总共有十八个, 因为在二体衰变中每一个带电粒子都可以产生光子. 其中三个有如图 2 所示.

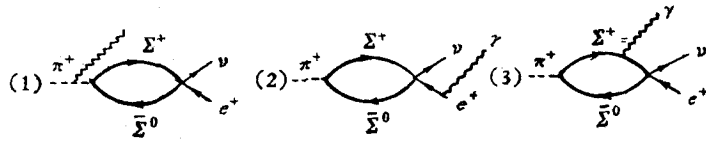


图 2

三种类型过程相应的矩阵元是:

$$S_3 = S'_3 + S''_3 + S'''_3. \quad (9)$$

S'_3 , S''_3 , S'''_3 分别是:

$$S'_3 = \frac{-e}{2\sqrt{\omega_\pi\omega}} \langle \nu | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e^+ \rangle \varepsilon_\nu \frac{(2K_\nu - k_\nu)}{(K-k)^2 + m_\pi^2} \sum_{n=1}^6 I_n, \quad (10)$$

$$S_3'' = \frac{ie}{2\sqrt{\omega_\pi\omega}} \langle v | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{p} - \hat{K}) - m_e}{(p - K)^2 + m_e^2} \gamma_\nu \varepsilon_\nu | e^+ \rangle \sum_{n=1}^6 I_n, \quad (11)$$

$$S_3''' = \frac{-1}{2\sqrt{\omega_\pi\omega}} \langle v | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e^+ \rangle \sum_{n=1}^6 J_n; \quad (12)$$

其中 $K, k, -p$, 是 π^+ 介子, 光子, 正电子的动量能量四维矢; ε_ν 是光子极化四维矢; ω 是光子的能量; m_π 是 π^+ 介子的静止质量; m_e 是电子的静止质量. I_n 的意义和 (7) 式的一样. 和图 2 (3) 相应的 J_1 为

$$J_1 = \frac{eg_3 G}{\sqrt{2}} \int \text{Spur} \left\{ \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m_{\Sigma^+}}{(p - k)^2 + m_{\Sigma^+}^2} \gamma_\nu \varepsilon_\nu \frac{i\hat{p} - m_{\Sigma^+}}{p^2 + m_{\Sigma^+}^2} \cdot \frac{i(\hat{p} - \hat{K}) + m_{\Sigma^0}}{(p - K)^2 + m_{\Sigma^0}^2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right\} d^4 p. \quad (13)$$

其余五项可以同样写出.

三、跃迁几率的计算

要讨论的积分有两类:

$$I = \int \text{Spur} \left\{ \frac{i\hat{p} - m_2}{p^2 - m_2^2} \gamma_5 \frac{i(\hat{p} - \hat{K}) - m_1}{(p - K)^2 - m_1^2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right\} d^4 p, \quad (14)$$

$$J = \int \text{Spur} \left\{ \frac{i(\hat{p} - \hat{k}_1) - m_1}{(p - k_1)^2 + m_1^2} \gamma_\nu \varepsilon_\nu \frac{i\hat{p} - m_2}{p^2 + m_2^2} \cdot \frac{i(\hat{p} - \hat{k}_3) + m_3}{(p - k_3)^2 + m_3^2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right\} d^4 p. \quad (15)$$

根据文献[3]利用截断方法算出 I 为

$$I \cong -2\pi^2 K_\mu (m_1 + m_2) \ln \beta^2, \quad (16)$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda^2}{m^2}, \quad \overline{m^2} = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2).$$

下面我们来计算 J , 先计算 J 中的迹, 分子

$$L = \frac{1}{4} \text{Spur} \{ [i(\hat{p} - \hat{k}_1) - m_1] \gamma_\nu \varepsilon_\nu [i\hat{p} - m_2] [i(\hat{p} - \hat{k}_3) + m_3] \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \} =$$

$$= m_1 (p_2 p_3 \varepsilon_\mu + p_{2\nu} \varepsilon_\nu p_{3\mu} - p_{3\nu} \varepsilon_\nu p_{2\mu}) + m_2 (p_{1\nu} \varepsilon_\nu p_{3\mu} + p_{3\mu} \varepsilon_\nu p_{1\mu} - p_{1\nu} p_{3\mu}) - m_3 (p_{1\nu} \varepsilon_\nu p_{2\mu} +$$

$$+ p_{2\nu} \varepsilon_\nu p_{1\mu} - p_{1\nu} p_{2\mu}) - m_1 \Delta_{1\mu} - m_2 \Delta_{2\mu} + m_3 \Delta_{3\mu} + m_1 m_2 m_3 \varepsilon_\mu.$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= p - k_1, & p_2 &= p, & p_3 &= p - k_3, \\ p_{1\mu} &= p_\mu - k_{1\mu}, & p_{2\mu} &= p_\mu, & p_{3\mu} &= p_\mu - k_{3\mu}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta_{1\mu} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ \delta_{\mu 1} & \delta_{\mu 2} & \delta_{\mu 3} & \delta_{\mu 4} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2\mu} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ \delta_{\mu 1} & \delta_{\mu 2} & \delta_{\mu 3} & \delta_{\mu 4} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3\mu} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \delta_{\mu 1} & \delta_{\mu 2} & \delta_{\mu 3} & \delta_{\mu 4} \end{vmatrix}.$$

按照标准方法插入因子 $\frac{\lambda^2}{p^2 + \lambda^2}$ 截断高能重粒子的贡献. J 换成下面的形状:

$$J = 24\lambda^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int d^4 p \frac{L}{((p - e)^2 + d^2)^4}, \quad (18)$$

d 和 e 只和分母有关, 故和文献[3]公式[20]中的一样, 只其中 $k_2=0$. 坐标平移后, L 中的

p_μ 项积分后为零.

$$L \rightarrow L', \quad L' = \xi p^2 + \eta,$$

其中 ξ 为 p^2 的系数, η 表示和 p^2 无关的项的和, 因为 $\xi p^2 = p^2 (m_1 - m_2 + m_3) \varepsilon_\mu + 2p_\nu^2 (m_2 - m_3) \varepsilon_\mu$, 及在积分中有 $p_\nu^2 = \frac{p^2}{4}$,

$$\therefore \xi = \left(m_1 - \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} \right) \varepsilon_\mu, \quad (19)$$

$$\therefore J = 24\lambda^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int d^4 p \frac{\xi p^2 + \eta}{(p^2 + d^2)^2}. \quad (20)$$

对 p 积分得

$$J = 4\pi^2 i \lambda^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \left\{ \frac{2\xi}{d^2} + \frac{\eta}{d^4} \right\}. \quad (21)$$

略去含 η 项及 d^2 中含 k 的项, 再对 $x_1 x_2 x_3$ 积分后得到

$$J \cong -2\pi^2 i \varepsilon_\mu (m_1 + m_3) \ln \beta^2. \quad (22)$$

在上式中已利用 $m_1 = m_2$, 符号 $\beta^2 = \frac{\lambda^2}{m^2}$, $\bar{m}^2 = \frac{1}{3}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$.

为了计算 S_2, S_3 的数值, 在 I 和 J 中的 β 取同一数值, 强作用常数采取盖尔曼假定:

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_\pi.$$

计算 S_2 : 把中间态的重子质量数值代入 I_n 中,

$$S_2 = \frac{i 8.25 \sqrt{2} \pi^2 G g_\pi m_N \ln \beta^2}{\sqrt{\omega_\pi}} \cdot \langle \nu | \hat{K} (1 + \gamma_5) | \mu^+ \rangle. \quad (23)$$

对中微子及 μ^+ 介子自旋求和后得

$$\Sigma |S_2|^2 = 4(8.25)^2 \pi^4 m_N^2 m_\pi g_\pi^2 G^2 (\ln \beta^2)^2 (1 - \frac{v_\mu}{c}), \quad (24)$$

v_μ 是 μ^+ 介子在 π^+ 介子在静止坐标中的速度.

对中微子及 μ^+ 介子计算相空间积分, 最后可算出二体衰变跃迁几率 W_μ 为

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{(2\pi)^{10}} \int \Sigma |S_2|^2 d^3 p_\nu \delta(E_f - E_i) = \frac{1}{(2\pi)^{10}} \int \Sigma |S_2|^2 p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f d\Omega = \\ &= \frac{(8.33)^2}{2^6 \pi^4} (G m_N)^2 \left(\frac{g_\pi^2}{4\pi} \right) (\ln \beta)^2 \frac{1}{m_N^2} \left[\frac{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{m_\pi^3} \right] \cdot \frac{c^2}{\hbar}. \end{aligned} \quad (25)$$

S_3 的计算: 选择 π^+ 介子静止坐标系及特殊规范使 $\varepsilon = \varepsilon_4$, 这样 $K \cdot \varepsilon_\mu = 0$, 又由罗伦兹条件 $k_\nu \varepsilon_\nu = 0$, 故 $S_3' = 0$.

把 I, J 数值代入 (9), (11), (12) 三式, 利用狄拉克方程化简后得到

$$S_3 = S_3'' + S_3''' = \frac{8.33 m_N m_e \pi^2 e g_\pi G \ln \beta^2}{\sqrt{m_\pi \omega}} \langle \nu | (1 - \gamma_5) \frac{\hat{\varepsilon} \hat{k} + 2 p_e \cdot \varepsilon}{2 p_e \cdot k} | e^+ \rangle \quad (26)$$

式中 p_e 是正电子真实动量能量四维矢, 即 $p_e = -p$. 对 ν, e^+ 自旋求和后得到

$$\begin{aligned} \Sigma |S_3|^2 &= \frac{2(8.33)^2 m_N^2 m_e^2 \pi^4 e^2 g_\pi^2 G^2 (\ln \beta^2)^2}{m_\pi \omega (p \cdot k)^2} \frac{1}{E_e E_\nu} \left[(p \cdot k)(k \cdot q) - \right. \\ &\quad \left. - p^2 \sin^2 \theta ((p \cdot q) - (k \cdot K)) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

q 是中微子动量, θ 是光子中微子动量的夹角. 对动量空间积分, 就求得辐射衰变跃迁几率:

$$W_T = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |S_3|^2 d^3 p_\mu d^3 p_\nu \delta(E_f - E_i) =$$

$$= \frac{(8.33)^2}{2^5 \pi^5} (G m_N)^2 \left(\frac{m_\nu}{m_N} \right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \left(\frac{g_\nu}{4\pi} \right)^2 (\ln \beta^2)^2 5597 \frac{c^2}{\hbar}, \quad (28)$$

相对几率

$$W_T : W_\mu \cong 1.23 \times 10^{-5}. \quad (29)$$

实验结果是 $W_T : W_\mu \lesssim 10^{-4}$, 计算结果和实验结果^[4]并不矛盾.

参 考 文 献

- [1] Feynman, R. P. and Gell-man, M., *Phys. Rev.* **109** (1958), 193.
- [2] Sundershan, G. and Marshak, R., *Phys. Rev.* **109** (1958), 1860.
- [3] 李文鏞等, 物理学报, 15 卷 1 期, 1959 年.
- [4] Fazzini, T., et al. *Phys. Rev. Let* **1** (1958), 247; Impeduglia, G., et al. *Phys. Rev. Let* **1** (1958), 249.

THE BRANCHING RATIO OF RADIATIVE DECAY OF π^+ MESONS

CHEN YEN-FA SONG YUH

(Chung-San University, Physics Department)

ABSTRACT

The branching ratio of

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$$

to

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

is calculated by standard perturbation method. The universal Fermi weak interaction of V-A type and a strong interaction proposed by Salam are assumed. The result does not contradict with the most recent experiment.