

π 介子的輻射衰变*

郭 碩 鴻
(中山大学物理系)

提 要

本文应用 V-A 型普适費米弱作用由协变性和规范不变性的考虑, 利用微扰論, 計算了 π 介子輻射衰变的分枝比.

一、引 言

本文的目的是計算 π 介子的輻射衰变

$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu + \gamma \quad (1)$$

对于主要衰变过程

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu \quad (2)$$

的相对几率. 以前曾有一些作者討論过这問題^[1-4]. 对这問題的注意是和以前实验上沒有发现

$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu \quad (3)$$

相联系的. 这些工作的結果指出: 对于矢量和赝矢耦合, 过程(1)的几率特別小, 不会超过过程(3)的几率, 但是給出过程(3)的几率仍然大于当时实验所允許的限度; 至于其他耦合則給出和实验完全不符的結果. 不久以前实验証实了过程(3)的存在^[5], 并且所得的結果和費曼、盖尔曼^[6]以及馬夏克、森德香^[7]所提出的 V-A 型普适費米弱作用所預期的結果在数量級上相符, 即过程(3)的分枝比 $\sim 10^{-4}$. 把費曼等人的理論应用于介子和超子的衰变問題上也得出很好的結果^[8,9]. 因此我們应用这一理論重新計算过程(1)的相对几率.

以前的作者对这問題的計算一般是利用规范不变性等考虑来确定跃迁矩陣元的形式, 所得的結果依赖于一些与强作用的处理有关的未定参数. 由于在 V-A 型弱作用中, 由规范不变性的考虑所得的“主要項”变得特別小, 使得强作用的处理的影响特別重要. 本文在微扰論范围内給出强作用影响的一个計算, 所得的結果不依赖于截断能量. 計算結果表明附加項仍然是較小的, 因此給出了輻射衰变分枝比的一个比較确定的值.

以下我們首先从协变性和规范不变性确定矩陣元的形式, 当光子能量 $\omega \rightarrow 0$ 时, 这部分的計算是可以完全不依赖于强作用的处理的. 然后我們計算当 $\omega \neq 0$ 时在矩陣元中出現的附加項. 这部分用微扰論計算. 由于所出現的积分是收斂的, 因此不需引入切断能量. 这样我們得出过程(1)的分枝比, 它是基本上和計算过程(2)时所用的切断方法无关的. 最后討論了計算的結果.

* 1960年1月24日收到.

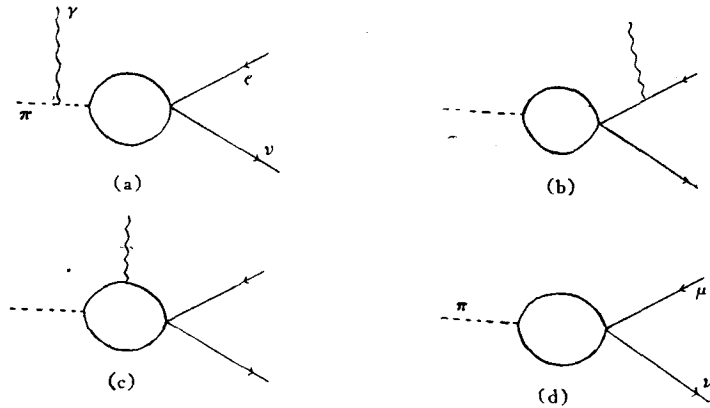


图 1

二、衰变几率的计算

在最低级微扰论中, 和 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 相应的费曼图形有三类 [图 1 (a-c)]. 在这里我们认为 π 介子的衰变是通过重粒子对来进行的. 我们注意到, 当和 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ 的费曼图 [图 1 (d)] 相比较时, 和图 1 (a), (b) 相应的 s 矩阵部分是不依赖于强作用的处理的. 这部分的计算可以通过等效的费米-波色作用哈密顿量来进行, 即令 π 介子与轻子对的等效作用哈密顿量为

$$H' = \frac{f}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_e K_\mu \varphi_\pi, \quad (4)$$

其中 f 为等效耦合常数, K_μ 为 π 介子的动量四维矢量. 图 1 (c) 的贡献依赖于强作用的处理, 但是当光子能量 $\omega \rightarrow 0$ 时, 它的贡献完全由规范不变性确定, 即由 (4) 式中把 K_μ 改为 $-eA_\mu$ 所得的相互作用决定. 当光子能量不为零时, 图 1 (c) 的贡献除了上述的主要项外, 还有一附加项, 它一般是低了一个 $(m_\pi \omega / m_N^2)$ 的数量级, 其中 m_N 为核子质量. 下面的微扰论计算具体地验证了这点.

根据这些考虑, 我们首先忽略了这一附加项, 这时跃迁矩阵元的形式为

$$s' = \frac{i(2\pi)^4}{2\sqrt{m_\pi \omega} \sqrt{2}} \langle \nu | \left\{ \hat{K}(1 + \gamma_5)(-i) \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m_e}{(p - k)^2 + m_e^2} \hat{\epsilon} + \right. \\ \left. + (\hat{K} - \hat{k})(1 + \gamma_5) \frac{(-1)}{(K - k)^2 + m_\pi^2} (2K - k)_\nu \epsilon_\nu + \hat{\epsilon}(1 + \gamma_5) \right\} | e \rangle, \quad (5)$$

其中 $K, -p, q, k$ 分别代表 π, e^+, ν, γ 的动量四维矢量, ϵ 代表光子极化矢量, 其他符号和文献 [8] 中所用的一致.

容易验证 (5) 式的规范不变性, 即在 (5) 式中把 ϵ 改为 k 时得到的结果为零. 为计算简便起见, 选取特殊规范 $(K\epsilon) = 0$, 即在 π 介子静止坐标中选取 $\epsilon_4 = 0$. 这样, (5) 式括号中的第二项消去. 在剩下的项中, 利用动量能量守恒关系式

$$K = q - p + k, \quad (6)$$

罗伦兹条件 $(k\epsilon) = 0$, 以及 $\langle \nu | \hat{q} = 0, (i\hat{p} + m)|e\rangle = 0, k^2 = 0, p^2 = -m_e^2$ 等关系, 最后化简为

$$S' = \frac{-i(2\pi)^4}{2\sqrt{m_\pi\omega}} \frac{ef}{\sqrt{2}} m_e \langle v | (1 - \gamma_5) \frac{\hat{\epsilon}\hat{k} + 2(p\epsilon)}{2(pk)} | e \rangle. \quad (7)$$

我們注意到,在 V-A 作用下,(7)式出現一個因子 m_e 。由於這點,衰變几率低了一個 $(m_e/m_\pi)^2$ 的數量級,因此就必須計算我們原來忽略了附加項。下面我們用微擾論計算這一項。

假設圖 1(c) 的中間迴綫為重粒子對,它們和 π 介子的作用為赹標作用,和輕子對的作用為 V-A 型弱作用,則圖 1(c) 的 S 矩陣元的貢獻為

$$S_c = -\frac{iegG}{\sqrt{2}} J(k) \langle v | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e \rangle, \quad (8)$$

其中 g 為 π 介子與重粒子對的耦合常數, G 為普適弱作用常數,

$$J(k) = \int \text{Sp} \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m_1}{(p - k)^2 + m_1^2} \hat{\epsilon} \frac{i\hat{p} - m_1}{p^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i(\hat{p} - \hat{K}) - m_2}{(p - K)^2 + m_2^2} \right] d^4 p, \quad (9)$$

m_1, m_2 為重粒子的質量。

首先驗證,當 $k = 0$ 時,(9)式可以與圖 1(d) 相應的積分 I 導出:

$$I = \int \text{Sp} \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i\hat{p} - m_2}{p^2 + m_2^2} \right] d^4 p. \quad (10)$$

這裡我們令帶電的那一條重粒子綫的動量為 $p + K$ 。由恆等式

$$\frac{\partial}{\partial K_\mu} \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m}{(p + K)^2 + m^2} = i \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m}{(p + K)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m}{(p + K)^2 + m^2} \quad (11)$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial K_\nu} I = i \int \text{Sp} \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i\hat{p} - m_2}{(p^2 + m_2^2)} \right] d^4 p.$$

把積分變數變換,就可以看出:

$$\epsilon_\mu \frac{\partial I}{\partial K_\mu} = iJ(0). \quad (12)$$

從變換性質來看, I 為一矢量,它必與 K_μ 成正比,即

$$I = CK_\mu, \quad (13)$$

故

$$J(0) = -iC\epsilon_\mu. \quad (14)$$

比較(13)和(14)式,即得當 $k \rightarrow 0$ 時,圖 1(c) 的貢獻相當於圖 1(d) 的矩陣元中把 K_μ 改為 $-eA_\mu$ 。這結論是不依賴於微擾論的,它反映了規範不變性的普遍要求。由此,在(7)式中,我們實際上已把 $J(0)$ 計算在內,而圖 1(c) 的附加貢獻為

$$S'' = -\frac{iegG}{2\sqrt{m_\pi\omega}} [J(k) - J(0)] \langle v | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e \rangle. \quad (15)$$

表式 $J(k) - J(0)$ 經過化簡後變為

$$\begin{aligned} J(k) - J(0) = & \int \text{Sp} \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \left\{ \frac{-i\hat{K}\hat{\epsilon}\gamma_5}{[(p - k)^2 + m_1^2][(p - K)^2 + m_2^2]} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{-i\hat{K}\hat{\epsilon}\gamma_5(i\hat{p} + m_1)(i\hat{K} - m_1 + m_2) - 2(pk)\hat{\epsilon}\gamma_5 m_2}{(p^2 + m_1^2)[(p - k)^2 + m_1^2][(p - K)^2 + m_2^2]} \right\} \right] d^4 p \end{aligned}$$

$$+ \frac{4i(p\hat{k})(p\hat{s})\gamma_5(i\hat{s} + m_1)(i\hat{K} - m_1 + m_2)}{(p^2 + m_1^2)[(p - k)^2 + m_1^2][(p - K)^2 + m_2^2]}\bigg\} d^4p. \quad (16)$$

利用一些近似,可以把(16)式大为化简。注意到 $|m_1 - m_2| \ll m_1$ 或 m_2 ,可以忽略去含有 $m_1 - m_2$ 的项。这样,(16)式的最后一项将比其他项低 $m_\pi\omega/m_N^2$ 的数量级,因而可以忽略不计。在其他项中去掉含奇数 γ 矩阵的项之后,最后(16)式的被积函数变为

$$\frac{\text{Sp}[m\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\hat{K}\hat{s}\hat{K} + 2m(p\hat{k})\gamma_\mu\hat{s}]}{(p^2 + m^2)[(p - k)^2 + m^2][(p - K)^2 + m^2]},$$

其中 m 可取为 m_1 和 m_2 的平均值。把 Sp 运算算出后,得

$$J(k) - J(0) = 4m \int d^4p \frac{\epsilon_\mu[2(p\hat{k}) - (k\hat{K})] + \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_\nu\hat{k}_\lambda\hat{K}_\sigma}{(p^2 + m^2)[(p - k)^2 + m^2][(p - K)^2 + m^2]}, \quad (17)$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ 为全反对称张量,含有它的一项为弱作用中矢量耦合的贡献,另一项为赝矢耦合的贡献。

把(17)式用标准方法化为

$$J(k) - J(0) = 8m \int d^4p \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\epsilon_\mu[2(p\hat{k}) - (k\hat{K})] + \Delta_\mu}{[(p - a)^2 + b^2]^3}, \quad (18)$$

其中

$$\Delta_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_\nu\hat{k}_\lambda\hat{K}_\sigma, \quad (19)$$

$$a = K_y + k(x - y), \quad (20)$$

$$b^2 = m^2 + K_y^2 - [K_y + k(x - y)]^2 \simeq m^2, \quad (21)$$

因为 $|K^2| \ll m^2$,把积分变数变换($p \rightarrow p + a$)后,得

$$\begin{aligned} J(k) - J(0) &= 8m \int d^4p \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\epsilon_\mu(k\hat{K})(2y - 1) + \Delta_\mu}{(p^2 + m^2)^3} = \\ &= \frac{4\pi^2 i}{m} \int_0^1 dx \int_0^x dy [\epsilon_\mu(k\hat{K})(2y - 1) + \Delta_\mu] = \\ &= \frac{2\pi^2 i}{m} \left[-\frac{1}{3} \epsilon_\mu(k\hat{K}) + \Delta_\mu \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

选取 π 介子的静止坐标系,则 K 只有第4分量,若令 $\mathbf{k}$ 的方向为 z 轴方向,则 ϵ 只有第1和第2个分量。若令 $\epsilon^{(1)}$ 和 $\epsilon^{(2)}$ 分别为光子的两个独立极化矢量,得

$$\Delta_\mu = i\omega m_\pi \epsilon'_\mu, \quad (23)$$

其中

$$\epsilon'^{(1)} = -\epsilon^{(2)}, \quad \epsilon'^{(2)} = \epsilon^{(1)}. \quad (24)$$

由(15)和(22)式,得到

$$S'' = i \frac{\pi^2 g G e}{2m\sqrt{2m_\pi\omega}} m_\pi\omega < \nu | \left(\hat{\epsilon}' - \frac{1}{3} \hat{\epsilon} \right) (1 + \gamma_5) | e >. \quad (25)$$

把(25)式和(7)式相加即得 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 的跃迁矩阵元。由于(7)式中 $\langle \nu | \dots | e \rangle$ 内出现偶数个 γ 矩阵,而(25)式中出现奇数个 γ 矩阵,因此当在计算 $|S|^2$ 时,若在投射算符中忽略去电子质量,这两部分便没有相干项。下面分别计算(7)和(25)式对衰变几率的贡献。

经过计算,得到 $|S'|^2$ 的对终态粒子自旋和光子极化方向求和后的表式:

$$\begin{aligned}\Sigma|S'|^2 &= (2\pi)^8 \frac{e^2 f^2}{4m_\pi \omega} \frac{m_e^2}{E_e E_\nu} \left\{ -1 - \frac{(kK)}{(kp)} + p^2 \sin^2 \theta \left[\frac{(pq) - (kK)}{(pk)^2} \right] \right\} = \\ &= (2\pi)^8 \frac{e^2 f^2}{4m_\pi \omega} \frac{m_e^2}{E_e E_\nu} \left\{ -1 + \frac{m_\pi}{E_e (1 - \alpha \cos \theta)} + \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{(1 - \alpha \cos \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{E_e m_\pi - m_e^2 + \omega [m_\pi - E_e (1 - \alpha \cos \theta)]}{\omega^2 E_e^2} \right\},\end{aligned}\quad (26)$$

其中 θ 為電子和光子運動方向的夾角, 而

$$\alpha = p_e / E_e.$$

對於電子能譜中的大部分, $\alpha \simeq 1$. 在不引致相空間積分發散的情況下, 都可令 $\alpha = 1$. 對相空間積分後, 得到這部分對衰變幾率的貢獻為

$$W' = \frac{e^2 f^2 m_\pi^2}{4\pi} \frac{m_e^2}{4\pi} \frac{1}{\pi m_\pi} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{m_\pi}{m_e} + \left(\ln \frac{m_\pi}{m_e} - \frac{1}{2} \right) \left(\ln \frac{1}{2\eta} - 1 \right) - \frac{5}{16} - 0.64 \right]. \quad (28)$$

其中因為有一項對高能電子發散, 我們對電子能量積分時的上限取為

$$(E_e)_{\max} - \eta m_\pi = \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi} - \eta m_\pi.$$

這發散來源於與電磁場作用的紅外發散, ηm_π 亦近似地相當於低能光子的截斷能量。

耦合常數 f^2 的值可從 $\pi-\mu$ 衰變幾率得出。由等效哈密頓量(4)算出的 $\pi-\mu$ 衰變幾率 W 與 f^2 的關係為

$$\frac{f^2 m_\pi^2}{4\pi} = \frac{2m_\pi W}{m_\mu^2 \left[1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi} \right)^2 \right]^2}. \quad (29)$$

從實驗值 $W^{-1} = 2.56 \times 10^{-8}$ 秒得

$$\frac{f^2 m_\pi^2}{4\pi} = 3.53 \times 10^{-15}. \quad (30)$$

取截斷能量 $\eta m_\pi = m_e$, 得到

$$W' = 4.8 \times 10^2 \text{ 秒}^{-1}. \quad (31)$$

現在回到 S'' 的貢獻。在(25)式中, δ' 項來自矢量耦合, δ 項來自赝矢耦合。容易看出: 在計算衰變幾率時, 這兩項不會干涉。當對光子極化方向求和後, 兩項給出的結果形式上完全一致, 而赝矢部分的貢獻為矢量部分的 1/9。在計算 $\Sigma|S''|^2$ 之前, 首先必須對所有可能的重粒子對的貢獻求和。這裡所用的方法和文獻[9]的一致, 並且採用相同的耦合常數。這樣, (25)式中的 g/m 應改為

$$\frac{\sqrt{2} g_1}{m_N} + \frac{2g_2}{m_\Lambda + m_\Sigma} + \frac{\sqrt{2} g_4}{m_\Xi} = 1.92 \frac{g_1}{m_N}, \quad (32)$$

其中 g_1, g_2, g_4 分別為 (πNN) , $(\pi \Lambda \Sigma)$ 以及 $(\pi \Xi \Xi)$ 的耦合常數, 取 $g_1 = g_4 = -13.7$, $g_2 = 8.2$. 因此

$$\Sigma|S''|^2 = \frac{10}{9} (2\pi^4) G^2 (1.92 g_1)^2 \frac{m_\pi \omega}{m_N^2} \frac{1}{E_\nu} \left[\frac{\frac{1}{2} m_\pi (1 + \cos \theta)}{m_\pi - E_e + E_e \cos \theta} - E_e \sin^2 \theta \right]. \quad (34)$$

對相空間積分後, 得到

$$W'' = 1.1 \times 10^1 \text{ 秒}^{-1}. \quad (35)$$

把(36)和(31)式比較,可見 W'' 比 W' 的值低一个数量級。由于 W' 完全来自赝矢耦合部分,而 W'' 主要来自矢量耦合部分,这也表示在 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 中起主要作用的是赝矢耦合部分。

把(36)和(31)式相加,即近似地得到 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 的衰变几率 W_r :

$$W_r \cong W' + W'' = 4.9 \times 10^2 \text{ 秒}^{-1}; \quad (37)$$

与 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ 的几率 $W = 3.9 \times 10^7 \text{ 秒}^{-1}$ 比較,得到輻射衰变的分枝比

$$\rho_r = \frac{W_r}{W} = 1.3 \times 10^{-5}. \quad (38)$$

三、討 論

我們得出的結果和以前一些作者^[1-4]所得的結果大致相符,但是也有一些差別。在[1]中完全忽略了电子質量,即完全忽略了 W' 的貢獻,而对 W'' 亦只作了数量級的估計,故所得的 $\rho_r \sim 10^{-8}$ 可能是太低。其他作者也只是把 W'' 估計出来。我們現在的計算虽然利用了微扰論,沒有正确地处理 π 介子的強作用和弱作用的重正化問題,但是它对于這問題仍有一定的参考意义。計算結果表明,依賴于強作用处理的一項 W'' 相对地不大,可以預期,当把強作用作更精确的处理时,我們所得的 ρ_r 不会有太大的改变。虽然目前关于 π 介子的輻射衰变还没有准确的实验数据^[10],計算結果和現有的实验材料也是沒有矛盾的。这一点进一步驗證了 V-A 型普适費米弱作用可以应用到介子的衰变現象中。

参 考 文 献

- [1] Treiman, S. B. & Wyld, H. W., *Phys. Rev.* **101** (1956), 1552.
- [2] Tetsuo Eguchi, *Phys. Rev.* **102** (1956), 879.
- [3] Kerson Huang & Low, F. E., *Phys. Rev.* **109** (1958), 1400.
- [4] Ferrari, E., *Nucl. Cim.* **8** (1958), 155.
- [5] Fazzini, T., et. al., *Phys. Rev. Let.* **1** (1958), 247; Impeduglia, G., et. al., *Phys. Rev. Let.* **1** (1958), 249.
- [6] Feynman, R. P. & Gell-mann, M., *Phys. Rev.* **109** (1958), 193.
- [7] Sundershan, G. & Marshak, R., *Phys. Rev.* **109** (1958), 1860.
- [8] 李文鏞、洗鼎昌、何祚庥、朱洪元, *物理学报*, **15** (1959), 32.
- [9] 陈中謨、何祚庥、洗鼎昌、朱洪元, *物理学报*, **15** (1959), 63.
- [10] Cassels, J. M., et. al., *Proc. Phys. Soc.* **A70** (1957), 729.

THE RADIOACTIVE DECAY OF π -MESON

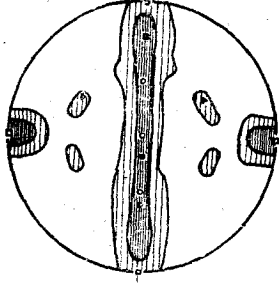
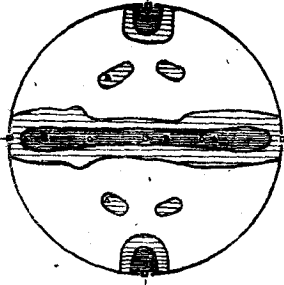
KWO SHE-HUNG

(*Chungshan University*)

ABSTRACT

The relative probability of the radioactive decay of π -meson to that of π - μ decay is calculated, assuming a universal Fermi interaction of V-A type. Terms in addition to those of usual gauge invariant treatment are calculated with perturbation theory. The result does not contradict the experiment.

第 16 卷 第 3 期 更 正 表

頁	行 (或 图)	誤	正
155	例 8	在所有磁場強度下，	在所有磁感應強度下，
155	例 7	在磁場強度為……	在磁感應強度為……
156	图 4 (b)		
157	图 6		縱坐標的單位是 尔格/厘米 ²