第16卷 第7期 物 理 学 报 Vol. 16, No. 7
1960 年 7 月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1960

等离子体的热力学研究*†

乔 登 江
（江苏师范学院）

提　　要

本文利用不可逆过程热力学討論了在均匀磁場作用下的等离子体，得到了电流方程并指出了磁場对电流的影响．同时討論了部分游离的等离子体中的电流、扩散和热扩散对电流的影响以及磁場对扩散的影响．

一、引　　言

Kihara[1] 用不可逆过程热力学理論研究了接近于热平衡的等离子体．在他的文章里，沒有考虑到磁場的作用，事实上，等离子体中的电流与磁場的关系极大[2]．等离子体，卽使沒有外电場的作用，也会由于正負离子的相对扩散形成电流．我們知道，在温度場的作用下，等离子体内正負离子亦会产生相对扩散，从而产生电流，这便是热电扩散效应．第二个效应是在均匀磁場作用下的等离子体中将产生垂直于磁場方向的电流，同时亦发生垂直于温度場和磁場方向的热流．前者相当于在温度場作用下的金属导电中的能斯脱效应，后者相当于莱丘克-里格效应．只有考虑了磁場的作用时，用所得的結果去討論理想等离子体，才与从等离子体的运动方程出发所得的稳定解的結果相合[3]．

部分游离的等离子体与完全游离的等离子体的情形有所不同，因为当等离子中存在着中性粒子时，产生了耗散电流的机构（机构的簡单討論見文献[2]），使得沿电場方向的电流減小．在磁場作用下，同样出现了磁場对垂直于磁場方向的电流的影响，同时也出現了垂直于磁場方向的扩散．

二、基 本 方 程

这一节中我們列出等离子体的基本方程，其目的在于求得熵增率．

1. 連續性方程　令 v_K, n_K 为等离子体内第 K 个組元的流速和单位体积内的粒子数；m_K 及 e_K 分别为第 K 个組元的粒子的质量和所带的电量，则

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t} + \nabla(\rho_K \mathbf{v}_K) = 0,$$

或写成

$$\rho \frac{dc_K}{dt} = -\nabla \mathbf{J}_K, \tag{1}$$

式中出现的符号为

* 1960 年 1 月 21 日收到．

† 本文曾在江苏师范学院科学报告会上报告过．

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla,$$

$$\rho_K = n_K m_K, \quad \rho = \sum \rho_K, \quad c_K = \frac{n_K m_K}{\sum \rho_K},$$

$$\mathbf{J}_K = n_K m_K(\mathbf{v}_K - \mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} = \frac{\sum n_K m_K \mathbf{v}_K}{\sum n_K m_K}.$$

2. 运动方程　在我們的討論中忽略內摩擦，則

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \sum \rho_K \mathbf{F}_K, \tag{2}$$

式中

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{g} + \frac{e_K}{m_K}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_K \times \mathbf{B}\right). \tag{3}$$

其中 $\mathbf{g}$ 为重力加速度，其他符号是自明的.

3. 能量方程　当等离子体作为整体考虑时，单位体积內的能量守恆可以表为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\epsilon\right) = -\nabla\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) + \mathbf{q}\right] + \sum \rho_K \mathbf{F}_K \cdot \mathbf{v}_K, \tag{4}$$

式中 ϵ 为单位质量的內能，w 为单位质量的焓，$\mathbf{q}$ 为热流密度，即

$$w = \epsilon + \rho v = \epsilon + \frac{P}{\rho},$$

$$\mathbf{q} = -K\nabla T,$$

其中 K 为导热率.

4. 热力学方程　令 V 为等离子体的体积，則第 K 个組元的总粒子数为 $N_K = n_K V$，热力学方程为

$$dE = TdS - PdV + \sum \mu_K dN_K = TdS - PdV + \sum \frac{\mu_K}{m_K} d(N_K m_K),$$

将上式写成单位质量的形式并引进浓度 c_K 作为变量，則

$$d\epsilon = TdS - Pdv + \sum \mu'_K dc_K,$$

式中

$$\epsilon = \frac{E}{V\sum n_K m_K}, \qquad S = \frac{S}{V\sum n_K m_K},$$

$$v = \frac{1}{\sum n_K m_K}, \qquad \mu'_K = \frac{\mu_K}{m_K}.$$

这样，热力学方程可写为

$$d\epsilon = TdS + \frac{P}{\rho^2} d\rho + \sum \mu'_K dc_K, \tag{5}$$

同样討論可以得到另一热力学恆等式为

$$d\omega = TdS + \frac{1}{\rho} dP + \sum \mu'_K dc_K. \tag{6}$$

利用(1)，(2)，(5)及(6)式計算能量方程(4)式的导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho\epsilon\right)$$

可以求得

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla(\mathbf{q} - \Sigma \mathbf{J}_K \mu'_K) - \Sigma \mathbf{J}_K(\nabla\mu'_K - \mathbf{F}_K). \tag{7}$$

由(7)式得到熵增率为

$$\Delta^{\cdot} S = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = -\int \frac{1}{T}\left[(\mathbf{q} - \Sigma \mathbf{J}_K \mu'_K)\nabla \ln T + \Sigma \mathbf{J}_K(\nabla\mu'_K - \mathbf{F}_K)\right]dV. \tag{8}$$

在我們所得到的結果中，广义力为

$$\frac{1}{T}\nabla \ln T, \qquad \frac{1}{T}(\nabla\mu'_K - \mathbf{F}_K);$$

而广义流量为

$$\mathbf{q} - \Sigma \mathbf{J}_K \mu'_K, \qquad \mathbf{J}_K.$$

根据不可逆过程热力学理論可以建立广义流量和广义力之間的綫性关系，而且相应的系数滿足昂薩格倒易关系．

三、二元完全游离的等离子体

为了便于討論起見，我們先討論二元完全游离的等离子体．就其整体而言，等离子体是中性的，即

$$n_1 e_1 + n_2 e_2 = 0. \tag{9}$$

利用上述条件，我們可以将熵增率(8)式中各項化簡，首先，

$$\Sigma \mathbf{J}_K \mathbf{F}_K = \mathbf{I}\mathbf{E}', \tag{10}$$

式中

$$\mathbf{I} = \sum_{K=1,2} n_K e_K(\mathbf{v}_K - \mathbf{v}), \qquad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v}\times\mathbf{B}; \tag{11}$$

其次，

$$\Sigma \mathbf{J}_K \nabla\mu'_K = \Sigma \mathbf{J}_K(\nabla\mu'_K)_T + \Sigma \mathbf{J}_K\left(\frac{\partial\mu'_K}{\partial T}\right)\nabla T = \mathbf{I}\left(\frac{1}{e_1}\nabla\mu_1\right)_T - \Sigma \mathbf{J}_K s_K T\nabla\ln T, \tag{12}$$

計算中利用了吉布斯-丢汗姆关系式

$$c_1(\nabla\mu'_1)_T + c_2(\nabla\mu'_2)_T = 0. \tag{13}$$

将以上結果代入(8)式，便得二元等离子体的熵增率

$$\Delta^{\cdot} S = -\int \frac{1}{T}\left\{\mathbf{q}^*\nabla \ln T + \mathbf{I}\left[\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \mathbf{E}'\right]\right\}dV, \tag{14}$$

式中

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q} - \Sigma \mathbf{J}_K(\mu'_K + s'_K T) = \mathbf{q} - \Sigma \mathbf{J}_K w_K.$$

这样，我們求得的广义流量和广义力之間的綫性关系为

$$\mathbf{I} = \frac{L_{11}}{T}\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right] - \frac{L_{12}}{T}\nabla \ln T, \tag{15}$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{L_{21}}{T}\left[\boldsymbol{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right] - \frac{L_{22}}{T}\nabla \ln T. \tag{16}$$

利用昂薩格倒易关系:

$$L_{12} = L_{21}, \tag{17}$$

(15),(16)式可以写为

$$\mathbf{I} = \sigma\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \alpha T\nabla \ln T\right], \tag{18}$$

$$\mathbf{q}^* = -KT\nabla \ln T + \alpha T\,\mathbf{I}. \tag{19}$$

显然,式中σ及K为等离子体的导电率和导热率,这些系数分别为

$$\sigma = \frac{L_{11}}{T}, \qquad \frac{L_{12}}{T} = \frac{L_{21}}{T} = \alpha\sigma T, \qquad \frac{L_{22}}{T} = \sigma\gamma T, \tag{20}$$

$$\frac{K}{T\sigma} = \frac{\gamma}{T} - \alpha^2. \tag{21}$$

为了明显的看出所引进的系数的意义,在$\mathbf{I} = 0$的稳定条件下,

$$\alpha = \left(\frac{\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T}{T\nabla \ln T}\right)_{\mathbf{I}=0}. \tag{22}$$

它表明等离子体中等效电場$\left(\text{即 } \mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)$和温度場的耦合效应,可以称为热电扩散效应.当电場与由于扩散所生电場相抵消时,即等效电場等于零,即使等离子体在温度場开始作用的时刻,传导电流仍然不会发生.稍后,当热扩散效应使得$\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T \neq 0$的情形下,电流才能产生.对于热流$\mathbf{q}^*$也有类似的情形,因为

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{T\nabla \ln T}{\mathbf{E} - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T}\right)_{\mathbf{q}^*=0}. \tag{23}$$

只有当$\nabla \ln T$异于零时,$\mathbf{q}^*$才可能产生.

(22)式表明等离子体导热率与导电率之比决定于热电-扩散的耦合效应..

現在我們来求出等离子体内扩散系数D_{12}、热扩散比K_T与导电率σ、热电扩散比α之間的关系,依照德·哥洛特[4],当$\mathbf{E}' = 0$时,质量流为

$$\mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_2 = -\rho\frac{(1-c_1)D_{12}}{\left(\frac{\partial\mu_1'}{\partial c_1}\right)}[(\nabla\mu_1')_T + K_T\nabla \ln T], \tag{24}$$

而(19)式可以写成

$$\mathbf{I} = \sum\frac{\mathbf{J}_K e_K}{m_K} = \mathbf{J}_1\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right) = -\sigma\left(\frac{m_1}{e_1}\right)\left[(\nabla\mu_1')_T + \left(\frac{e_1}{m_1}\right)\alpha T\nabla \ln T\right]. \tag{25}$$

比較所得結果并利用条件(9)式,可得

$$\frac{D_{12}}{\sigma\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial c_1}\right)} = \frac{c_1}{n_1 e_1^2}, \qquad \frac{K_T}{\alpha T} = \frac{e_1}{m_1}. \tag{26}$$

理想等离子体的化学势为

$$\mu_1 = \mu^*(T) + RT \ln P_1, \tag{27}$$

式中 P_1 为电子气的分压，则(18)式为

$$\mathbf{I} = \sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{n_1 e_1} \nabla P_1 - \alpha T \nabla \ln T\right). \tag{28}$$

四、磁場的影响

以前所得的結果，是等离子在均匀磁場作用下的一級近似，即磁場不影响等离子中的电流．但是为了进一步討論等离子体中的热电扩散效应，考虑磁場的影响是必需的．考虑磁場的影响时，我們所引进的系数(20)式有賴于磁場．为了簡单起見，首先討論等温等离子体的情形．在 $\nabla \ln T = 0$ 的特殊情形下，(18)式应改写为

$$\mathbf{I}_i = \sigma_{iK}\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla \mu_1)_T\right]_K, \tag{29}$$

(其中重复的足碼表示从 1 到 3 的取和，以下同此)或

$$\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla \mu_1)_T\right]_i = \sigma_{iK}^{-1} \mathbf{I}_K. \tag{30}$$

根据昂薩格倒易关系，应有

$$\sigma_{iK}(\mathbf{B}) = \sigma_{Ki}(-\mathbf{B}), \tag{31}$$

它的逆张量 σ_{iK}^{-1} 亦满足同样关系．依照郎道的方法[5]，将 σ_{iK}^{-1} 分解成对称和反对称的两个部分，即

$$\sigma_{iK}^{-1} = s_{iK}(\mathbf{B}) + a_{iK}(\mathbf{B}), \tag{32}$$

而它們分别满足

$$s_{iK}(\mathbf{B}) = s_{Ki}(-\mathbf{B}) = s_{iK}(-\mathbf{B}), \quad a_{iK}(\mathbf{B}) = a_{Ki}(-\mathbf{B}) = -a_{iK}(-\mathbf{B}). \tag{33}$$

对于反对称部分，我們引进如下的表示：

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x. \tag{34}$$

当磁場不強时，将 $s_{iK}(\mathbf{B})$ 展开而保留一次項，并考虑到我們所討論的等离子体是各向同性的，那末

$$s_{iK} = \sigma^{-1}\delta_{iK} + 0(B^2), \qquad a_i = \alpha_{iK} B_K + 0(B^3) = -R\sigma^{-1} B_i. \tag{35}$$

代入(30)式，得

$$\sigma\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla \mu_1)_T\right] = \mathbf{I} + R(\mathbf{I} \times \mathbf{B}). \tag{36}$$

(36)式便是等温等离子体在磁場作用下的电流方程．为了便于比較，仍以理想等离子体为例，它的电流方程为

$$\sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{n_1 e_1}\nabla P_1\right) = \mathbf{I} + R(\mathbf{I} \times \mathbf{B}); \tag{37}$$

与从等离子体的运动方程所得的稳定解相合[3]．

显然，当 $\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla \mu_1)_T$ 与 $\mathbf{B}$ 平行时，(36) 式还原为在等温条件下的 (19) 式；当 $\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla \mu_1)_T$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直时，可以从(36)式解得

$$\mathbf{I}(1+R^2B^2)=\sigma\left[\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T-R\left(\mathbf{E}'-\left(\frac{1}{e_1}\nabla\mu_1\right)_T\right)\times\mathbf{B}\right]. \tag{38}$$

由于磁場的影响,使得沿等效电場方向的电流减小为原来电流的 $(1+R^2B^2)^{-1}$ 倍，而产生了垂直于等效电場和磁場方向的电流,它等于平行于等效电場方向的电流的 RB 倍.

一般情形下,根据熵增率(14)式,綫性关系可以表为

$$\mathbf{I}_i=\sigma_{iK}\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)_K-Tb_{iK}\frac{\partial\ln T}{\partial x_K}, \tag{39}$$

$$\mathbf{q}_i^*=Tc_{iK}\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)_K-Td_{iK}\frac{\partial\ln T}{\partial x_K}; \tag{40}$$

各系数满足下述关系:

$$\sigma_{iK}(\mathbf{B})=\sigma_{Ki}(-\mathbf{B}),\quad d_{iK}(\mathbf{B})=d_{Ki}(-\mathbf{B}),\quad b_{iK}(\mathbf{B})=c_{Ki}(-\mathbf{B}). \tag{41}$$

經过簡单計算,不难将(39)及(40)式改写为

$$\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)_i=\sigma_{iK}^{-1}\mathbf{I}_K+\alpha_{iK}\frac{\partial\ln T}{\partial x_K}, \tag{42}$$

$$\mathbf{q}_i^*=T\beta_{iK}\mathbf{I}_K-K_{iK}T\frac{\partial\ln T}{\partial x_K}; \tag{43}$$

其中

$$\alpha_{iK}=\sigma_{ij}^{-1}b_{jK},\quad \beta_{iK}=c_{ij}\sigma_{jK}^{-1},\quad K_{iK}=d_{iK}-Tc_{ij}\sigma_{jl}^{-1}b_{lK}. \tag{44}$$

由关系式(41)可以証明

$$\alpha_{iK}(\mathbf{B})=\beta_{Ki}(-\mathbf{B}),\qquad K_{iK}(\mathbf{B})=K_{Ki}(-\mathbf{B}). \tag{45}$$

和以前的討論相同,分别将出现与 $\mathbf{B}$ 有关的系数展开,再代入(42),(43)二式,可得

$$\sigma\left[\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T-\alpha T\nabla\ln T\right]=\mathbf{I}+R(\mathbf{I}\times\mathbf{B})+NT(\nabla\ln T\times\mathbf{B}), \tag{46}$$

$$\mathbf{q}^*=-KT\nabla\ln T+\alpha T\,\mathbf{I}+NT(\mathbf{I}\times\mathbf{B})+LT(\nabla\ln T\times\mathbf{B}). \tag{47}$$

显然，当等效电場 $\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T$，温度梯度 $\nabla\ln T$ 及磁場相平行时,磁場不产生影响,回到了先前的結果(18),(19)式. 如果当 $\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T$，$\nabla\ln T$ 及 $\mathbf{B}$ 三个量中有任二个相垂直,我們可以从(47)式求得电流的普遍表达式:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}=\sigma\Big\{\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T-R\left[\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)\times\mathbf{B}\right]-\alpha T\nabla\ln T\Big\}+\\+(\alpha\sigma R-N)T(\nabla\ln T\times\mathbf{B})-NRT(\nabla\ln T\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\\-R^2(\mathbf{I}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}.\end{aligned} \tag{48}$$

当 $\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T$ 平行于磁場而垂直于温度梯度时,則平行于等效电場的电流为

$$\mathbf{I}_1=\sigma\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right); \tag{49}$$

沿温度梯度方向的电流为

$$\mathbf{I}_2(1+R^2B^2)=-\alpha\sigma\left(1+\frac{NRB^2}{\alpha\sigma}\right)T\nabla\ln T, \tag{50}$$

与 $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2$ 相垂直的电流为

$$\mathbf{I}_3(1+R^2B^2)=-\alpha\sigma\left(RB-\frac{NB}{\alpha\sigma}\right)T|\nabla\ln T|. \tag{51}$$

所得結果表明，在磁場影响下，$\mathbf{I}_2$减小为原来电流的$\dfrac{\alpha\sigma+NRB^2}{\alpha\sigma(1+R^2B^2)}$倍，而

$$|\mathbf{I}_3|=\frac{\alpha\sigma RB-NB}{\alpha\sigma+NRB^2}|\mathbf{I}_2|. \tag{52}$$

完全类似，不难討論其他情形．我們列出等效电場、磁場和温度梯度三者相互垂直的情形下所得的結果：

$$\mathbf{I}_1(1+R^2B^2)=\sigma\left(\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)+(\alpha\sigma R-N)BT|\nabla\ln T|, \tag{53}$$

$$\mathbf{I}_2(1+R^2B^2)=-\alpha\sigma T\nabla\ln T+NRB^2T\nabla\ln T-RB\left|\mathbf{E}'-\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right|, \tag{54}$$

$$\mathbf{I}_3=0. \tag{55}$$

五、部分游离的等离子体

部分游离的等离子体可以作为三个組元所組成的等离子体来討論，其中第三个組元为中性的．但是等离子体作为整体而言仍然是中性的，即(9)式仍然成立．根据所得普遍的結果(8)式，熵增率可以写为

$$\Delta^{\cdot}S=-\int\frac{1}{T}\left\{\left[\mathbf{q}-\sum_{i=1,2,3}\mathbf{J}_i(\mu_i'+s_iT)\right]\nabla\ln T+\mathbf{J}_3(\nabla\mu_3')_T+\sum_{K=1,2}\mathbf{J}_K[(\nabla\mu_K')_T-\mathbf{F}_K]\right\}dV, \tag{56}$$

其中对 i 取和是由 1 到 3，对 K 取和是由 1 到 2，与以前結果(8)式所不同的是这里的 $\mathbf{F}_K$ 为

$$\mathbf{F}_K=\frac{e_K}{m_K}(\mathbf{E}+c^{-1}\mathbf{v}_K\times\mathbf{B}). \tag{57}$$

利用(19)式及关系

$$\sum c_i(\nabla\mu_i')_T=0, \tag{58}$$

可以将熵增率中各項化为

$$\sum\mathbf{J}_i(\nabla\mu_i')_T=\mathbf{I}\,\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T+\mathbf{J}_3\left(1+\frac{c_3}{c_2}\right)\nabla\mu_3'+\frac{c_3}{c_2}\mathbf{J}_1\nabla\mu_3',$$

$$\sum\mathbf{J}_K\,\mathbf{F}_K=\mathbf{I}\cdot\mathbf{E}'.$$

在这里，我們引入下述近似：令 m_1 为电子质量，则

$$\frac{m_1}{m_2}=0,\qquad m_2=m_3,$$

即

$$\mathbf{J}_1=0,\qquad \rho=\rho_2+\rho_3. \tag{59}$$

在上述近似条件下，熵增率为

$$\Delta^{\cdot}S=-\int\frac{1}{T}\left\{\mathbf{q}^*\nabla\ln T+\mathbf{I}\left(\frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T-\mathbf{E}'\right)+f^{-1}\mathbf{J}_3(\nabla\mu_3')_T\right\}dV, \tag{60}$$

式中

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q} - \sum \mathbf{J}_i(\mu_i' + s_i T), \qquad f^{-1} = 1 + \frac{c_3}{c_2}. \tag{61}$$

由此可得綫性关系为

$$\mathbf{I} = \sigma\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \beta(\nabla\mu_3')_T - \alpha T\nabla\ln T\right], \tag{62}$$

$$f^{-1}\mathbf{J}_3 = -D^*[(\nabla\mu_3')_T + K_T\nabla\ln T] + \beta\mathbf{I}, \tag{63}$$

$$\mathbf{q}^* = -KT\nabla\ln T + (\alpha - \beta K_T)T\mathbf{I} + K_T T f^{-1}\mathbf{J}_3; \tag{64}$$

式中

$$D^* = \frac{c_2\rho D_{23}}{\left(\frac{\partial\mu_3}{\partial c_3}\right)} = \frac{L_{22}}{T} - \beta^2\sigma, \quad K_T = \frac{1}{D^*}\left(\frac{L_{23}}{T^2} - \alpha\beta\sigma\right), \quad K = \frac{L_{33}}{T} - \alpha^2\sigma T - \frac{K_T^2}{D^*}. \tag{65}$$

我們考慮以下几种特殊情形:

(i) 等溫等离子体,即 $\nabla\ln T = 0$, (62)及(63)式可以化为

$$\mathbf{I}\left(1 + \frac{\sigma\beta^2}{D^*}\right) = \sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right) + \frac{\sigma\beta}{D^*}f^{-1}\mathbf{J}_3. \tag{66}$$

若 $\mathbf{J}_3 = 0$, 上式明显的表明沿等效电場方向的电流減小了$\left(1 + \frac{\sigma\beta^2}{D^*}\right)^{-1}$倍,而減小的程度有賴于中性粒子的扩散系数. 这一現象說明部分游离的等离子体內存在着耗散电流的效应.

(ii) $\mathbf{J}_3 = 0$ 由(62)及(63)式可以解得

$$\mathbf{I}\left(1 + \frac{\sigma\beta^2}{D^*}\right) = \sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \alpha T\nabla\ln T + \beta K_T\nabla\ln T\right). \tag{67}$$

它表明中性粒子的热扩散同样使得沿等效电場方向的电流減小.

(iii) $\mathbf{I} = 0$ 从(62)式可得由于扩散和热扩散所致的电場为

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \frac{\beta}{D^*}f^{-1}\mathbf{J}_3 + (\alpha T + \beta K_T)\nabla\ln T. \tag{68}$$

可以求得

$$\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_2 = \sigma'\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T + (\alpha T + \beta K_T)\nabla\ln T\right], \tag{69}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &\sigma' = \frac{n_2 e_2}{\rho}\frac{D^*}{\beta}, \\ \text{即}\quad &\frac{D_{23}}{\left(\frac{\partial\mu_3}{\partial c_3}\right)\sigma'} = \frac{\beta}{n_2 e_2 c_2}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

現在我們討論磁場对部分游离的等离子体的影响.为了避免繁复的計算,我們仅限于討論等溫的等离子体. 在 $\nabla\ln T = 0$ 的情形下,綫性关系写成

$$
\left.\begin{aligned}
I_i &= a_{iK}\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)\right)_K - b_{iK}\left(\frac{\partial\mu_3'}{\partial x_K}\right)_T, \\
f^{-1}J_i &= c_{iK}\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)\right)_K - d_{iK}\left(\frac{\partial\mu_3'}{\partial x_K}\right)_T.
\end{aligned}\right\} \tag{71}
$$

这些系数满足如下关系：

$$
a_{iK}(\mathbf{B}) = a_{Ki}(-\mathbf{B}),\quad d_{iK}(\mathbf{B}) = d_{Ki}(-\mathbf{B}),\quad b_{iK}(\mathbf{B}) = c_{Ki}(-\mathbf{B}). \tag{72}
$$

(71)式可以化为

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right)_i &= a_{iK}^{-1}\mathbf{I}_K + \alpha_{iK}\left(\frac{\partial\mu_3'}{\partial x_K}\right)_T, \\
f^{-1}\mathbf{J}_i &= \beta_{iK}I_K - D_{iK}^*\left(\frac{\partial\mu_3'}{\partial x_K}\right)_T.
\end{aligned}\right\} \tag{73}
$$

可以証明：

$$
\alpha_{iK}(\mathbf{B}) = \beta_{Ki}(-\mathbf{B}),\qquad a_{iK}^{-1}(\mathbf{B}) = a_{Ki}^{-1}(-\mathbf{B}); \tag{74}
$$

且認为扩散系数 D^* 与磁場无关，即

$$
D_{iK}^* = D^*\,\delta_{iK}. \tag{75}
$$

与 § 四完全类似的討論可得

$$
\sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \beta(\nabla\mu_3')_T\right) = \mathbf{I} + R(\mathbf{I}\times\mathbf{B}) + M((\nabla\mu_3')_T\times\mathbf{B}), \tag{76}
$$

$$
f^{-1}\mathbf{J}_3 + D^*(\nabla\mu_3')_T = \beta\mathbf{I} + M(\mathbf{I}\times\mathbf{B}). \tag{77}
$$

将后式代入前式，可得

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T - \beta(\nabla\mu_3')_T\right) &= \mathbf{I} + \left(R + \frac{\beta M}{D^*}\right)\mathbf{I}\times\mathbf{B} + \\
&+ \frac{M^2}{D^*}[(\mathbf{I}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}] - \frac{M}{D^*}f^{-1}(\mathbf{J}_3\times\mathbf{B}),
\end{aligned} \tag{78}
$$

式中出現了 $(\mathbf{I}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$ 項，这一項影响着垂直于磁場方向的电流．

若 $\mathbf{J}_3 = 0$，利用(77)式，(78)式可以化为

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_T\right) &= \mathbf{I}\left(1 + \frac{\sigma\beta^2}{D^*} - \frac{B^2M^2}{D^*}\right) + \\
&+ \frac{M^2}{D^*}(\mathbf{I}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + \mathbf{I}\times\mathbf{B}\left(R + \frac{\beta M}{D^*} + \frac{\sigma\beta M}{D^*}\right).
\end{aligned} \tag{79}
$$

出現了沿磁場方向的电流，如果令等效电場与磁場垂直，則

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}&\left[1 + \frac{\sigma\beta^2}{D^*} - \frac{B^2M^2}{D^*} + \frac{(RD^* + \beta M + \sigma\beta M)^2M^2}{D^* + \sigma\beta^2 - B^2M^2}\right] = \\
&= \sigma\left[\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)_i - \frac{RD^* + \beta M + \sigma\beta M}{D^* + \sigma\beta^2 - B^2M^2}\left(\mathbf{E}' - \frac{1}{e_1}(\nabla\mu_1)\right)\times\mathbf{B}\right].
\end{aligned} \tag{80}
$$

如果令 $\beta = M = 0$，即不考虑中性粒子扩散所引起的耦合效应，所得結果就是完全游离等离子体的情形，即(38)式．

若 $\mathbf{I} = 0$，則(76)，(77)式可以化为

$$f^{-1}\mathbf{J}_3\left(1+\frac{B^2}{\sigma^2\beta^2}\right)=-D^*(\nabla\mu_3')_T-\frac{D^*M}{\sigma\beta}[(\nabla\mu_3')_T\times\mathbf{B}].$$

同样,由于磁場的影响,沿 $(\nabla\mu_3')_T$ 方向的扩散减小,产生了垂直于磁場方向的扩散，这原是意料中的結果。

参 考 文 献

[1] Kihara, T., *J. Phys. Soc. Japau.* **14** (1959), 128.
[2] Cowling, T. G., Magnetohydrodynamics.
[3] Spitzer, L., Physics of fully ionized gases.
[4] De Groot, S. R., Thermodynamics of Irreversible Processes.
[5] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Электро динамика Сплошных сред.

THERMODYNAMICS OF THE PLASMA

CHIAO TEN-CHIANG

(Normal College, Kiang-Su)

ABSTRACT

In this paper, thermodynamics of irreversible processes has been applied for investigating the plasma in a uniform magnetic field. The current equations are derived and the effect of the magnetic field on the current is discussed. Effects of the magnetic field, diffusion and thermal diffusion on the current of a partially ionized plasma as well as the effect of the magnetic field on the diffusion are discussed also.