

# $\pi$ 介子核子碰撞产生 $\pi$ 介子的色散关系\*

周光召 戴元本  
(北京大学) (中国科学院)

## 提 要

本文討論了 $\pi$ 介子核子碰撞产生 $\pi$ 介子的色散关系,計算了束縛态的貢獻。所用的方法是把核子場的算符由态矢量中提出来,对运动学和对称性作了較詳細的分析。

## 一、引 言

$\pi$ 介子核子碰撞产生 $\pi$ 介子的色散关系,最近曾由 Логунов, Тодоров<sup>[1]</sup> 及 Screation<sup>[2]</sup> 討論过。这些作者所用的方法是把 $\pi$ 介子場的算符由态矢量中提出来。本文对 $\pi$ 介子核子碰撞产生 $\pi$ 介子的色散关系作了較詳細的討論;所用的方法是把核子場算符由态矢量中提出来,此时色散关系可以取較文献[2,1]中更为簡單的形式。

第二节討論了 Breit 系中的独立变量;第三节中利用 Боголюбов 的方法得到散射振幅的表示式,并引入了相应的推迟因果振幅与超前因果振幅;第四节利用散射振幅对洛仑兹变换及同位旋空間轉动的不变性将散射振幅分解为一些独立的分量;第五节利用弱反演及电荷共轭不变性将散射振幅的实部和虚部分出来,并得到交叉对称的关系;第六节討論了吸收部分的譜分析;第七节中写出了色散关系;第八节中計算出束縛态对色散关系的貢獻,并討論了它与弹性散射振幅的关系。

## 二、运动学的考虑

令  $p, q$  代表初态核子和 $\pi$ 介子的动量,  $p'$  和  $q_1, q_2$  代表末态核子和 $\pi$ 介子的动量。它們滿足动量能量守恒定律:

$$p + q = p' + q_1 + q_2 \quad (1)$$

及关系式

$$p^2 = p'^2 = -M^2, \quad q^2 = q_1^2 = q_2^2 = -\mu^2, \quad (2)$$

其中  $M$  和  $\mu$  为核子与 $\pi$ 介子的质量。令

$$q' \equiv q_1 + q_2, \quad l \equiv \frac{1}{2}(q_2 - q_1). \quad (3)$$

我們选取 Breit 坐标系,它滿足条件:

$$\mathbf{q} + \alpha \mathbf{q}' = 0,$$

其中  $\alpha$  的值要使得

\* 1960年2月14日收到。

$$q_0 = q'_0, \quad (5)$$

令

$$q'^2 \equiv -m^2, \quad (6)$$

則有

$$\alpha^2 = 1 + \frac{m^2 - \mu^2}{|\mathbf{q}'|^2}. \quad (7)$$

令

$$2P = p + p', \quad \Delta \equiv (p - p') = (q' - q), \quad (8)$$

$$\omega \equiv p_0 = p'_0, \quad (9)$$

則有

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}' = 0. \quad (10)$$

引进  $\mathbf{P}$  方向的单位矢量  $\mathbf{e}$ , 則有

$$\mathbf{P} = \left( \omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}, \quad (11)$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{q}' = 0. \quad (12)$$

在条件(1),(2),(4)下,只有八个独立的动量分量. 如果再固定  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{q}$  的方向, 由于有关系式(12), 还有五个独立变量, 可选为  $\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}$ , 所有的动量分量都可用这五个变量表示. 如果选取  $\mathbf{q}$  的方向为  $z$  轴,  $\mathbf{e}$  与  $\mathbf{q}$  垂直可选为  $x$  轴方向, 則有

$$\begin{aligned} p &= \left( \sqrt{\omega^2 - \frac{\Delta^2}{4} - M^2}, \quad 0, -\frac{1}{2} |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}, \omega \right), \\ p' &= \left( \sqrt{\omega^2 - \frac{\Delta^2}{4} - M^2}, \quad 0, \frac{1}{2} |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}, \omega \right), \\ q &= \left( 0, 0, \frac{1}{2 |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}} (\Delta^2 + m^2 - \mu^2), \frac{1}{2 |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(\Delta^2 + m^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \Delta^2} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{2} q' - l, \\ q_2 &= \frac{1}{2} q' + l, \\ q' &= \left( 0, 0, -\frac{1}{2 |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}} (\Delta^2 - m^2 + \mu^2), \frac{1}{2 |\Delta^2|^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(\Delta^2 + m^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \Delta^2} \right), \\ l &= \left( \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}, \sqrt{\frac{1}{4} m^2 - \mu^2 - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})^2} - \frac{4\Delta^2 m^2}{(\Delta^2 - m^2 + \mu^2)^2} l_0^2, \right. \\ &\quad \left. - l_0 \frac{\sqrt{(\Delta^2 - m^2 + \mu^2)^2 + 4\Delta^2 m^2}}{\Delta^2 - m^2 + \mu^2}, l_0 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

对这五个独立变量的物理限制为:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{1}{4} \Delta^2 + M^2}, \quad (14)$$

$$l_0^2 \leq \frac{1}{16\Delta^2 m^2} [m^2 - 4\mu^2 - 4(\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})^2](\Delta^2 - m^2 + \mu^2)^2. \quad (15)$$

如令

$$Q = \frac{1}{2} (q + \alpha q'), \quad (16)$$

则在 Breit 系中  $\omega, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}$  可以用标量表示出来.

$$\omega = -\frac{2P \cdot Q}{(1 + \alpha)q_0}. \quad (17)$$

由于  $\alpha, q_0$  均为标量  $\Delta^2$  的函数, 故  $\omega$  为标量  $P \cdot Q$  及  $\Delta^2$  的函数. 同样有

$$l_0 = -\frac{2l \cdot Q}{(1 + \alpha)q_0}, \quad (18)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{p} + l_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2}}. \quad (19)$$

故我们选择的五个量  $\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}$  可以用另外五个标量  $P \cdot Q, \Delta^2, m^2, l \cdot Q$  及  $l \cdot P$  表示出来. 因为在条件(1),(2),(4)下, 只有五个独立的标量, 所以标量函数在 Breit 系中都可由  $\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}$  来表示.

### 三、散 射 振 幅

我们来利用 Боголюбов<sup>[3]</sup> 的方法写出  $S$  矩阵元:

$$\langle p', q_1, q_2 | S | p, q \rangle = \langle q_1, q_2 | a_{p'} S a_p^+ | q \rangle$$

其中  $a^+, a$  为核子的产生与消灭算符. 利用公式

$$aA = \int [a, \bar{\psi}_z(x)]_+ \frac{\delta A}{\delta \bar{\psi}_z(x)} dx + (-1)^{N_A} Aa \quad (20)$$

(其中  $N_A$  为  $A$  中包含核子场算符  $\psi$  的个数),  $S$  矩阵可写为

$$\begin{aligned} \langle p', q_1, q_2 | S | p, q \rangle &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M^2}{E_p E_{p'}}} \iint \bar{u}_{p'\lambda} \cdot \\ &\cdot \langle q_1, q_2 | \left[ \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\nu(y) \delta \bar{\psi}_\lambda(x)} \right] | q \rangle u_{p\nu} e^{-i(p'x + py)} d^4x d^4y. \end{aligned} \quad (21)$$

由平移不变性有:

$$U_a |p\rangle = e^{ipa} |p\rangle, \quad U_a \psi(x) U_a^{-1} = \psi(x - a), \quad (22)$$

其中  $U_a$  为平移么正算符. 利用(22)与(21)可得

$$\begin{aligned} \langle p', q_1, q_2 | S | p, q \rangle &= -(2\pi) \delta^4(p + q - p' - q_1 - q_2) \sqrt{\frac{M^2}{E_p E_{p'}}} \int \bar{u}_{p'\lambda} \cdot \\ &\cdot \langle q_1 q_2 | \left[ \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\nu\left(-\frac{z}{2}\right) \delta \bar{\psi}_\lambda\left(\frac{z}{2}\right)} \right] | q \rangle u_{p\lambda} e^{-i(p+p')z/2} d^4z. \end{aligned} \quad (23)$$

引入核子流密度  $j$ :

$$j_\lambda(x) \equiv -i \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_\lambda(x)} S^+. \quad (24)$$

考虑到核子场算符的反对易性, 可以证明:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\nu(y) \delta \bar{\psi}_\lambda(x)} S^+ = i \frac{\delta j_\lambda(x)}{\delta \psi_\nu(y)} - j_\lambda(x) \bar{j}_\nu(y) = i \frac{\delta \bar{j}_\nu(y)}{\delta \bar{\psi}_\lambda(x)} + \bar{j}_\nu(y) j_\lambda(x). \quad (25)$$

利用因果性条件,

$$\frac{\delta j(x)}{\delta \psi(y)} = 0 \quad \text{当 } x \gtrsim y, \quad (26)$$

由(25)得到:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\nu(y) \delta \bar{\psi}_\lambda(x)} S^+ = T(\bar{j}(y) j(x)). \quad (27)$$

将(27)代入(23), 得

$$\begin{aligned} \langle p', q_1, q_2 | S | p, q \rangle &= 2\pi \delta^4(p + q - p' - q_1 - q_2) \sqrt{\frac{M^2}{E_p E_{p'}}} \int \bar{u}_{p', \lambda} \cdot \\ &\cdot \langle q_1 q_2 | T \left( j_\lambda \left( \frac{z}{2} \right) \bar{j}_\nu \left( -\frac{z}{2} \right) \right) | q \rangle \times u_{p\nu} e^{-i(p+p')z/2} d^4 z = \\ &= \frac{i}{2\pi} \delta^4(p + q - p' - q_1 - q_2) \sqrt{\frac{M}{E_p E_{p'}}} \sqrt{\frac{1}{8q_0 q_{10} q_{20}}} F(p', q_1, q_2, p, q). \quad (28) \end{aligned}$$

其中  $F$  为费曼振幅, 令  $\beta, \alpha$  为初态核子及  $\pi$  介子的同位旋指标,  $\beta'$  及  $\alpha_1, \alpha_2$  为末态核子及  $\pi$  介子的同位旋指标,  $S'$  及  $S$  为末态及初态的核子自旋指标, 包括同位旋及自旋指标在内, 费曼振幅可写为

$$\begin{aligned} F_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S}(p', q_1, q_2; p, q) &= -i(2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(p+p')z/2} \bar{u}_{p', \lambda}^{S'} \cdot \\ &\cdot \langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | T \left( j_\lambda^{\beta'} \left( \frac{z}{2} \right) \bar{j}_\nu^{\beta} \left( -\frac{z}{2} \right) \right) | q \alpha \rangle u_{p\nu}^S d^4 z. \quad (29) \end{aligned}$$

引入推迟因果振幅  $M^r$  及超前因果振幅  $M^a$ :

$$\begin{aligned} M_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S r}(p', q_1, q_2; p, q) &= -i(2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(p+p')z/2} \theta(z) \bar{u}_{p', \lambda}^{S'} \cdot \\ &\cdot \langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | \left[ j_\lambda^{\beta'} \left( \frac{z}{2} \right) \bar{j}_\nu^{\beta} \left( -\frac{z}{2} \right) \right]_+ | q \alpha \rangle u_{p\nu}^S d^4 z, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S a}(p', q_1, q_2; p, q) &= i(2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(p+p')z/2} \theta(-z) \bar{u}_{p', \lambda}^{S'} \cdot \\ &\cdot \langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | \left[ j_\lambda^{\beta'} \left( \frac{z}{2} \right) \bar{j}_\nu^{\beta} \left( -\frac{z}{2} \right) \right]_+ | q \alpha \rangle u_{p\nu}^S d^4 z. \quad (31) \end{aligned}$$

以后会看到, 对于物理的能量值  $M^r$  与  $F$  相等.

令

$$M^r = D + iA, \quad M^a = D - iA, \quad (32)$$

$D, A$  分别称为色散部分与吸收部分. 令

$$\begin{aligned} M_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S r} &= \bar{u}_{p'}^{S'} \mathfrak{M}_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S'} u_p^S, & M_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S a} &= \bar{u}_{p'}^{S'} \mathfrak{M}_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^a u_p^S, \\ D_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S} &= \bar{u}_{p'}^{S'} \mathfrak{D}_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha} u_p^S, & A_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha}^{S' S} &= \bar{u}_{p'}^{S'} \mathfrak{A}_{\beta' \alpha_1 \alpha_2; \beta \alpha} u_p^S, \end{aligned}$$

$$F_{\beta a_1 a_2 \beta a}^{S'S} = \bar{u}_{p'}^{S'} \mathfrak{F}_{\beta' a_1 a_2 \beta a} u_p^S. \quad (33)$$

其中  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{F}$  为核子旋量空间的矩阵。这些矩阵中的  $i\gamma \cdot p$ ,  $i\gamma \cdot p'$  项我们理解作已利用狄拉克方程化掉。

#### 四、自旋同位旋结构

我们现在利用散射振幅在洛仑茨变换与同位旋空间转动下的变换性质将它们分解为一些独立的成分。由(29), (30), (31)可以看到, 引入的散射振幅在固有洛仑茨变换下保持不变; 又由于初态与末态共有奇数个  $\pi$  介子, 故散射振幅在空间反演下为赝标量。考虑到狄拉克方程, 由  $\gamma$  矩阵及有关动量只能组成四个独立的赝标量, 我们取为  $\bar{u}_p \Gamma^i u_p$ :

$$\Gamma^0 = i\gamma_5, \quad \Gamma^1 = \gamma \cdot q \gamma_5, \quad \Gamma^2 = \gamma \cdot l \gamma_5, \quad \Gamma^3 = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q_\mu l_\nu \gamma_5. \quad (34)$$

由强相互作用的电荷无关性可以知道, 散射振幅在与同位旋空间的波函数相乘后应为同位旋空间的标量, 利用核子的同位旋算符  $\tau$  可以构成四个独立的满足此要求的算符, 我们取为

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{1}{2}[\delta_{a_2 a} \tau_{a_1} + \delta_{a_1 a} \tau_{a_2}], & I^2 &= \frac{1}{2}[\delta_{a_2 a} \tau_{a_1} - \delta_{a_1 a} \tau_{a_2}], \\ I^3 &= \delta_{a_1 a_2} \tau_a, & I^4 &= i\epsilon_{a_1 a_2 a}. \end{aligned} \quad (35)$$

利用(34), (35), 可以将  $\mathfrak{M}$  分解为

$$\mathfrak{M}_{\beta' \beta} = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{M}_i I^i I_{\beta' \beta}. \quad (36)$$

对于  $\mathfrak{D}$  和  $\mathfrak{A}$  有相似的分解公式。

#### 五、对称性质

现在我们来证明  $\mathfrak{D}_i^j$  和  $\mathfrak{A}_i^j$  为实函数。令  $R$  为弱反演么正算符<sup>[4]</sup>,

$$R\psi(x)R^{-1} = \eta D\bar{\psi}(-x), \quad Rj(x)R^{-1} = \eta D\bar{j}(-x), \quad (37)$$

其中  $D$  适合

$$DD^+ = 1, \quad D = -D^T, \quad D\gamma_\mu^T D^{-1} = \gamma_\mu \quad (38)$$

$\eta$  为相因子。设  $\pi$  介子与核子的相互作用哈密顿密度为

$$H = Gi\bar{\psi}\gamma_5\tau_a\psi\phi_a, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (39)$$

考虑到  $\tau_2$  纯虚,  $\tau_1, \tau_3$  为实矩阵, 要求  $H$  在弱反演下不变, 我们有

$$R\phi_a(x)R^{-1} = -(-1)^a\phi_a(-x); \quad (40)$$

由此得

$$R|q\alpha\rangle = -(-1)^a\langle q\alpha|. \quad (41)$$

利用(37)(41), 容易证明:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\beta' a_1 a_2 \beta a}^{S'S}(p', q_1, q_2; p, q)_{\lambda\nu}^* &= i(-1)^{a_1+a_2+a+1}(2\pi)^2(8q_0q_{10}q_{20})^{\frac{1}{2}} \\ &\times \int e^{-i(p+p')x/2} \theta(-z) (\gamma_4 D)_{\nu\nu'} \langle q_1 a_1, q_2 a_2 | \left[ j_{\lambda'}^{\beta'}\left(\frac{z}{2}\right), j_{\nu'}^{\beta}\left(-\frac{z}{2}\right) \right]_+ | q\alpha \rangle (D^{-1}\gamma_4)_{\lambda'\lambda} d^4z = \\ &= (-1)^{a+a_1+a_2+1} [D^+ \gamma_4 \mathfrak{M}_{\beta' a_1 a_2 \beta a}^{S'S}(p', q_1, q_2; p, q) \gamma_4 D]_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (42)$$

由(35)考虑到  $\tau_2$  純虛有

$$(-1)^{a+a_1+a_2} I^{i*} = -I^i. \quad (43)$$

由(34)得到

$$D^{-1} \gamma_4 I^{i*} \gamma_4 D = I^i. \quad (44)$$

由(42), (43), (44)立刻得到

$$\mathfrak{M}_i^{i*} = \mathfrak{M}_i^{ii}. \quad (45)$$

由上式及(32), 得

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_j^{i*} &= \mathfrak{D}_j^i, \\ \mathfrak{V}_j^{i*} &= \mathfrak{V}_j^i, \end{aligned} \quad (46)$$

即  $\mathfrak{D}_j^i$  和  $\mathfrak{V}_j^i$  都是实函数.

我們利用电荷共轭变换来求得交叉对称关系. 核子場算符的电荷共轭变换为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} C\psi(x)C^{-1} &= \eta_c \bar{c}\psi(x), \quad Cj(x)C^{-1} = \eta_c c j_{\nu'}^{\beta'}(x), \\ c &= D\gamma_5, \quad c c^+ = 1, \quad c \gamma_\mu^T c^{-1} = -\gamma_\mu, \quad c = -c^T, \end{aligned} \quad (47)$$

其中  $C$  为电荷共轭变换的么正算符. 要求哈密頓密度(39)在电荷共轭下不变, 考虑到  $\tau$  純虛, 对于介子場有

$$C\varphi_a(x)C^{-1} = -(-1)^a \varphi_a(x). \quad (48)$$

利用(67)(68)得

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(-p', q_1, q_2; -p, q)_{\lambda\nu} &= (-1)^{a+a_1+a_2} i (2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \int e^{i(p+p')z/2} \theta(z) C_{\lambda\lambda'} \langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | \left[ j_{\nu'}^{\beta'} \left( -\frac{z}{2} \right), j_{\lambda'}^{\beta'} \left( \frac{z}{2} \right) \right]_+ | q \alpha \rangle C_{\nu\nu'}^{-1} d^4 z = \\ &= (-1)^{a+a_1+a_2} (C \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}^a(p', q_1, q_2; p, q) C^{-1})_{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (49)$$

由(42), (47), (49), 得

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(-p', q_1, q_2; -p, q)_{\lambda\nu} &= \\ &= -[\gamma_4 \gamma_5^T \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(p', q_1, q_2; p, q)^{*T} \times \gamma_5^T \gamma_4]_{\lambda\nu} \end{aligned} \quad (50)$$

由(34), (35),

$$\gamma_4 \gamma_5^T \Gamma^{i+} \gamma_5^T \gamma_4 = \epsilon^i \Gamma^i \quad \epsilon^i = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \epsilon^4 = -1; \quad (51)$$

$$I_{\beta'\beta}^{i*} = \epsilon_j I_{\beta\beta'}^i \quad \epsilon_j = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad \epsilon_4 = -1, \quad (52)$$

令

$$\epsilon_j^i = \epsilon^i \epsilon_j, \quad (53)$$

用第(一)节中所引入的独立变量  $\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}$ , 并引入

$$\begin{aligned} S^+ \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} [\mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) + \\ &+ \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, -\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})] \omega^2 - M^2 - \frac{1}{4} \Delta^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} S^- \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) &= \frac{1}{2i} [\mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) - \\ &- \mathfrak{M}_{\beta'a_1a_2;\beta a}(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, -\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})] \omega^2 - M^2 - \frac{1}{4} \Delta^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (55)$$

由(52)至(55)式, 得到

$$S^\pm \mathfrak{M}_j^i(-\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) = -\epsilon_j^i S^\pm \mathfrak{M}_j^i(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e})^*, \quad (56)$$

$$\therefore S^\pm \mathfrak{V}_j^i(-\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) = \pm \epsilon_j^i S^\pm \mathfrak{V}_j^i(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}). \quad (57)$$

## 六、吸收部分的譜分析

利用(30)至(33)式可以求得  $\mathfrak{A}$  的表示式:

$$(\mathfrak{A}_{\beta'\alpha_1\alpha_2;\beta\alpha})_{\lambda\nu} = -2\pi^2(8q_0q_{10}q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{-iP\cdot z} \langle q_1\alpha_1, q_2\alpha_2 | \left[ j_{\lambda}^{\beta'}\left(\frac{z}{2}\right), j_{\nu}^{\beta}\left(-\frac{z}{2}\right) \right]_+ | q\alpha \rangle d^4z. \quad (58)$$

应用完全的中間态系及平移不变性,略去同位旋,自旋指标可将  $\mathfrak{A}$  写为

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -2^5\pi^6(8q_0q_{10}q_{20})^{\frac{1}{2}} \sum_n \left[ \delta^4\left(-P + \frac{q_1 + q_2 + q}{2} - p_n\right) \langle q_1, q_2 | j(0) | n \rangle \cdot \right. \\ &\quad \cdot \langle n | j(0) | q \rangle + \delta^4\left(-P - \frac{q_1 + q_2 + q}{2} + p_n\right) \langle q_1, q_2 | j(0) | n \rangle \langle n | j(0) | q \rangle \Big] = \\ &= \mathfrak{A}^- + \mathfrak{A}^+, \end{aligned} \quad (59)$$

其中  $p_n$  为中間态的总动量,  $p_n^2 \equiv -M_n^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^- &= -2^5\pi^6(8q_0q_{10}q_{20})^{\frac{1}{2}} \sum_n \delta^4\left(-P + \frac{q_1 + q_2 + q}{2} - p_n\right) \langle q_1, q_2 | j(0) | n \rangle \langle n | j(0) | q \rangle, \\ \mathfrak{A}^+ &= -2^5\pi^6(8q_0q_{10}q_{20})^{\frac{1}{2}} \sum_n \delta^4\left(-P - \frac{q_1 + q_2 + q}{2} + p_n\right) \langle q_1, q_2 | j(0) | n \rangle \langle n | j(0) | q \rangle. \end{aligned} \quad (60)$$

由(57),(60)可以看到,

$$S^\pm \mathfrak{A}_j^\mp(\omega) = \varepsilon_j S^\pm \mathfrak{A}_j^\mp(-\omega), \quad (61)$$

故只須研究  $\mathfrak{A}^+$  就够了. 令

$$W = -\left(P + \frac{q + q_1 + q_2}{2}\right)^2, \quad (62)$$

对于  $A^+$  有:

$$W = -p_n^2 = M_n^2. \quad (63)$$

有贡献的中間态最低为单核子态,其次为单核子加单介子态. 故在  $W = M^2$  处,  $\mathfrak{A}^+$  有一孤立奇点,在  $W > (M + \mu)^2$  处有連續譜. 由第(一)节中的公式容易得到:

$$W = M^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \mu^2) + \frac{\omega}{|\Delta^2|^{1/2}} \sqrt{(\Delta^2 + \mu^2 - m^2)^2 + 4\Delta^2 m^2} + \frac{1}{2}\Delta^2. \quad (64)$$

故孤立奇点在  $\omega = \omega_0$  处,

$$\omega_0 = -\frac{|\Delta^2|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta^2 + \mu^2 - m^2)^2 + 4\Delta^2 m^2}} (\Delta^2 + \mu^2 + m^2) < 0; \quad (65)$$

連續譜起始于  $\omega = \omega_1$  处,

$$\omega_1 = \frac{|\Delta^2|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\Delta^2 + \mu^2 - m^2)^2 + 4\Delta^2 m^2}} \left[ 2M\mu + \frac{1}{2}(\mu^2 - \Delta^2 - m^2) \right]. \quad (66)$$

由(61)知,  $\mathfrak{A}_j^\mp$  在  $\omega = -\omega_0$  处有一孤立奇点,在  $\omega < -\omega_1$  处有連續譜,計算証明:

$$\omega_0^2 - \frac{\Delta^2}{4} \leq \frac{\mu^2}{4}, \quad (67)$$

故  $-\omega_0$  恒在非物理区内. 在物理区中,  $\mathfrak{A}^- = 0$ , 但  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}^* - 2i\mathfrak{A}^-$ , 故在物理区内  $\mathfrak{F}$  与  $\mathfrak{M}^*$  恒相等.

## 七、色散关系

由(30),(31),如果略去同位旋,自旋指标  $\mathfrak{M}^r$  和  $\mathfrak{M}^a$  可写为:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^r(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) = & -i(2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{i(\omega z_0 - \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2} \cdot \mathbf{z})} \cdot \\ & \cdot \theta(z) \langle q_1, q_2 \left| \left[ j\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right]_+ \right| q \rangle d^4 z, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^a(\omega, \Delta^2, m^2, l_0, \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) = & +i(2\pi)^2 (8q_0 q_{10} q_{20})^{\frac{1}{2}} \int e^{+i(\omega z_0 - \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2} \cdot \mathbf{z})} \cdot \\ & \cdot \theta(-z) \langle q_1, q_2 \left| \left[ j\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right) \right]_+ \right| q \rangle d^4 z. \end{aligned} \quad (69)$$

由上两式可以看到,  $S\mathfrak{M}^r$  在固定其他变量,看作  $\omega$  的函数时,在

$$I_m \omega > \left| I_m \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2} \right| \quad (70)$$

的区域内解析,而  $S\mathfrak{M}^a$  在

$$-I_m \omega > \left| I_m \sqrt{\omega^2 - M^2 - \frac{1}{4}\Delta^2} \right| \quad (71)$$

的区域内解析。如令

$$\tau = M^2 + \frac{1}{4}\Delta^2, \quad (72)$$

则在  $\tau$  是负数时,  $S\mathfrak{M}^r$  在  $\omega$  的上半平面内解析,  $S\mathfrak{M}^a$  在下半平面内解析。由上节的讨论可以知道,如

$$\Delta^2 + m^2 < \mu^2 + 4M\mu, \quad (73)$$

则  $\omega_1 > 0$ , 此时在区间  $-\omega_1 < \omega < \omega_1$  内,除孤立奇点  $\pm\omega_0$  外,都有  $\mathfrak{U}^+(\omega) = \mathfrak{U}^-(\omega) = 0$ ,  $\mathfrak{M}^r - \mathfrak{M}^a = 2i\mathfrak{U} = 0$ , 故此时  $\mathfrak{M}^r$  和  $\mathfrak{M}^a$  可以看作同一个解析函数  $\mathfrak{M}$  在上半和下半平面的表示式,除实轴上的割线以外,  $\mathfrak{M}$  在全平面内解析。如果(68),(69)中的矩阵元看作  $\tau$  的函数能由物理区解析延拓至  $\tau < 0$  的区域,则色散关系成立。假定散射振幅在  $|\omega_1| \rightarrow \infty$  时趋于零,则有

$$S^\pm \mathfrak{D}_i^j(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^\pm \mathfrak{U}_i^j(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (74)$$

利用(57)可去掉色散积分的负能量部分。在条件(73)满足时,  $\mathfrak{U}^-$  在正能量部分只有一个孤立奇点,此时色散关系可写为

$$S^\pm \mathfrak{D}_i^j(\omega) = S^\pm B_i^j(\omega) + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{\omega' S^\pm \mathfrak{U}_i^j(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (\pm \epsilon_j^i < 0) \quad (75)$$

$$S^\pm \mathfrak{D}_i^j(\omega) = S^\pm B_i^j(\omega) + \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{S^\pm \mathfrak{U}_i^j(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (\pm \epsilon_j^i > 0) \quad (76)$$

其中  $B_i^j$  为束缚态即  $\mathfrak{U}^-$  的孤立奇点的贡献。如果散射振幅在  $|\omega| \rightarrow \infty$  时不趋于零,色散关系应作相应的改变。

计算结果证明:

$$\omega_1^2 - \frac{\Delta^2}{4} \leq \frac{1}{4} \left( M - \mu + \sqrt{7\mu^2 - 2M\mu + M^2} \right)^2 < \frac{1}{4} (2M - \mu)^2 \quad (77)$$

等号发生在:

$$l_0 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

$$m^2 = 4\mu^2,$$

$$\Delta^2 = M\mu - 4\mu^2 + \mu\sqrt{7\mu^2 - 2M\mu + M^2}$$

时, 故  $\omega_1$  恒在非物理区内, 必须由物理区的  $A(\omega)$  作解析延拓才能决定(75), (76)中的色散积分。与弹性散射的情况不同,  $\mathfrak{A}(\omega)$  不能用散射截面表示, 故在与实验比较时还须作一些近似, 例如只取单核子和单核子单介子的中间态。

## 八、束缚态的贡献

由于在  $\omega = \omega_0$  时, 如果  $\tau$  保持物理的数值, 动量就成为虚数, 可以以下的讨论我们理解作先假设  $\tau < 0$ , 然后将所得的结果解析延拓至  $\tau = M^2 + \frac{1}{4}\Delta^2$ 。令  $p_n \beta_n$  表中间态核子动量与同位旋, 由洛伦茨变换及同位旋空间转动的不变性注意到第三节末所作的说明可以将矩阵元  $\langle p_n \beta_n | j^B(0) | q\alpha \rangle$  表为:

$$\langle p_n \beta_n | j^B(0) | q\alpha \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M}{E_{p_n}}} \sqrt{\frac{1}{2q_0}} G((p_n - q)^2) \bar{u}_{p_n} \gamma_5 \tau_{\beta_n \beta}^\alpha. \quad (78)$$

由于(60)中  $\mathfrak{A}^+$  的  $\delta$  函数,  $p_n - q = p$ , 故对于物理的  $\tau$  值  $(p_n - q)^2 = -M^2$ ,  $G(-M^2)$  可定义为耦合常数。

同样矩阵元  $\langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | j^{B'}(0) | p_n \beta_n \rangle$  可表为

$$\langle q_1 \alpha_1, q_2 \alpha_2 | j^{B'}(0) | p_n \beta_n \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \sqrt{\frac{1}{4q_{10}q_{20}}} \sqrt{\frac{M}{E_{p_n}}} \sum_{ij} L^i J_{\beta' \beta_n}^j h_i^j \cdot (m^2, (p_n - q')^2, p_n \cdot l) \times u_{p_n}, \quad (79)$$

其中

$$J^1 = \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad J^2 = i\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2} \gamma \tau^r, \quad L^1 = 1, \quad L^2 = i\gamma \cdot l. \quad (80)$$

由于  $p_n - q' = p'$ , 故对于物理的  $\tau$  值  $(p_n - q')^2 = -M^2$ , 将(78), (79)代入(60), 得到

$$\mathfrak{A}_r^i(\omega) \sim -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{4q_0} G\delta(\omega - \omega_0) \sum_{i'i'} a^{ii'} b_{ij'} h_{i'}^{i'}(\omega_0), \quad (81)$$

其中

$$a = i \begin{pmatrix} 0, -l \cdot q \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

利用(81)及交叉对称关系得到  $\mathfrak{A}^-$  对色散积分的贡献:

$$S^\pm B_i^j(\omega) = \frac{+G\omega_0}{(2\pi)^{5/2} q_0 (\omega^2 - \omega_0^2)} \sum_{i'i'} S^\pm a^{ii'} b_{ij'} h_{i'}^{i'}(-\omega_0) \quad (\pm \varepsilon_j^i < 0), \quad (83)$$

$$S^{\pm} B_i^j(\omega) = \frac{+G\omega}{(2\pi)^{3/2} q_0 E_n (\omega^2 - \omega_0^2)} \sum_{i'j'} S^{\pm} a^{ii'} b_{i'j'} h_{i'j'}^j(-\omega_0) \quad (\pm \epsilon_i^j > 0), \quad (84)$$

$h_{i'j'}^j$  可以用弹性散射的矩阵元表示, 由(79)有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2q_{20}}} \sqrt{\frac{M}{E_{p_n}}} \sum_{ij} \bar{u}_{p'} L^i J_{\beta' \beta_n}^j h_{ij}^j(m^2, (p_n - q')^2, p_n \cdot l) = \\ & = \bar{u}_{p'} \int \langle q_2 \alpha_2 | \begin{vmatrix} \delta_j^{\beta'}(0) \\ \delta \varphi_{\alpha_1}(x) \end{vmatrix} | p_n \beta_n \rangle e^{-i q_1 x} d^4 x, \end{aligned} \quad (85)$$

而弹性散射的矩阵元可表为

$$\begin{aligned} \langle q_2 \alpha_2, p'' \beta' | S | q_1 \alpha_1, p_n \beta_n \rangle &= (2\pi)^4 \delta(p'' + q_2 - p_n - q_1) \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2q_{10}}} \sqrt{\frac{M}{E_{p'}}} \times \\ & \times \bar{u}_{p'} \langle q_2 \alpha_2 | \begin{vmatrix} \delta_j^{\beta'}(0) \\ \delta \varphi_{\alpha_1}(x) \end{vmatrix} | p_n \beta_n \rangle e^{-i q_1 x} d^4 x. \end{aligned} \quad (86)$$

由(85), (86)得到

$$\begin{aligned} \langle q_2 \alpha_2, p'' \beta' | S | q_1 \alpha_1, p_n \beta_n \rangle &= (2\pi)^{-2} \delta(p'' + q_2 - p_n - q_1) \sqrt{\frac{1}{4q_{10}q_{20}}} \sqrt{\frac{M^2}{E_{p_n} E_{p'}}} \times \\ & \times \sum_{ij} \bar{u}_{p'} L^i J_{\beta' \beta_n}^j h_{ij}^j \left( 4l^2, (p_n - 2l)^2, \frac{1}{2} p_n \cdot q' \right), \end{aligned} \quad (87)$$

其中  $2l = q_2 - q$ , 为弹性散射中的动量交换, 而  $(p_n - 2l)^2 = -M^2$ . 将(87)与(79)比较, 看到束缚态的贡献可以由弹性散射的散射振幅求出来.

补註: 在弱反演下  $j$  的变换应为

$$j^R(x) = \eta S D_j^j(-x) S^+,$$

因此如果不忽略终态两个  $\pi$  介子的相互作用, 为了保证  $\mathcal{A}_i^j, \mathcal{D}_i^j$  为实函数, 应将矩阵元  $m$  中的态矢量  $\langle q_1 q_2 |$  换为  $\langle q_1 q_2 | \frac{1+S}{2}$ .

## 参 考 文 献

- [1] Логунов, А. А., Тодоров, И. Г., *Nucl. Phys.* **10** (1959), 552.
- [2] Sreaton, G. R., *Nuovo Cimento* **11** (1959), 229.
- [3] Боголюбов, Н. Н., Медведев, Б. В., Полянов, М. К., Вопросы Теории Дисперсионных Соотношений (1958).
- [4] Pauli, W., *Niels Bohr and Development of Physics* (1955).

## DISPERSION RELATIONS FOR PION PRODUCTION IN PION-NUCLEON COLLISIONS

CHOU KUAN-CHAO  
(*Peking University*)

DAI YUAN-BEN  
(*Academia Sinica*)

### ABSTRACT

Dispersion relations for pion production in pion-nucleon collisions are discussed. The scattering amplitude is written in a form, in which the operators of nucleon field are extracted from the state vectors of initial and final state. The kinematics and symmetry properties are worked out in detail and the contribution of bound state is evaluated.