

磁声参量振盪的理論*

李蔭远 冷忠昂 潘守甫

摘 要

在本文中,我們从磁-弹性耦合的宏观表达式,通过經典場論的方法,求得弹性振动和磁振盪的耦合方程,用来分析了伴随波长約等于鉄氧体样品的綫度的声振动而存在的磁振盪(磁声模)。文中指出, Spencer 和 LeCraw 所发现的磁声效应是磁声模和靜磁模在注入場的激发下产生的参量振盪現象(也可以說是热声子的电磁訊号的放大)。我們引用 Berk 等人在討論一种半靜磁操作放大器文章中給出的公式,算出 Spencer-LeCraw 实验所需要的功率,其結果与记录的数据相接近。我們提出了使任一靜磁模配合磁声模产生振盪的調諧条件以及降低激发功率和观测几十到几百兆赫的声频的办法。通过磁声模和靜磁模的交变場向量的空間对称性的分析,我們推导出磁声参量振盪的选择定則:对于球体三个主要弹性振动模(旋轉模、向径模和椭球模), (1) 靜磁模(n, m, r)的 Walker 指标 n 是偶数者不产生磁声效应; (2) 指标 m 是奇数者不与旋轉模产生磁声效应, m 是偶数者不与向径模或椭球模产生磁声效应。我們也举出第一类本征振动中有只可能和 n 是偶数、 m 是奇数的靜磁模产生参量振盪的例子。Spencer-LeCraw 局限于使靜磁場調諧在 (110) 模上,所观察到的現象仅仅是本文所給出理論預見的一个特殊情况。他們发现了椭球模和向径模的頻率显著地出現,但并无旋轉模的頻率,这是上述的选择定則的具体验证。最后,我們指出,热声子的参量放大可能形成鉄氧体微波放大器的噪声的来源。

§ 1. 引 言

通过鉄磁介质的磁致伸縮效应,电磁振盪的能量部分地轉換为声振盪,这是許多年来人所熟知的事实,并且已經在超声波技术上普遍地应用到。在超高频(微波)波段内,自然也会有磁声耦合的相关效应。根据近年来鉄氧体微波器件在技术上的成长来推想,磁声耦合的作用在超高频方面很可能出現内容丰富和关键性的发展。在过去人們研究过自旋波与声子之間的碰撞过程来推算鉄磁介质的弛豫时间(自旋-晶格弛豫),最近两三年内才开始出現了一些与超高频技术的未来发展可能有直接关系的理論探討和实验发现。不难看出,在这一方面研究工作正在开展,但是,从了解自然規律轉变到控制和使用自然規律的过程,目前还只是一个开端。

Kittel^[1] 在一篇理論分析中,曾經明确地提出利用旋磁性的超声器件的原理。他由引用經典場論的公式,得到了自旋波和声波的耦合方程,从而指出了,橫向弹性波在飽和磁化的介质中传播时将产生极化方向的旋轉(弹性波的法拉第旋轉)。角頻率 $\omega \approx 10^3$ 兆赫的声波,在每一波长的距离内,旋轉角度約等于 1 弧度;因之,在原理上可能制成超声傳輸

* 1960 年 7 月 16 日收到

系統中的非互易器件。虽然在目前百兆赫以上的超声技术尚不够成熟, Kittel 所提出的非互易器件的实现尚有待于繼續研究, 但无疑地, 制成这一类新器件(磁声器件)的可能性, 是应当予以注意的。

在实验发现的現象中, 我們要特别提到 Spencer 和 LeCraw^{[2,3]1)} 在 1958 年所作出的一个类似于 Suhl 式鉄氧体微波放大器的振盪現象^[4], 所出現的电磁波的頻率之一是 $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (簡称 YIG) 球状样品中声振动的本征頻率 f_a , 而另一頻率則等于激发波頻率 f_p 与 f_a 之差。不难理解到, 这是由于样品中的弹性振动(热声子)通过自旋和晶格之間的耦合控制了注入場的激发下产生振盪的結果。Spencer 和 LeCraw 称之为磁声共振。这現象以及更为一般的同类型的現象, 在本文中將更明确地称之为磁声参量振盪²⁾。这一效应实质上是一个自旋-晶格弛豫过程的非綫性現象, 也是这类現象中唯一被观察到的, 这不过是一个开端。对于自旋-自旋弛豫过程的非綫性現象, 我們知道得就比較多了^[5]。值得指出的是, 激发磁声参量振盪并不需要很高的注入功率。

在叙述我們对磁声参量振盪的理論工作之前, 有必要先总结一下属于这一效应的已被观测到的事实。Spencer 和 LeCraw 將損耗很低的 YIG 单晶样品(峯寬 $\Delta H \approx 0.5$ 奥)放在諧振腔主模的空間磁場均匀分布的位置上, 由此他們实测到:

(a) 当注入功率 W_p 达到 3 毫瓦时, 出現 $f_a = 7.237$ 兆赫和 $f_d (=f_p - f_a)$ 的电磁波($f_p \approx 9300$ 兆赫, 球状样品直径为 0.0175 英寸)。在 W_p 达到 22 毫瓦时出現 $f_a = 13.66_0$ 兆赫和相应的 f_d 的振盪。振盪出現的条件是外加靜磁場 H_0 調諧到接近于 f_a 的 Kittel 共振点(一致进动的共振点)。根据 YIG 晶体的声速实测数据推算出球体的弹性波的向径模和椭球模的基頻, 就各別地同上面两个观测到的 f_a 相差不出 3%。Spencer 和 LeCraw 还举出了其他許多事实, 証明 f_a 与弹性球体的自然振动的联系不是数字的巧合, 而是現象的实质。

(b) 当注入功率只增加到 3 毫瓦, 必須使外加靜磁場 H_0 調諧到 f_d 的一致进动共振点, 才产生 $f_a = 7.237$ 兆赫和相应的 f_d 的振盪。当 W_p 繼續增大, 則在一定幅度內变动 H_0 , 仍出現一对 f_a 和 f_d 的电磁波, 但 f_a 和 f_d 的值受 H_0 的影响。这一現象可称为頻率曳移(frequency pulling), 由 $W_p = 11$ 毫瓦測得的实验数据推算出曳移率 $\frac{\Delta f_d}{\Delta H_0} \approx 10^{-3}$ 兆赫/奥。

(c) 当注入功率增高时, 相应于以上提到的两种頻率的倍頻以及高次倍頻的振盪相繼出現。当 W_p 达到 80 毫瓦时, 从几兆赫到 30 兆赫之間約有 20 个互不为整数关系的 f_a 出現。向径模和椭球模的基頻始終是所有一切出現的 f_a 中最強烈的。值得注意的是, Spencer 和 LeCraw 的两篇报告中均未提到球体弹性振动的旋轉模的 f_a 及其倍頻在这一效应中被观测到。根据他們的声速数据可以算出

$$(f_a)_{\text{rot}} = \frac{v_t}{a} (0.917) = 15.9 \text{ 兆赫},$$

1) 这两篇报告的内容將称为 S-L 实验。

2) Suhl 式放大器属于参量放大器的一类, 其中鉄氧体的磁感被訊号場所調制在注入場的激发下产生振盪和放大。在这里可变磁感是等效綫路分析中的主要参量^{[4][5]}。

这里 a 是球半径 (0.0223 厘米), $v_s = 3.865 \times 10^5$ 厘米/秒 (見文献[3]).

我們將沿用 Kittel 曾經使用过的場論方法, 推导出磁声耦合的基本方程, 然后再进一步通过麦克斯韦方程得到伴随弹性振动而存在的电磁場的势函数的微分方程, 以及磁声参量振盪中頻率各为 f_a 和 f_d 的电磁波的耦合方程組. 从对于球体的几个主要弹性振动正則模式的空間对称性, 我們推导出伴随它們的磁向量的对称性. 使用 Suhl 的铁氧体参量放大器理論中的充填因子的公式, 即可看出, 在 S-L 实验中只观测到向径模和椭球模的共振而缺乏旋轉模的事实是各別的对称性的必然結果. 根据类似的推导, 我們給出了在某些 S-L 实验中未曾試驗过的安排下应发现的現象的預見, 并且指出, 在有些情况下, 旋轉模将出现強烈的共振, 但同时却不出现向径模和椭球模的效应. 从对称性的分析, 我們还得到了它們出現的选择定則.

§ 2. 磁声耦合方程

我們考虑一飽和磁化的椭球状样品, 其在 z 方向的主軸与外場 H_0 平行. 我們用 H_z , H_{el} , H_{int} 和 H 分別代表以单位体积計算的哈密頓量的塞曼能部分、弹性能部分、磁-弹性相互作用部分和总的哈密頓量, 即

$$H = H_z + H_{el} + H_{int}.$$

我們將要考查的磁振盪的空間分布的波长接近于样品的綫度, 由交換作用耦合着的磁矩的相互方位极少改变; 因此, 我們有充分的理由在这里略去交換能的哈密頓量. 首先写出 H_z , 我們依照 Kittel 的方式, 选择

$$\psi = M_x, \quad \pi = -M_y/\omega_s$$

作为力学共軛变量; 这里 $\omega_s = \gamma M_s$, M_s 是样品的飽和磁化強度, $\gamma = 17.6 \times 10^6$ 赫/奥是磁轉比的絕對值. 在我們所考虑的情况下, $M_x, M_y \ll M_s$, 因之

$$M_z = (M_s^2 - M_x^2 - M_y^2)^{\frac{1}{2}} = M_s - \frac{M_x^2 + M_y^2}{2M_s},$$

$$\begin{aligned} H_z &= -\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = -M_x h_x - M_y h_y - M_z (H_i + h_z) \\ &= -M_s (H_i + h_z) - h_x \psi - \omega_s h_y \pi + \frac{1}{2\omega_s} (\omega_H + \gamma h_z) (\psi^2 + \omega_s^2 \pi^2), \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $H_i = H_0 - N_z M_s$ ($N_z = z$ 方向的退磁因子), $\omega_H = \gamma H_i$. 以后我們將不含变数 ψ 和 π 的項略去不写, 同时将含 h_z ($\ll H_i$) 的高一阶的小量也省略掉, 于是

$$H_z = \frac{\omega_H}{2\omega_s} (\psi^2 + \omega_s^2 \pi^2) - h_x \psi + h_y \omega_s \pi.$$

其次,

$$\begin{aligned} H_{el} &= \frac{1}{2\rho} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{A}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + \\ &\quad + \frac{B}{2} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 - 4e_{xx}e_{yy} - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx}), \end{aligned} \quad (2)$$

这里 ρ 是介质的密度, $\mathbf{P}$ 为动量, A 和 B 是弹性模量的参数, 应变分量 $e_{xx}, e_{xy}, \dots$ 等由位移 $\mathbf{R}$ 导出:

$$e_{xx} = \frac{\partial R_x}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{\partial R_y}{\partial x},$$

与 Love 的专著^[6]中用的定义相同。磁-弹性相互作用能合于立方对称的表达式^[7]为

$$H_{\text{int}} = b_1(e_{xx}\alpha_1^2 + e_{yy}\alpha_2^2 + e_{zz}\alpha_3^2) + 2b_2(e_{xy}\alpha_1\alpha_2 + e_{yz}\alpha_2\alpha_3 + e_{zx}\alpha_3\alpha_1) + \\ + b_3\Delta(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + \dots, \quad (3)$$

这里 $b_1, b_2, \dots$ 等是一般称为磁-弹性耦合常数的参量, $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, 第一、二项是和綫性磁致伸縮相关的能量; 第三项是和体积磁致伸縮相关的。 α_1, α_2 和 α_3 是 $\mathbf{M}$ 的方向余弦: $\alpha_1 = M_x/M_i, \dots$ 等。将 H_{int} 用共軛变数 ψ 和 π 来表达, 我們有

$$H_{\text{int}} = \frac{b_1}{M_i^2}[(e_{xx} - e_{zz})\psi^2 + (e_{yy} - e_{zz})\omega_i^2\pi^2 + e_{zz}M_i^2] + \\ + \frac{2b_2}{M_i^2}[-e_{xy}\omega_i\psi\pi - e_{yz}\omega_iM_i\pi + e_{zx}M_i\psi] + \\ + \frac{b_3}{M_i^2}\Delta[\psi^2 + \omega_i^2\pi^2]. \quad (4)$$

在上式中, 我們已經將含 M_x 和 M_y 的二次以上的項完全略去。在 (4) 中最大的一項是 b_1e_{zz} , 但它在以后的运动方程中沒有貢獻; 其次是含 e_{zx} 和 e_{yz} 的兩項。其他各項是更次要的, 只在本文最后一部分要被用到。在这里我們可以只取

$$H_{\text{int}} = B_2(e_{xx}\psi - e_{yz}\omega_i\pi), \quad (5)$$

这里 $B_2 = 2b_2/M_i$ 。

我們注意到 (2) 給出的是对各向同性介质的表达式, 同时在总的 H 中也没有包括磁晶各向异性能。这一簡化将使理論的結果在細节上与实际情况可能有些次要差异。

下面是由共軛变数 $\psi, \mathbf{R}$ 与 $\pi, \mathbf{P}$ 的哈密頓正则方程得到耦合系統的运动方程, 在其中已經將 ψ 和 π 換回到 M_x 和 M_y , 同时 $\mathbf{P}$ 換成 $\rho\dot{\mathbf{R}}$:

$$\frac{1}{\gamma}\dot{M}_x = -H_iM_y + M_i h_y - B_2M_i e_{yz}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\gamma}\dot{M}_y = H_iM_x - M_i h_x + B_2M_i e_{zx}, \quad (7)$$

$$\rho\ddot{R}_x = \frac{\partial}{\partial x}[A\Delta - 2B(e_{yy} + e_{zz})] + B\left(\frac{\partial}{\partial y}e_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}e_{zx}\right) + B_2\frac{\partial M_x}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\rho\ddot{R}_y = \frac{\partial}{\partial y}[A\Delta - 2B(e_{zz} + e_{xx})] + B\left(\frac{\partial}{\partial z}e_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}e_{xy}\right) + B_2\frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\rho\ddot{R}_z = \frac{\partial}{\partial z}[A\Delta - 2B(e_{xx} + e_{yy})] + B\left(\frac{\partial}{\partial x}e_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}e_{yz}\right) + B_2\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right). \quad (10)$$

§ 3. 伴随声振盪的电磁場

由于磁-弹性耦合作用介质內出現声振动时自然伴随着电磁振盪, 两种振盪具有同一的頻率 $\omega_s(2\pi f_s)$ 和密切相关的空間分布。如 M_x, M_y 为單純的周期函数 (忽略損耗), 我們从 (6) 和 (7) 得到

$$\frac{i\omega_a}{\gamma} M_x = -H_i M_y + M_s(h_y - B_2 e_{yz}),$$

$$\frac{i\omega_a}{\gamma} M_y = H_i M_x - M_s(h_x - B_2 e_{zx}).$$

由这一联立方程组, 我们有

$$M_x = \chi_a(h_x - B_2 e_{zx}) + i\kappa_a(h_y - B_2 e_{yz}), \quad (11)$$

$$M_y = -i\kappa_a(h_x - B_2 e_{zx}) + \chi_a(h_y - B_2 e_{yz}), \quad (12)$$

这里

$$\chi_a = \frac{\gamma^2 H_i M_s}{\gamma^2 H_i^2 - \omega_a^2}, \quad (13)$$

$$\kappa_a = \frac{\gamma M_s \omega_a}{\gamma^2 H_i^2 - \omega_a^2}. \quad (14)$$

要得出电磁振荡的空间分布必须利用马氏方程: 注意到, 在我们考虑的问题中, 铁氧体样品的线度远小于频率为 f_a 的电磁波的波长, 就如在 Walker^[8] 的工作中一样, 我们可以忽略传播因素而引用静磁方程:

$$\nabla \times \mathbf{h} = 0. \quad (15)$$

因之, $\mathbf{h}$ 可以表为势函数 ψ 的梯度:

$$\mathbf{h} = \nabla \psi. \quad (16)$$

引用(11)–(16), 代入

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M},$$

我们得到决定 ψ 的微分方程:

$$\mu_a \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (\mu_a - 1) B_2 \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} \right) + 4\pi i \kappa_a B_2 \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right). \quad (17)$$

在介质内部 $\mu_a = 1 + 4\pi\chi_a$ (随 ω_a 而有改变) 而在介质外 $\mu_a = 1$. 通过(11)、(12)和(16), 可将(8)–(10)中 M_x 和 M_y 消去, 并出现含 ψ 的导数的项. 这样得到的 $\mathbf{R}$ 和 ψ 的联立微分方程很繁复, 我们将在后面采取合理的近似. 在此处我们要指出的是, Kittel 推导出的 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{M}$ 的关系是比较简单的, 与我们所得到的显然不同, 二者各有其使用的范围. Kittel 所考虑的对象是波长很短 (远小于样品的线度) 的自旋波和声波的耦合, 它们都以平面波的形式在介质中传播, 样品边界面的反射可略去不计. 我们这里所考虑的刚好与之相反, 无论是 e_{zx} 或 M_x 、 M_y , 其空间分布的周期都约略等于样品的线度; 这正是一般铁磁共振实验中经常出现的具体情况.

在我们考虑的问题中, $\omega_a \ll \gamma H_i$, 因之有

$$\chi_a \doteq M_s/H_i \equiv \chi_0,$$

$$\kappa_a \doteq 0;$$

并有

$$M_x = \chi_0(h_x - B_2 e_{zx}), \quad (18)$$

$$M_y = \chi_0(h_y - B_2 e_{yz}). \quad (19)$$

其次让我们考查一下(8)–(10)中耦合项的数量级. 将 $M_x \approx B_2 \chi_0 e_{zx}$ 、 $M_y \approx B_2 \chi_0 e_{yz}$ 代入

(8)–(10), 得到耦合項的大小接近于 $B_2^2 \chi_0 \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} \dots$ 等. 經驗数据給出 $B_2 = 2b_2/M_s \approx 10^5$ 奥, $\chi_0 \lesssim 1$, $B_2^2 \chi_0 \lesssim 10^{10}$ (尔格/厘米³) 比 $A, B \approx 10^{12}$ (尔格/厘米³) 約小两个数量級. 因之, 我們可以近似的將(17)右边的 e_{xx} 和 e_{yz} 用单纯弹性体 ($B_2 = 0$) 的自由振动的 e_{xx}^0 和 e_{yz}^0 来代替. 以后我們就用簡化了的式子:

$$\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (\mu_0 - 1) B_2 \left(\frac{\partial e_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}^0}{\partial y} \right), \quad (20)$$

这里 $\mu_0 = 1 + 4\pi \frac{M_s}{H_i}$ 与 ω_a 无关, 并且一般在实验中調制 H_0 时, μ_0 的改变也很小. 我們將称(20)为磁声方程.

Walker 的靜磁方程

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (21)$$

在介质内, $\mu = 1 + 4\pi \frac{\gamma^2 H_i M_s}{(\gamma H_i)^2 - \omega^2}$, 而在介质外, $\mu = 1$, 在形式上相当于我們的(20)忽略了磁-弹性耦合作用, 但在实质上并不是这样簡化的結果. 对于这一問題我們应有下列的認識: 在 $H_i \approx 10^3$ 奥一般靜磁模的本征頻率 $f_{mi} \approx 10^3 - 10^4$ 兆赫 (ms 指 magnetostatic modes), 相同頻率的声振盪应有的波長 $\approx 10^{-3} - 10^{-4}$ 厘米, 而靜磁模的波長約等于样品的綫度; 它們之間沒有共振的耦合¹⁾, 因而靜磁振盪并不因磁-弹性耦合作用的存在而受到不可忽略的修正. 弹性振盪对靜磁模的影响将是在长波的 Walker 函数中附加一些微弱的短波成分(漣波). 要处理这一細节, 必須考虑交換作用和传播因素, 故相关的方程并非(20). 我們还應該考虑到, Walker 解(21)式时通过边界条件来定出 μ 的本征值, 因而得到 f_{mi} . 但在(20)中 μ_0 是一个給出的参数, f_a 已被磁体的弹性模量和形状所决定. 在这一微分方程的解中包含的余函数就是 Walker 靜磁函数的綫性組合. 采用边界条件, 我們可以定出綫性組合中的系数²⁾. 以后我們將分別用 ψ_a 和 ψ_{ms} (或 $\psi_{(nmr)}$) 来表示磁声方程和 Walker 方程的解. ψ_a 所代表的振盪不可避免地要出现在磁介质的高頻現象中, 我們將称之为磁声模. 我們应順便提到的是, 研究晶格-自旋弛豫理論的工作者过去一直自行局限于短波声子与自旋波的碰撞問題上, 因而一直沒有涉及磁声模.

具有高度对称性的弹性体, 例如球体或圓柱体, 自由振盪的正則模式的位移函数 $R_{(x,y,z)}$ 見于弹性力学的专著中. 我們应將由 R 算出的已知函数 e_{xx} 和 e_{yz} ³⁾ 代入(20)的右端. 这样得到的微分方程虽然在形式上很容易化成泊松方程, 但是我們不可能在这里將要考虑的 ψ_a 完整地求出. 幸而只从分析 ψ_a 和 $\mathbf{h}_a$ 的对称性, 就已能够找到本文中所需要的知識. 从(20)不难看出, ψ_a 与 $\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} \right)$ 的奇偶对称性是一致的.

球体的三种最主要的弹性振盪^[6]是旋轉模(rotatory modes)、向径模(radial modes)和橢球模(spheroidal modes). S-L 实验中观测到的两个显著的基頻和我們在 § 1 中算出的

1) 高頻声波与自旋波之間的共振耦合已在 Kittel 的文章中討論到.

2) 我們並沒有从数学上去証明磁声方程必然有滿足边界条件的解. 我們认为这样的証明并不必要. ψ_a 所代表的磁振盪可以看作是被弹性振盪引起的强迫振盪, 因而总是存在的, (20)只是近似地决定 ψ_a 的方程式.

3) 在这里和以后, $e_{xx} \dots$ 等代表前面定义的 $e_{xx}^0 \dots$ 等, 即忽略了磁-弹性耦合算出的应变分量.

$(f_a)_{\text{rot}}$ 属于这三类正则振动中频率最低的模式。旋轉模是三重简并的,其位移为

$$\mathbf{R}_{\text{rot}(X)} = R_0 \phi(kr)(0, z, -y),$$

$$\mathbf{R}_{\text{rot}(Y)} = R_0 \phi(kr)(-z, 0, x),$$

$$\mathbf{R}_{\text{rot}(Z)} = R_0 \phi(kr)(y, -x, 0),$$

这里

$$\phi(r) = \frac{1}{r^3}(r \cos r - \sin r).$$

三者之中 $R_{\text{rot}(Z)}$ 有 $\frac{\partial e_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zy}}{\partial y} = 0$, 故旋轉模 Z 无伴随的磁振盪。向径模的位移:

$$\mathbf{R}_{\text{rad}} = R_0 \phi(hr)(x, y, z),$$

这里 $h = \omega_a/v_l$, $k = \omega_a/v_t$ (v_l 和 v_t 各是纵波和横波的速度, ω_a 由边界条件定出), 椭球模是三重简并的,三者之一的位移是

$$\mathbf{R}_{\text{sp}} = R_0(f_1(r, z^2, h, k)x; f_1(r, z^2, h, k)y; f_2(r, z^2, h, k)),$$

f_1 和 f_2 的表达式比较复杂。显然, 椭球模和向径模的奇偶对称性完全相同。

我们将考查对称性的结果列在表 1 里, 在下节中将要用到。

表 1

座 标	旋 轉 模 (X)				旋 轉 模 (Y)				向 径 模 或 椭 球 模			
	ψ_a	h_x	h_y	h_z	ψ_a	h_x	h_y	h_z	ψ_a	h_x	h_y	h_z
x	偶	奇	偶	偶	奇	偶	奇	奇	偶	奇	偶	偶
y	奇	奇	偶	奇	偶	偶	奇	偶	偶	偶	奇	偶
z	偶	偶	偶	奇	偶	偶	偶	奇	奇	奇	奇	偶

§ 4. 磁声参量振盪

A. 注入功率

在 S-L 实验中, H_0 被调谐在 f_a 的一致共振点的附近, 才能获得振盪现象。从 Suhl^[4] 放大器理论, 我们可以断言, f_a 的振盪属于静磁型的(110)模。 f_a 的振盪是我们在上一节中讨论到的磁声模之一。这种由静磁模和磁声模耦合形成的 Suhl 式振盪, 可以称之为磁声操作的参量振盪。在 S-L 实验中, 放大讯号来自介质中热声子的磁场¹⁾。静磁模和磁声模的场基本上都集中在介质所占的体积内, 具有较大的充填因子, 因而并不要求功率很高的注入场来激起振盪。我们可以利用放大器理论中已有的公式, 来估计 S-L 实验所需要的最低功率, 并与观测值相比较。在这一实验中, 外场不调谐于注入频率, 而调谐于振盪频率之一的(110)模的安排, 相当于 Berk 等人^[9]所提出的修正半静磁操作放大器。后者的讯号场是谐振腔的一个本征模。Berk 等人证明了当外加静磁场调制到离 $\omega_p - \omega_s$ 的

1) 热声子的激发幅度由玻色统计律决定。 $f_a \approx 10^7$ 赫, 除非 $T \ll 1^\circ\text{K}$, 我们有

$$\bar{n} \approx kT/hf_a.$$

从 $T = 1^\circ - 300^\circ\text{K}$, $\bar{n}_a = 10^3 - 10^5$ (如此巨大的量子数, 使我们应用经典统计充分得到保证)。同时 $\bar{n}_a$ 在室温也只达到 10^3 的数量级, 故 f_a 有较为强大的讯号。

一致共振点附近时, 訊号場(頻率為 ω_s , 方向平行于靜磁場)的磁化率的虛部 $\chi''_s < 0$, 即訊号場从注入功吸取能量; 并且在靜磁場調諧于 $\omega_p - \omega_s$ 的共振点时, χ''_s 取負的最小值(絕對值最大):

$$(\chi''_s)_{\min} = - \left(\frac{\gamma h_p}{\omega_s} \right)^2 \frac{M_s}{\Delta H},$$

这里 h_p 是注入場的振幅, ΔH 是鉄氧体的共振峯寬度。这一公式完全可以移用到我們考虑的情况, 在这里 ω_s 应換为磁声模的 ω_a 。在这一过程中磁声模的品质因子

$$Q_F^{-1} = \chi''_s \int_{\phi} \int_{T_a} (h_z^a)^2 dv dt / 2\pi E V_\phi.$$

E 为单位体积內儲存的能量; 上式分子中的积分范围是鉄氧体的体积 V_ϕ 和声頻的周期 T_a 。对于 E 和 h_z^a 不难作出粗略的估計: $E \sim B e^2$, 同时 $h_z^a \sim B_2 e$, 故有 $Q_F^{-1} \sim \chi''_s B_2^2 / B \sim \sim 10^{-2} \chi''_s^{(1)}$ 。声振动的損耗为 Q_a^{-1} , 当磁声模自注入場吸取能量的速率超过弹性振动的損耗率, 即

$$\frac{1}{Q_F} + \frac{1}{Q_a} < 0$$

时, 必然出現参量振盪。由此得到注入場的臨閾強度:

$$(h_p)_{\text{臨}} = \frac{\omega_a}{\gamma} \sqrt{\frac{10^2 \Delta H}{M_s Q_a}}, \quad (22)$$

我們引用 S-L 实验中的数据: $\Delta H \sim 0.5$ 奥, $M_s \sim 150$ 高斯, $Q_a \sim 10^5$ 和 $\omega_a \sim 2\pi \times 7.2$ 兆赫。从上式算出 $(h_p)_{\text{臨}} \sim 10^{-2}$ 奥。S-L 实验中諧振腔的 $Q = 500$, 假定是一体积約为 10 立方厘米的矩形諧振腔, 相应于 $h \sim 0.01$ 奥的功率为 0.1 毫瓦, 而实验至少用了 3 毫瓦才能激发参量振盪。我們上面估計的 $|Q_F|$ 是偏高的, 因而 $(h_p)_{\text{臨}}$ 的值会偏低一些, 但大体上理論与实验的数据是足够接近的。

式(22)还表明了注入功率的臨閾值近似地比例于 f_a^2 , 相应的在 S-L 实验中观测到向径模($f_a = 13.66$ 兆赫)的出現要求比椭圆模($f_a = 7.222$ 兆赫)約大三、四倍的注入功率。从 Berk 的推导不难看出, $(h_p)_{\text{臨}}$ 大約比例于 f_a 的关系来自下面的事实: 当 f_a 增大时注入功的頻率离开共振点越来越远, 因而注入功率的有效使用越来越低。如果 H_0 不十分調諧在相当于本征頻率 f_a 的 f_d 的共振点上而是稍稍偏高, 則这样对于利用注入功是有利的, 但是对于激发声頻的共振耦合則是不利的。这两个相互矛盾的因素引起 §1 中提到的注入功大于臨閾值时可能产生的頻率曳移現象, 这时实验观测到 f_a 减小而 f_d 增大, f_d 比在未产生曳移前更接近于 H_0 的共振点, H_0 在 f_a 与 f_p 的共振点之間。从实验数据算出的曳移率 $\Delta f_d / \Delta H_0$ 很小 (≈ 0.001 兆赫/奥), 而且 H_0 不能在較大的范围内变动。在注入功已增加到 80 毫瓦时, H_0 可变动的幅度也仅仅 30 奥。由此可見, 要求 H_0 調諧在相应于本征頻率 f_a 的 f_d 的共振点上的因素是十分強大的, 这一事实明确的指出, $Y_3Fe_5O_{12}$ 的 f_a 有很窄的能級寬度。

B. 选择定則

在 Berk 的半靜磁操作中 h_z 在 z 方向上, 并且有空間均匀的分布, 而与之耦合的靜磁

1) 这里的估計指出了, 伴随弹性振动的磁振盪的能量仅为全部能量的 1/100。

模的势函数为 $\phi_{(100)} \sim (x - iy)$ 有空间均匀分布的 h_x 和 h_y . 在 S-L 实验中, 讯号场来自磁声模, 因之 f_a 的出现必须 h_z^a 有空间均匀的成分, 即要求

$$I_a = \int_{v_\phi} h_z^a dv \neq 0, \quad (23)$$

上式中 v_ϕ 指积分区域为铁氧体的体积. 样品形状为旋转椭球, z 轴在旋转对称轴方向上. 如果 h_z^a 对 x, y, z 三变量之一具有奇对称性, 则 $I_a = 0$, 这一磁声模的频率就不再出现. 从 §3 的表 1 中列出的弹性球的静磁振盪场的对称性, 我们立即看出; 球体的旋转模 $I_a = 0$, 因之 $(f_a)_{\text{rot}}$ 不可能在 S-L 实验中出现. 向径模和椭球模的 h_z^a 对于三个变数都是偶对称性的, 除较特殊的空间分布外, 这一性质基本上保证了它们的频率能在 S-L 实验中观测到.

不难想到, S-L 实验的具体安排只是磁声参量振盪的一个特殊情况. 磁声操作的耦合振盪之一可以选择 (110) 以外的静磁模. 计划实验的办法是, 利用依照 Walker 理论算出的频谱曲线的图¹⁾找出 f_a 调谐在某一 (n, m, r) 模上的 H_0 的值; 为了实验所需的注入功率不至于太高, 这一 H_0 又必须使 f_p 大约是 (110) 的频率. 这样的调谐安排使可能用到的 (n, m, r) 模限于那些在 Walker 频谱图中的曲线与 (110) 有交点的²⁾, 而 H_0 应该是在交点附近的 (n, m, r) 曲线上的 f_a 的共振磁场. 这样的调谐条件当然比在 S-L 实验中的复杂了一些, 在必要时可由调节 $\omega_p/4\pi M_s$ 来达到目的. 事实上, 还有可能使 H_0 同时是 f_p 在 (110) 上和 f_a 在某一 (n, m, r) 上的共振磁场, 这样会使激发磁声效应的注入功率更降低一、两个数量级, 并在数个毫瓦的功率观察到数十到数百兆赫的声频的出现. 二者都将是有意義的創举.

我们将要设法推导出某一类的 $\phi_{(n, m, r)}$ 可能与某些 ϕ_a 配合产生参量振盪, 即当外磁场与 f_a 安排在某一 (n, m, r) 的共振点时, 磁声参量振盪中可能出现那些弹性波的频率的规律 (选择定则).

依照 Suhl 放大器理论, ω_1 和 ω_2 ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$) 的耦合强度比例于积分式

$$J = \int_{v_\phi} [h_{x_1}(M_{x_2} + iM_{y_2}) + h_{x_2}(M_{x_1} + iM_{y_1})] dv \quad (24)$$

参量振盪效应出现的条件是 $J \neq 0$. 从 Suhl 的论文中所引用 Fox 和 Weiss 提出的物理图象, 可以理解到这一判据可以被移用在这里来推导我们要找的选择定则³⁾, 针对我们考虑的问题, 将 (24) 改写为

$$J_a = \int_{v_\phi} [h_x^a(M_x^a + iM_y^a) + h_y^a(M_x^a + iM_y^a)] dv, \quad (25)$$

S-L 实验中 $h_z^a = 0$, h_x^a 和 h_y^a 有空间均匀的分布, J_a 和 (23) 的 I_a 成比例. 在一般情况下, 我们有

$$\begin{aligned} M_x^a + iM_y^a &= \chi_0[(h_x^a + ih_y^a) - B_2(e_{xx} + ie_{yz})], \\ M_x^a + iM_y^a &= \chi_d(h_x^a + ih_y^a). \end{aligned}$$

1) 文献[8]的 Fig 3 或文献[10]中的 Fig 1, 后者更详细些.

2) 在两个静磁模的简并点附近, 可能产生二者的简并耦合现象^[11]. 我们在这里假定样品足够小, 同时注入功率并不太高, 或由于选择定则这一额外的效应并不出现.

3) 这样做不是完全无可非议的, 在本文“附录”中将从一个严格的分析方法, 得到同样的选择定则.

从磁声振盪方程, 可以断定 e_{xx} 和 h_x^a 以及 e_{yz} 和 h_y^a 分别具有同样的奇偶对称性. 如果从对称性的分析得出来自某一靜磁模的 h_x^a 和 $h_x^a + ih_y^a$ 与来自某一磁声模的 h_x^a 和 $h_x^a + ih_y^a$, 使

$$J_a' = \int_{v_\phi} h_x^a (M_x^a + iM_y^a) dv, \quad (26)$$

$$J_a'' = \int_{v_\phi} h_x^a (M_x^a + iM_y^a) dv \quad (27)$$

两积分均为 0, 則 J_a 也必为 0, 于是这一对靜磁模和磁声模在注入場的激发下必不可能产生参量振盪.

Walker 函数 $\psi_{(n,m,r)}$ 有以下的特征(用柱坐标 ρ, ϕ, z 来表达): 如 $n-m$ 为偶数(或奇数), 則 $\psi_{(n,m,r)}$ 是 z 的偶(或奇)函数, 而含有变数 ϕ 的因子是 $e^{-im\phi}$. 为了便于考查 J_a' 和 J_a'' 是否为零, 我們将来自 $\psi_{(n,m,r)}$ 的和来自 ψ_a 的磁向量的特征列在下表內, 其中 $k=0$ 或正負整数. J_a' 和 J_a'' 的被积分函数必須是 z 的偶函数, 同时又含有不依赖于 ϕ 的項, 积分才可能不为零. 根据这一事实, 我們得到下列选择定則(即磁声参量振盪出現的必要但非充足的条件): 旋轉模只可能和 $n-m=$ 奇, 同时 $m=$ 偶的靜磁模相配合产生参量振盪, 而向径模和椭球模則只可能和 $n-m=$ 偶, 同时 $m=$ 奇的靜磁模相配合产生参量振盪. 这些規律归結起来是: 1) n 为奇数的靜磁模才有可能和这三类磁声模配合产生参量振盪和 2) m 为奇数的不与旋轉模配合产生参量振盪, 而 n 为偶数的不与向径模或椭球模产生参量振盪. S-L 实验中的靜磁模是(110)型, 出現的事实与上述的較一般的选择定則相符. [使用同样的分析方法, 我們得到靜磁模操作参量振盪(即二个靜磁模配合产生的参量振盪)的必要条件是 $n_1 + n_2 =$ 偶¹⁾和 $m_1 + m_2 = 1$].

表 2

	靜 磁 模			磁 声 模			
	z 的对称		ϕ 的部分	旋 轉 模		向 径 模、 椭 球 模	
	$n-m$ 奇	$n-m$ 偶		z 的对称	含 ϕ 的傅里叶項	z 的对称	含 ϕ 的傅里叶項
h_x	偶	奇	$e^{-im\phi}$	奇	$\frac{\cos}{\sin} (2k+1)\phi$	偶	$\cos 2k\phi$
$h_x + ih_y$	奇	偶	$e^{-i(m-1)\phi}$	偶	$\frac{\cos}{\sin} 2k\phi$	奇	$e^{i(2k+1)\phi}$

这里我們只討論了三种最显著的磁声模与靜磁模配合产生参数振盪的选择規律. 按照同样的步驟可以找到, 其它的磁声模应有的选择性. 它們之中有一些恰好会在旋轉模, 向径模和椭球模都不出現的情况下, 即和 n 为偶数的 ψ_{ms} 配合产生参量振盪. 例如: 弹性力学分析中得出的球体第一类振动中 $X_n = r^2 p_2(\cos \theta)$ 的正則模^[6] 就是这样的 [p_2 是二阶带諧函数]. 它的选择定則只可能和 $n=$ 偶, $m=$ 奇的靜磁模配合. 至于空間分布比較复杂的(即相关的諧函数中含有田諧函数的)正則振动出現的可能性則較普遍, 即和 $n=$ 偶或奇的 ψ_{ms} 都能配合. 但是由于缺乏单一的奇偶对称性, 耦合強度必然減小, 需要較強的注入功率才能觀測到.

1) 这一个选择条件与 Морозов^[18] 得到的 $n_1 = n_2$ 不相同, 将在另一文中再討論.

我們在本文內提出的一般化的磁声参量振盪和用对称分析得到的选择定則, 不难从实验上予以验证。应该指出, 得出的选择定則可能在注入功率过高时遭到破坏。

§ 5. 討 論

a) Suhl 提出参量振盪有三种配合方式(或放大器有三种操作方式): 即靜磁方式(靜磁模-靜磁模)、半靜磁方式(靜磁模-电磁模)和电磁方式(电磁模-电磁模)。(电磁模指諧振腔的本征振盪模)。在本文中, 我們討論了磁声模和靜磁模配合的参量振盪。显而易见, 磁声模也和电磁模配合产生参量振盪; 二者可以分別称之为磁声-靜磁方式和磁声-电磁方式, 总称为磁声方式。磁声-磁声之間的配合, 則只有在其一是与短波声子相关的磁振盪时才有可能滿足頻率条件($\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$)的要求。

b) 当 Suhl 式放大器在高功率下操作时, 不可避免的有各种可能的磁声参量振盪出現, 其中相应低声頻的 f_d 与 f_p 相差不大, 将对电源(注入功)起着无規則的干扰作用, 形成一个可能的噪音来源。关于鉄氧体参量放大器的噪音問題, 现在尚无可靠的实验测试。在必須用脉冲功率来操作的情况下, 不太可能作这样的工作。过去一直相信, 作为固体器件的鉄氧体参量放大器应有低噪音的优点, Anderson^[12] 对此曾經表示怀疑, 他认为鉄磁介质的器件也許会有未曾想到的噪音来源。我們在这里明确地指出了一些可能形成噪音的机构, 虽然没有能够作出定量的估計, 但这是很值得进一步研究的。

c) 磁声参量振盪是自旋-晶格耦合的非綫性过程, 就和自旋-自旋耦合的非綫性过程一样, 也必然在吸收系数 μ'' 对 H_0 的曲綫上有所表現。这在 S-L 的实验中心并未观测到, 我們的理論处理也未涉及这一方面。这是值得在以后的工作中加以发展的。

d) 从原則上看, 磁声参量振盪效应未始不可以发展成为一个通过微波技术来測量鉄磁介质的弹性內耗、本征頻率等性质的实验方法, 不需使用任何超声装置将是这一方法的特点。

附录 磁声模和靜磁模的相互作用

在正文中我們引用 Suhl 理論中的耦合积分来推导出磁声效应的选择定則。我們还可以更严格一些, 从表达磁声模和靜磁模在有注入場时的相互作用的方程出发去得到同样的結果。这样作牽涉的細节多一些, 也值得写出来。

在 § 2 中, 我們省略了 H_{int} 的含 M_x 和 M_y 的二次項, 以及 H_z 中含 h_x 的項。当我們考虑到注入場的作用时, 这些項都还应该保留, 我們有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \dot{M}_x &= -[(H_i + h_x)M_y - M_y h_y] - B_1(e_{yy} - e_{zz})M_y - \\ &\quad - B_2(e_{xy}M_x + e_{yz}M_y) - B_3\Delta M_y, \\ \frac{1}{\gamma} \dot{M}_y &= [(H_i + h_x)M_x - M_x h_x] + B_1(e_{xx} - e_{zz})M_x + \\ &\quad + B_2(e_{xy}M_y + e_{yz}M_x) + B_3\Delta M_x. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

一个周期性的实变量可分为 $e^{i\omega t}$ 和 $e^{-i\omega t}$ 两部分, 系数互为共轭。下面用不加 * 号和加 * 号的符号分別代表这两部分的系数。我們的問題涉及三个頻率各为 f_p , f_d 和 f_a 的周期函

数。根据在 § 3 中已讲清楚的理由, 我们将完全忽略频率为 f_p 或 f_d 的弹性波。由 (28) 我们写出

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} i\omega_p M_x^p &= -H_i M_y^p + M_z h_y^p, \\ \frac{1}{\gamma} i\omega_p M_y^p &= H_i M_x^p - M_z h_x^p; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} i\omega_a M_x^a &= -H_i M_y^a + M_z h_y^a - h_z^{d*} M_y^p - B_1 e_{yz} M_z, \\ \frac{1}{\gamma} i\omega_a M_y^a &= H_i M_x^a - M_z h_x^a + h_z^{d*} M_x^p + B_1 e_{zx} M_z; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} i\omega_a M_x^d &= -H_i M_y^d + M_z h_y^d - h_z^{d*} M_y^p - B_1 (e_{yy} - e_{zz}) M_y^p - B_2 e_{xy} M_x^p - B_3 \Delta M_y^p, \\ \frac{1}{\gamma} i\omega_a M_y^d &= H_i M_x^d - M_z h_x^d + h_z^{d*} M_x^p + B_1 (e_{xx} - e_{zz}) M_x^p + B_2 e_{xy} M_y^p + B_3 \Delta M_x^p. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

已设弹性振动为 $\cos \omega_a t$ 的形式, 各应变分量的系数都是实数。 (29) 中原应有的 $h_z^d M_x^a$, $h_z^d M_y^a \dots$ 之类的项已作为高次小量被略去。

设注入场空间分布均匀而且是正圆偏振的, 在未加样品的情况下, 其振幅为 h_p^* 。对于旋转椭球状样品,

$$\left. \begin{aligned} h_x^p &= h_p^* - N_t M_x^p, \\ h_y^p &= -i h_p^* - N_t M_y^p, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

这里 N_t 是在 x - y 面内的退磁因子。将 (32) 代入 (29), 并且为了照顾到损耗, 将 ω_p 换为 $\omega_p + i\eta\Delta H$, 我们推导出

$$\left. \begin{aligned} M_x^p &= \gamma h_p^* M_z / \omega_{res} - (\omega_p + i\eta\Delta H) \equiv M_p, \\ M_y^p &= -i M_p, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

这里

$$\omega_{res} = \gamma(H_i + N_t M_z) = \gamma[H_0 - (N_z - N_t)M_z].$$

M_p^z 是一高次小量。从

$$M_z = (M_x^2 - M_y^2 - M_z^2)^{\frac{1}{2}} = M_z - \frac{1}{2M_z} (M_x^2 + M_y^2)$$

的关系, 得到

$$M_z^a = -\frac{1}{2M_z} (2M_x^{d*} M_x^p + 2M_y^{d*} M_y^p) = -\frac{\theta}{2} (M_x^{d*} - iM_y^{d*}), \quad (34)$$

$$M_z^d = -\frac{\theta}{2} (M_x^{a*} - iM_y^{a*}). \quad (35)$$

这里

$$\theta \doteq \sin \theta = \sqrt{|M_x^p|^2 + |M_y^p|^2} / M_z = 2|M_p| / M_z \quad (36)$$

是铁氧体被注入场激发后磁矩向量的进动角。定义

$$\mathbf{h}^a = \nabla \psi_a, \quad (37)$$

$$\mathbf{h}^d = \nabla \psi_d. \quad (38)$$

将 (33) 代入 (30) 和 (31), 并用到 (34) — (38), 然后按照 § 3 中的程序逐步推算, 我们得到

$$\left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_a - (\mu_0 - 1) B_2 \left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yy}}{\partial y} \right) =$$

$$= 2\pi\theta(\chi_0 + \chi_d + \kappa_d) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_{ms}^*}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_{ms}^*}{\partial y} \right) \quad (39)$$

和

$$\left[\mu_d \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_{ms} = 2\pi\theta \left[(\chi_0 + \chi_d + \kappa_d) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_a^* + \right.$$

$$\left. + \chi_d \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \kappa_d \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) - B_2 \chi_0 \frac{\partial}{\partial z} (e_{xx} - i e_{yy}) \right] \quad (40)$$

这里

$$\chi_d = \frac{\gamma^2 H_i M_s}{(\gamma H_i)^2 - \omega_d^2},$$

$$\kappa_d = \frac{\gamma M_s \omega_d}{(\gamma H_i)^2 - \omega_d^2},$$

$$\varphi_1 = B_1(e_{xx} - e_{zz}) - i B_2 e_{xy} + B_3 \Delta,$$

$$\varphi_2 = B_1(e_{yy} - e_{zz}) + i B_2 e_{xy} + B_3 \Delta.$$

我們在运算中将 θ^2 的項都略去了。(39) 和 (40) 表达了在注入場的激发下靜磁模和磁声模的相互作用。在 $\theta = 0$, 即无注入場的激发时, (39) 和 (40) 簡化为 (20) 和 (21)。

現在我們可以利用 (39) 和 (40) 来考查某一磁声模和一靜磁模是否能在注入場的激发下产生振盪。关键在于从这两个方程解出的 ψ_{ms} 和 ψ_a 能否满足边界条件: 在样品表面 ψ 和 $\mathbf{b}$ 的法綫分量 b_n 必須都是連續函数*。既然 $\theta \ll 1$, 我們可以将 ψ_a 和 ψ_{ms} 各写为

$$\psi_a = \psi_a^{(0)} + \theta \psi_a^{(1)}, \quad (41)$$

$$\psi_{ms} = \psi_{ms}^{(0)} + \theta \psi_{ms}^{(1)}. \quad (42)$$

$\psi_a^{(0)}$ 和 $\psi_{ms}^{(0)}$ 是 (20) 和 (21) 的解, 即正文中討論到的磁声模和靜磁模的势函数。将 (41) 和 (42) 代入 (39) 和 (40), 我們得到

$$\left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_a^{(1)} = 2\pi(\chi_0 + \chi_{ms} + \kappa_{ms}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_{ms}^{(0)*}, \quad (43)$$

$$\left[\mu_{ms} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_{ms}^{(1)} = 2\pi \left[(\chi_0 + \chi_{ms} + \kappa_{ms}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \psi_a^{(0)*} +$$

$$+ \chi_{ms} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \kappa_{ms} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) - B_2 \chi_0 \frac{\partial}{\partial z} (e_{xx} - i e_{yy}). \quad (44)$$

$\psi_{ms}^{(1)}$ 和 $\psi_a^{(1)}$ 的对称性应各与 (43) 和 (44) 右边的函数相一致。我們將不可能、也不必在这里求出这两个方程的解; 我們还是从分析有关的函数的某些特征(对称性和周期性)下手。

容易看出, $\psi_{ms}^{(1)}$ 和 $\psi_{ms}^{(0)}$ 以及 $\psi_a^{(1)}$ 和 $\psi_a^{(0)}$ 各有相同的对称性。理由如下: 如果說, 满足边界条件的 ψ_{ms} 中的 $\psi_{ms}^{(1)}$ 含有和 $\psi_{ms}^{(0)}$ 的奇偶对称性不一致的部分—— $\psi_{ms(B)}^{(1)}$, 則这一部分必然是单独地满足边界条件的; 即 $\psi_{ms(B)}^{(1)}$ 和伴随的 b_n 在边界上連續。由此可見, 除非是在 f_d 存在着对称性不相同的簡并靜磁模, 上述情况不可能出現。然而, 当在 f_d 有二个簡并靜

* 我們在这一段中分析問題的方法和 Моносов^[18] 在他討論靜磁模之間的相互作用的文章中所用的类似。

磁模时, $\psi_{ms}^{(0)}$ 中也就相应的有 $\psi_{ms(A)}^{(0)}$ 和 $\psi_{ms(B)}^{(0)}$ 两部分, 于是我們得到, $\psi_{ms(A)}^{(0)}$ 和 $\psi_{ms(A)}^{(1)}$ 以及 $\psi_{ms(B)}^{(0)}$ 和 $\psi_{ms(B)}^{(1)}$ 各有相同的对称性. 同样可以証明, 关于 $\psi_a^{(0)}$ 和 $\psi_a^{(1)}$ 的类似論断.

从 $\psi_{ms}^{(0)}$ 和 $\psi_{ms}^{(1)}$ 以及 $\psi_a^{(0)}$ 和 $\psi_a^{(1)}$ 各有相同的对称性的判据, 我們就能够推导出 § 4 中已經得出的选择原則. 推导的細节和 § 4 用到的分析相类似, 我們就不在这里叙述了. 值得一提的是, 在这里不只是分析方法更严格一些, 而且也包括了含 B_1 和 B_2 的磁-弹性耦合作用在內; 所得到的选择定則却是相同的.

参 考 文 献

- [1] Kittel C., *Phys. Rev.* **110** (1958) 836.
- [2] Spencer E. G. and Le Craw R. C., *Phys. Rev. Letters* **1** (1958) 241.
- [3] Spencer E. G. and LeCraw R. C., *Suppl. J. Appl. Phys.* **30** (1959) 1498.
- [4] Suhl H., *J. Appl. Phys.* **28** (1957) 1225.
- [5] Suhl H., *J. Phys. Chem. Solids* **1** (1957) 209, 以及其所引之实验.
- [6] Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (1927).
- [7] Becker R. U., Döring W., *Ferromagnetismus* (1939).
- [8] Walker L. R., *Phys. Rev.* **105** (1957) 390.
- [9] Berk A. D., et al. J.R.E. Wescon Convention Records part **3**, (1958) 3.
- [10] Fletcher P. et al, *Phys. Rev.* **114** (1959) 739.
- [11] Fletcher P. C. and Solt I. H. *Suppl. J. Appl. Phys.* **30** (1959) 181S.
- [12] Anderson P. W., *J. Appl. Phys.* **28** (1957) 1049.
- [13] Моносов Я. А., *Радвотехника и электроника* **5** (1960) 59. 参看 Микаэлян А. Л. и Васильев А. А. 在 Попов 学会 (1960 年 5 月) 宣讀的論文(待发表).
- [14] Bloom S. and Chang K.K.N. (张可南), *R.C.A. Review* **18** (1957) 578.
- [15] 参量放大器(无线电, 电子学譯丛之一) 科学出版社(1960).

THEORY OF THE PARAMETRIC OSCILLATION OF MAGNETOACOUSTIC MODES

LI YIN-YUAN, LENG ZHONG-ANG PAN SHOU-FU

ABSTRACT

By combining the equation of motion of a magneto-elastically coupled system derived from a classical hamiltonian and the Maxwell equations with the propagation factor neglected, we obtained a differential equation which determines the magnetic oscillations accompanying elastic vibrations of a ferrite specimen of the usual size for magnetic resonance experiments. To each normal mode of elastic vibration of the specimen there exists an associated magnetic oscillation (namely, a magneto-acoustic mode). We pointed out that the magneto-acoustic resonance phenomenon discovered by Spencer and Le Craw is a special case of the parametric oscillation involving a magnetoacoustic and a magnetostatic mode. The arrangements for observing the oscillation involving a certain magnetostatic mode and magnetoacoustic modes and the theoretical estimate of the threshold pumping power were discussed.

We derived the equations coupling a magnetoacoustic and a magnetostatic mode under pumping. By analysing the (even or odd) symmetry of the field quantities involved, we arrived at the selection rules for possible combinations of modes taking part in the parametric oscillations in a small sphere of ferrite.

Finally, it was mentioned that attention should be paid to the parametric amplification of the magnetic field accompanying thermal phonons as a possible source of noise in a ferrite microwave amplifier through the modulation of the pumping power.