

# 多体問題中的关联效应\*

陈春先 陈式刚 霍裕平

## 摘 要

本文利用作者之一在参考文献[4]中提出的广义自洽場方法,用统一的观点研究了多体系統的各种关联現象,它們包括核物質現象、电子气体的集体振盪現象、超导电現象等等。文章首先提出处理关联現象的一般方法,并討論了它与微扰方法的关系;以后在二体关联近似下得到 Brueckner 的核物質理論,Bohm-Pines 的集体振盪理論,作为其特例,并与这些作者的结果进行了比較;最后用 Gell-Mann、Low 处理束縛态的方法討論了超导理論与非理想气体的零声問題,使处理这些現象的方法能更明显地表现出其物理意义。由这些討論可以看出广义自洽場方法是处理关联現象的有效方法。

## (一) 引 言

物質凝聚态的各种性質(包括原子核的低能現象),原則上都是都可以在量子力学与量子統計的基础上加以解釋的。然而由于处理方法上的困难,許多現象的微观理論迄今尚未建立,或只是刚刚开始建立。

在1955—1956年以前,多体問題的研究一直没有超出自洽場方法的范围。这些工作基本上都只考虑了一个粒子在其它粒子平均影响下的运动,完全忽略了粒子間的動力关联,因而虽然在解釋原子核与固体性質时,取得了很大成就,但是在忽略了显然很重要的关联效应后,它的理論根据就很不清楚了,此外它不能处理一些由集体效应引起的現象,能帶論解釋超导現象的失敗,就是突出的事例。

1947年 Боголюбов 用近似二次量子化方法,討論了超流現象<sup>[6]</sup>,以后又将它成功的应用到鉄磁理論中,但可以說,直到 Brueckner 的工作<sup>[1]</sup>以后,人們才对多体系統的集体效应展开了大量的多方面的研究,并取得了很大的成績。Brueckner 等在估計二体多次散射的基础上,討論了核物質的性質,并在一定程度上解釋了壳模型<sup>[1]</sup>; Gell-Mann 等在高密度极限下討論了电子气体的性質<sup>[2]</sup>;李政道、楊振宁等分析了硬球作用的玻色气体;1957年 Bardeen、Cooper、Schrieffer 与 Боголюбов 建立了超导的理論<sup>[3]</sup>。在这些工作中,对不同的問題采用了互不联系的(形式相距很远的)处理方法,我們的目的就是希望由统一的观点去理解这些工作,总结共同的物理本质,以便于提高一步。

我們认为, Mayer、Ussell 与 Боголюбов 等在統計物理中所发展的关联函数的方法,一直是处理各种关联效应的最好工具,因为它能明显地把不同程度的相关效应在方程中分开,从而可以有目的地选择所需要的近似。特别是还由于当我们用这种方法来处理量子場論中所謂格林函数(經典分布函数是它一定时序下的极限)时,就可以把关联函数方法中的各种近似和无穷个 Feynman 图形求和联系起来,可以很方便的用費曼图形来分析各

\* 1960年7月16日收到

种关联情况。在上述思想指导下,我们推广了自洽场方法,考虑几个粒子在其它粒子平均影响下的运动,略去高级的关联,就得到一个封闭方程组,上述核物质等理论,都只是二体关联近似下的几个特殊解。为了讨论超导与非理想气体的零声问题,我们进一步研究了多体系统的束缚态。

本文只讨论了在绝对零度下费米系统平衡态的性质,但把它推广到任意温度,非平衡态或相似的处理玻色体系,并无原则上的困难<sup>[1]</sup>。

## (二) 格林函数的关联展开

讨论封闭在体积  $\Omega$  中  $N$  个相互作用费米子所构成的体系,并假定相互作用满足一定的条件,以保证总粒子数、总动量、总自旋守恒(算符  $NSP$  与哈密顿  $H = H_0 + H_i$  交换)。在计算的一定阶段上,令  $N \rightarrow \infty$ 、 $\Omega \rightarrow \infty$ ,但  $\rho = \frac{N}{\Omega}$  保持一定值,则系统的能量本征值形成一连续谱,有时可能存在个别的孤立值,对应于系统的束缚态。由于整个系统的波函数  $\psi$  极为复杂,研究它所满足的波动方程几乎是不可能的,必须把它近似表示为简单波函数的组合, Hartree-Fock 方法是最简单的一种。实际上用格林函数方法将比直接分析波函数的构造简单得多。

按一般定义,多体格林函数在 Heisenberg 表象(以下简称  $H$  表象)中写作为

$$G_1(x_1 x'_1) = i \langle \psi_0 | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}^+(x'_1) \} | \psi_0 \rangle$$

$$G_2(x_1 x_2 x'_2 x'_1) = i \langle \psi_0 | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}^+(x'_2) \hat{\psi}^+(x'_1) \} | \psi_0 \rangle \dots$$

其中  $\hat{\psi}(x)$  为  $H$  表象中电子的场算符;  $x = (vt)$  为四维空间中点的座标;  $T$  代表时序乘积;  $\langle \psi_0 |$  为  $H$  表象中体系的状态矢量。利用  $\hat{\psi}(x)$  的运动方程,马上就得到决定  $G_1 G_2 \dots$  的方程组:

$$G_1(x_1 x'_1) = G_0(x_1 x'_1) + \int G_0(x_1 y) D(y y') G_2(y y' y'_1 x'_1) dy dy' \dots,$$

$$G_n(x_1 \dots x_n x'_n \dots x'_1) = i \sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} G_0(x_1 x'_s) G_{n-1}(x_2 \dots x_n x'_n \dots x'_1)$$

$$+ \int G_0(x_1 y) D(y y') G_{n+1}(y x_2 \dots x_n y' y'_n \dots x'_1) dy dy' \dots, \quad (1)$$

其中  $G_0(xx')$  为自由体系(没有相互作用)的单粒子格林函数;  $D(yy')$  是描写相互作用的传播因子。必须强调指出,  $|\psi_0\rangle$  在方程中并不受限制,它可以是散射态、束缚态或者各种态的组合。方程(1)是一无限积分方程组,要真正解决问题,就必须针对具体情况,近似地化为有限数目的闭合方程组。

按照一般的分析,单粒子的格林函数是:

$$G(xx') = \begin{cases} i \langle \psi_0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^+(x') | \psi_0 \rangle, & t > t', \\ -i \langle \psi_0 | \hat{\psi}^+(x') \hat{\psi}(x) | \psi_0 \rangle, & t < t', \end{cases}$$

当  $t > t'$  时,表示一个粒子在其它粒子影响下(反映在  $|\psi_0\rangle$  中)由  $x'$  到  $x$  的传播过程,并决定相应的过渡几率(或散射截面);当  $t < t'$ ,则表示空穴由  $x$  传播到  $x'$ 。同样  $G_n(x_1 \dots x'_n)$  按时序不同,分别表示  $n$  个粒子或空穴在其它粒子影响下的运动。在一般情况下, $n$  个粒子的运动可以包括:每个粒子的独立运动,几个粒子羣彼此独立的运动及  $n$  个粒子彼此关联的运动。考虑到独立粒子羣的运动应该由相应格林函数的乘积来描写,我们就可以

以引入一组关联函数  $F_1 \cdots F_n \cdots$ , 使

$$\begin{aligned} G_1(x_1 x'_1) &= F_1(x_1 x'_1), \\ G_2(x_1 x_2 x'_2 x'_1) &= -i F_1(x_1 x'_1) F_1(x_2 x'_2) + i F_1(x_1 x'_2) F_1(x_2 x'_1) \\ &\quad + F_2(x_1 x_2 x'_2 x'_1), \\ G_3(x_1 x_2 x_3 x'_3 x'_2 x'_1) &= F_3(x_1 x_2 x_3 x'_3 x'_2 x'_1) - i F_1(x_1 x'_2) F_2(x_2 x_3 x'_3 x'_2) \\ &\quad + i F_1(x_1 x'_2) F_2(x_2 x_3 x'_3 x'_1) - i F_1(x_1 x'_3) F_2(x_2 x_3 x'_3 x'_2) \\ &\quad - i F_1(x_2 x'_2) F_2(x_1 x_3 x'_3 x'_1) + i F_1(x_2 x'_3) F_2(x_1 x_3 x'_3 x'_1) \\ &\quad + i F_1(x_3 x'_2) F_2(x_1 x_2 x'_3 x'_1) + i F_1(x_2 x'_1) F_2(x_1 x_3 x'_3 x'_2) \\ &\quad - i F_1(x_3 x'_3) F_2(x_1 x_2 x'_3 x'_1) - i F_1(x_3 x'_1) F_2(x_1 x_2 x'_3 x'_2) \\ &\quad - \begin{vmatrix} F_1(x_1 x'_1) F_1(x_1 x'_2) F_1(x_1 x'_3) \\ F_1(x_2 x'_1) F_1(x_2 x'_2) F_1(x_2 x'_3) \\ F_1(x_3 x'_1) F_1(x_3 x'_2) F_1(x_3 x'_3) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

显然  $F_n$  应该是代表  $n$  个粒子相互关联的效应。这点也可以由 Feynman 图形的分析看出。我们知道, 在量子场论中,  $G_n(x_1 \cdots x'_n)$  是所有具有  $2n$  条外线(端点分别为  $x_1 \cdots x'_n$ )的 Feynman 图贡献之和, 这些图有的是连接的, 有的是由几个独立的分图构成。后者的贡献可以用更低阶格林函数的乘积表示出来, 在定义  $F_n$  时已将这部分从  $G_n$  中分出去, 因而  $F_n$  只代表  $n$  个粒子的关联运动, 它实际即微扰论中相連图形展开(Linked cluster expansion)所定义的求和结果。

把  $F_1 \cdots F_n \cdots$  的表达式代入方程(1)中, 则得到决定  $F$  的方程, 它仍然是非闭合的积分方程组。在通常 Hartree-Phok 近似下, 把其它粒子的作用用平均场代替后, 关联效应即被略去, 因而  $F_2 = F_3 = \cdots = 0$ 。由(1)得到

$$\begin{aligned} F_1(x_1 x'_1) &= F_0(x_1 x'_1) + i \int F_0(xy) D(yy') [F_1(yy') F_1(y' x'_1) \\ &\quad - F_1(y' y') F_1(y x'_1)] dy dy', \end{aligned} \quad (2)$$

相应的 Feynman 图解为:

$$\overline{x-x'} = \overline{x-x'} + \overline{x-y} \text{ (loop) } \overline{y-x'} + \overline{x-y} \text{ (loop) } \overline{y-x'}$$

图 1

显然这和一般的結果是一致的。把方程(2)綫性化后就得到 Власов 的自治場方程。(此处綫性化的含义在具体內容上有所区别, 但本质是一致的。因为不同的具体问题对应于不同的态  $|\psi_0\rangle$  求和, 而方程的形式对求平均态  $|\psi_0\rangle$  并无限制。例如在多电子系统的集体振盪問題中, 在受到扰动后的体系的情态  $|\psi_0\rangle$  应该是在費米真空上附加一些单粒子激发态  $|\psi_z\rangle$  及等离子振盪态  $|\psi_{pl}\rangle$ , 若只考虑集体振盪在对場算符平均后取一級近似, 只留下  $|\psi_F\rangle$  及  $|\psi_{pl}\rangle$ , 因而可令  $|\psi_0\rangle = |\psi_F\rangle + \delta|\psi_{pl}\rangle$ 。对  $\delta$  綫性化, 实际即求出体系密度起伏波函数  $\langle\psi_{pl}|T\{\psi(x)\psi^+(x')\}|\psi_F\rangle$  所滿足的方程。)

現在, 可以很自然地系統地推广自治場方法。定义: 1)  $F_s$  称为  $s$  級不可約关联函数, 一切和  $F_s$  有联系的效应称为  $s$  級关联效应; 2) 略去  $s+1$  級以上关联效应的近似称为

$s$  级广义自洽场近似。在  $s$  级近似中,  $F_m \equiv 0, m > s$ , 由此立刻获得由  $s$  个方程形成的闭合方程组。其中第一级近似即 Hartree-Φok 方程, 第二级近似就得到描写二体关联的方程组及其所对应的 Feynman 图:

$$F_1(x_1 x'_1) = F_0(x_1 x'_1) + \int F_0(x_1 y) D(y y') [F_2(y y' y' x'_1) + i F_1(y y') F_1(y' x'_1) - i F_1(y' y') F_1(y x'_1) dy dy'],$$

相应的图解为

图 2

$$F_2(x_1 x_2 x'_2 x'_1) = i \int F_0(x_1 y) D(y y') \{ F_1(y x'_2) F_2(x_2 y' y' x'_1) - F_1(y x'_1) F_2(x_2 y' y' x'_2) - F_1(y' y') F_2(y x_2 x'_2 x'_1) - F_1(y y') F_2(x_2 y' x'_2 x'_1) - F_1(y' x'_1) F_2(y x_2 y' x'_2) + F_1(y' x'_2) F_2(y x_2 y' x'_1) + F_1(x_2 y') F_2(y y' x'_2 x'_1) + F_1(y x'_2) F_1(x_2 y') F_1(y' x'_1) - F_1(y x'_1) F_1(x_2 y') F_1(y' x'_2) \} dy dy', \quad (3)$$

相应的图解为

图 3

近年来多体问题所取得的几种重要结果(如核物质理论, 超导, 高密度电子气体等), 都包括在(3)中, 具体分析将在后面进行。

可以说, 二体关联近似成功的原因目前还不十分清楚, 因为我们不能准确估计各级  $F_i$  的贡献, 或者求出相应于各级关联展开的展开参量。但定性的说, 可能主要与  $\frac{a^3}{\sigma}$  有关( $a$  为方程;  $\sigma$  为比容)。就目前讨论的具体情况来看, 核物质或具有硬球作用的玻色气体是满足  $\frac{a^3}{\sigma}$  很小的要求; 分析指出<sup>[2]</sup>, 高密度电子系统的大集团关联, 可化为在费米真空上粒子与空穴的作用; 至于超导, 目前所有有结果的理论全是对  $\frac{\langle \hbar \omega \rangle}{E_F}$  展开, 而它可以看

成是巴丁化位势之力程三次方与费米表面  $\langle \hbar\omega \rangle$  层中电子比容之比的度量, 因而这些现象都可能通过低级关联近似来描述它们。

近年来, 在形式微扰论中, 借助于 Feynman 图的分析, 建立了所谓无穷发散图形求和的方法<sup>[1,2]</sup>, 从而分析了几种重要的关联效应。显然, 从这种观点出发, 某一级  $\Gamma$  又自洽近似的解  $F_i$  就是微扰论中某一定类型 Feynman 图贡献之和, 同一  $F_i$ , 当精确程度愈高, 它所包括的 Feynman 图类型也愈多。例如一级近似下的解  $F_1$ , 相当于图 4 所示类型 Feynman 图的总贡献, 或者说, 方程(2)即所有图 4 所示类型图形求和结果所应满足的方程。这样, 不只可以通过对级数各项的分析, 间接地确定各级关联近似的情况, 而且特别在一定级关联近似下, 具体分析各类型图形的作用, 按具体问题加以取舍, 从而大大简化繁复的计算。

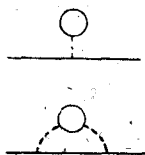


图 4

### (三) 低密度及高密度近似

在二体关联近似下, 对不同的情况取二粒子或粒子空穴关联的相应的主要部分, 可以得到 Brueckner 的核物质理论及 Gell-Mann-Brueckner 的电子气体理论。

Hugenholtz<sup>[8]</sup> 曾指出, 在低密度下, 主要贡献来自空穴线最少的图, 因为对空穴线的积分只限于费米面内, 而费米半径  $\rho_F \sim \rho^{1/3}$ 。考察方程(3)可以看出: 图 3 之(1)、(2)、(4)在任意作用下都含有空穴线; (5)、(6)在同时作用下也含有空穴线; (3)中闭合圈所代表的平均场正比于  $\rho$ 。因而在低密度时取最低级关联近似, 只留下图 3 中(7)、(8)、(9)三项, 由方程(3)得到方程组:

$$\begin{aligned} F_1(x_1 - x'_1) &= F_0(x_1 - x'_1) + \int F_0(x_1 - y) D(y - y') F_2(y y' y' x'_1) \\ &\quad \times d^4 y d^4 y' + i \int D(y - y') F_0(x_1 - y) \times \\ &\quad \times [F_1(y - y') F_1(y' - x'_1) - F_1(0) F_1(y - x'_1)] d^4 y d^4 y' \\ F_2(x_1 x_2 x'_2 x'_1) &= i \int F_0(x_1 - y) F_1(x_2 - y') D(y - y') \{F_2(y y' x'_2 x'_1) \\ &\quad + F_1(y - x'_1) F_1(y' - x'_2) - F_1(y - x'_2) F_1(y' - x'_1)\} d^4 y d^4 y', \end{aligned}$$

变换到动量表示中去, 可以写成:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= F_0(k) - i F_0(k) F_1(k) \int_a F_1(p) \\ &\quad \times \Gamma(k s, p \alpha, p \alpha, k s) d^4 p / (2\pi)^4, \end{aligned} \quad (5a)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma(k s, p s', p' s', k' s) &= F_0(k)^{-1} F_1(p)^{-1} \times \\ &\quad \times F_2(k s, p s'; p' s', k' s) F_1(p)^{-1} F_1(k')^{-1} \\ &= D(k - k') - D(k - p') \delta_{ss'} \\ &\quad + i \int D(q) F_1(k - q) F_1(p + q) \Gamma(k - q s, p + q s', p' s', k' s) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (5b)$$

用图解法表示如下:

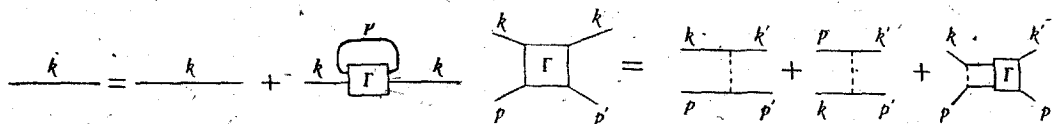


图 5

略去粒子的自能修正,  $F_1$  可以写为:

$$F_1(k) = (E(k) - k^0 - i\delta)^{-1}$$

其中  $E(k)$  为具有动量  $k$  的元激发的能量,

$$\delta = \begin{cases} +0 & \text{当 } E(k) > E_F \\ -0 & \text{当 } E(k) < E_F \end{cases}$$

$E_F$  为费米能。在这种近似下得到在一系列工作<sup>[1]</sup>中研究过的方程组。当  $\Gamma$  的中间态只取二粒子线时, 可用二粒子的散射幅度表示出来, 并且对应于 Brueckner 的作用矩阵元。

低温下的高密度电子气体, 按 Gell-Mann-Brueckner 分析的结果: 由于电子与空穴激发很少, 多体关联效应中主要部分为电子-空穴关联。在费米真空中求平均的二体格林函数在一定的时序排列下代表电子-空穴对的传播, 因而可以用二体关联近似来讨论高密度电子气体。Gell-Mann-Brueckner 指出: 可以将库伦作用下系统的 Feynman 图进行分类, 其中所谓最发散的“项链图”(图 6)之和引起  $r_s$  零次幂的主要部分, 交换作用只加入一些修正, 在计算电子集体振荡中可以忽略。由此出发分析方程(3), 可以看出: (3)、(4)两项是单粒子由于交换作用和平均场而引起的修正; (5)、(6)两项引出的图 7 (或更复杂的项), 求和后正比于  $r_s$  (或更高幂); (7)项的一部分贡献对应于图 8a, 另一部分贡献对应于图 8b, 这些贡献由于必须对一部分作用线所交换的动量积分, 因而也贡献  $r_s$  的高次项; 再去掉代表交换作用的(1)、(9)项, 则只保留图 3 之第(8)项。变到动量表象后, 有:

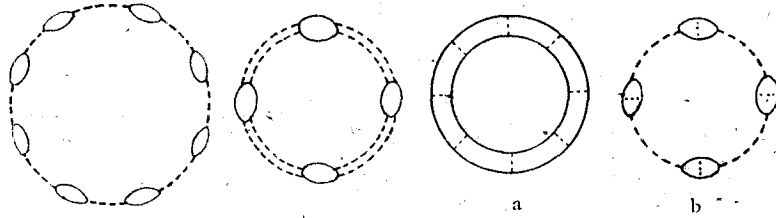


图 6

图 7

图 8

$$\begin{aligned} F_1(k) = & F_0(k) + iF_0(k)F_1(k) \int D(q)F_1(k-q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} - 2D(0) \int F_1(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\ & + F_0(k) \sum_a \int D(q)F_2(k-q, s, p+q, \alpha, k_s) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \\ F_2(k_1s_1, k_2s_2, k_2s_2, k_1s_1) = & -iF_0(k)D(k_1-k_1')F_1(k_1') \sum_a \int F_2(k_2s_2, p, \alpha, p+k_1-k_1', k_2s_2) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\ & + D(k_1-k_1')F_0(k_1)F_1(k_2)F_1(k_2')F_1(k_1'), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $s, \alpha$  为自旋坐标;  $F_0(k)$ 、 $D(q)$ 、 $F_1(q)$  分别为  $F_0(r-r')$ 、 $D(r-r')$ 、 $F_1(r-r')$  之傅氏分量。很容易看出, 保留方程(3)中的(2)、(8)两项, 实际只保留了在费米真空上的电子空穴对作用。令

$$\pi(q) = \int F_0(p')F_1(p'-q) \frac{d^4p'}{(2\pi)^4},$$

则有

$$F_1(k) = \frac{1}{F_0(k)^{-1} - M(k)},$$

其中

$$M(k) = i \int \frac{D(q)}{1 + 2iD(q)\pi(q)} F_1(k-q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

由此看出,单粒子的激发能量只有很小的修正,它是由屏蔽作用

$$\tilde{D}(q) = \frac{D(q)}{1 + 2iD(q)\pi(q)}$$

而引起的. 进一步解出:

$$F_2(p'p-p-q, p'-q) = F_0(p')F_1(p'-q)F_1(p-q)F_1(p) \frac{D(q)}{1 + 2iD(q)\pi(q)},$$

其极点由方程  $1 + 2i\pi(q)D(q) = 0$  给出,如果略去粒子的自能修正,并对  $p_0$  积分,马上得到电子等离子体振盪的色散方程:

$$1 = \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} \left\{ \sum_{|p| < p_F} - \sum_{\substack{|p| > p_F \\ |p+q| < p_F}} \right\} \frac{1}{q^0 - (E_{p+q} - E_p)},$$

其中  $p_F$  为费米动量,  $q^0 = \hbar\omega_{pl}$ . 这样我们就得到了等离子体理论中最主要的结果.

#### (四) 束 縛 态

多体系统的束縛态反映了相互作用所引起体系中本质的改变,许多奇异的物理现象都和它有关. 由于束縛态本身并不与自由体系中某一态对应,而形成束縛态的虚过程贡献一般都只能写成无穷级数,不可能用  $s$  矩阵作微扰处理,因此长期以来,只限于使用变分法来讨论. Боголюбов、Sawada 等发展的近似二次量子化方法的实质,就在于抽出相互作用中对形成束縛态起作用的主要部分,加以严格的处理,而后用微扰来估计其它项的影响. 但不论用变分法或近似二次量子化方法,都需要对束縛态的微观图象有明确的了解,才能正确地选择试探波函数或取出所需的模拟哈密顿量. 在电子气体问题中,由于 Bohm-Pines 的工作,这已经很清楚了,但在超导问题上却仍然很模糊,因而就不能判断目前理论的可靠程度.

— 由多体关联的角度来看, Hartree-Фок 方法只考虑一个电子的运动,在空间均匀的情况下,一般得不到束縛态(电子的等离子体振盪可以看成是密度的起伏). 但在二体关联近似下,两个粒子在其它粒子平均背景上可以束縛在一起,其中背景中的电子可以不处于束縛态中,也可以处于二体束縛中(如超导基态). 因而在“低密度”情况下,通过二体关联近似,就能得到某些束縛态的主要效应. 更高级近似当然会更准确;也可能得到新的束縛态,但目前不论就理论上的要求或者就实际计算的可能性来说,都没有意义.

如果我们把束縛态看成是由一对对粒子束縛而成,各对粒子之间只有某种平均作用,则只需要在其它粒子平均背景上解二体运动方程(即二体关联近似). 和场论中处理二体束縛态方法比较<sup>[1]</sup>,可以看出,区别只在于除开两个粒子的相对运动外,我们所要考虑的是它们与其它粒子的作用还是与物理真空中的起伏作用,这反映在方程中就是对格林函数求平均的态是多体系的本质征态还是物理真空(费米真空、超导基态...),因而基本上可以采用讨论氦原子的方式,利用空间均匀及束縛态能量孤立的事实,把束縛态部分由格

林函数中分出来加以仔细讨论<sup>[5]</sup>.

当费米体系中相互作用是排斥力时,电子与空穴是应该可能形成束缚态的,为此我们引入电子-空穴波函数.

$$\chi_n(x x') = \langle \psi_0 | T \{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \} | \psi_n \rangle,$$

其中  $|\psi_0\rangle$  为费米真空(有排斥相互作用下的基态);  $|\psi_n\rangle$  为费米真空上加一个电子与一个空穴所形成的具有能量为  $E_n$ 、总动量  $\mathbf{q}$  的束缚态,显然  $\chi_n$  可以反映  $|\psi_n\rangle$  的性质. 由于四维空间的均匀性,有

$$\chi_n(x_1 x'_1) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X} - i(E_n - E_0)T} f_n(x_1 - x'_1),$$

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, \quad T = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad x = (\mathbf{x}t),$$

$E_0$  为费米基态之能量. 同样

$$\tilde{\chi}_n(x_1 x'_1) = \langle \psi_0 | \tilde{T} \{ \hat{\psi}(x'_1) \psi^+(x_1) \} | \psi_n \rangle^*,$$

$\tilde{T}$  为反时序乘积标记. 当  $t_2 t'_2 > t_1 t'_1$  时,在  $G_2$  中插入一完备组,则有:

$$G_2(x_1 x_2 x'_1 x'_2) = i \sum_n \chi_n(x_2 x'_2) \tilde{\chi}_n(x_1 x'_1) + i \sum_s \chi_s(x_2 x'_2) \chi_s(x_1 x'_1),$$

其中  $|\psi_s\rangle$  为散射态,显然  $\sum_n \chi_n \tilde{\chi}_n$  是包含在  $F_2$  中的. 把上面结果代入方程(3)中,利用 Gell-Mann, low 的极限过程,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1} \int_{2t}^t f(t) dt,$$

就可以得到波函数  $\chi_n$  所应满足的方程:

$$\begin{aligned} \chi_n(x_1 x'_1 | q) = & i \int F_0(x - y) D(y - y') [F_1(y' - x'_1) \chi_n(y y' | q) \\ & - F_1(y - x'_1) \chi_n(y' y' | q) + F_1(y - y') \chi_n(y' x'_1 | q) \\ & - F_1(0) \chi_n(y x'_1 | q)] d^4 y d^4 y', \end{aligned} \quad (7)$$

这就是前面线性化后的方程,略去后面两项及粒子自能修正,就得到电子等离子体振荡的色散方程(当  $D(y - y')$  用库仑作用代入). 必须指出,如果在(7)中略去后两项,它也可以直接由 Hartree-Фок 方程(2)中使用 Gell-Mann, Low 过程把  $F_1$  看成波函数得到 ( $F_1(y y') F_1(y' y')$  仍用  $F_0$  代入). 如前所述,在 Hartree-Фок 方法中,不论是分出束缚态,还是线性化,所以能得到电子振荡的原因就在于它是电子密度的起伏,而这种密度起伏对某一电子的作用是可以经过平均场表示的.

当电子间存在吸引力时(例如由交换虚声子所引起),我们自然只讨论两个电子束缚的问题. 引入

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \langle \psi_0 | T \{ \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \} | \psi_n \rangle \\ &= e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X} - (E_n - E_0)T} \phi_n(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

在方程(3)中取时序  $(t_1 t_2) > (t'_1 t'_2)$ , 并使用 Gell-Mann, Low 过程,就得到两个电子束缚态波函数所满足的方程:

$$\begin{aligned} \Phi_q(x_1 s_1 x_2 s_2) = & i \int F_0(x_1 - y) D(y - y') [F_1(x_2 - y') \phi_q(y s_1 y' s'_2) \\ & + F_1(y - y') \phi_q(y' s_1 x_2 s_2) - 2F_1(0) \phi_q(y s_1 x_2 s_2)] dy dy', \end{aligned}$$

及确定  $F_1$  的方程(2). 在解方程的过程中发现,为了得到超导解,必须在(2)中令  $F_2 = \phi_q \tilde{\phi}_q$ ,



其中  $q$  为所求束缚态的动量能量矢。这一步的物理意义是很不清楚的,可能是反映了两个电子必须在超导基态(其它电子也在束缚态中)上才能形成束缚态的要求,这就使得  $F_1$  的结构与一般很不相同(实际如果用  $F_0$  代  $F_1$ , 则解不出超导)。此外还解出一支相应于两个束缚电子平动的玻色型元激发。

由上面讨论可以看出,目前各种多体问题的理论方法,都可以在二体关联近似的基础上统一起来。我们感到进一步分析二体关联的基础及发展其处理方法,对于讨论集体效应,及进一步讨论固体的性质,是会有很大意义的。

### 参 考 文 献

- [1] 有关核物质方面:  
Brueckner and Levinson: *Phys Rev* **97** (1955) 1844  
Brueckner: *Phys Rev* **100** (1955) 36  
Bethe: *Phys Rev* **103** (1956) 1353  
Brueckner: *Phys Rev* **105** (1957) 1679  
Brueckner and Gammel: *Phys Rev* **109** (1958) 1023
- [2] 关于电子气体:  
Gell-Mann and Brueckner: *Phys Rev* **106** (1957) 364  
Sawada: *Phys Rev* **106** (1957) 372  
Brueckner 等: *Phys Rev* **108** (1957) 507  
Hubbard: *Proc Roy Soc* **A243** (1958), 336  
Цэнь Чунь-сянь, Чжоу Шя-син (陈春先, 周世勋): *ЖЭТФ* **34** (1958), 1566
- [3] 超导理论:  
Bardeen Cooper and Schrieffer: *Phys Rev* **108** (1957), 1175  
Боголюбов 等: 超导理论中的新方法(科学出版社)  
Anderson: *Phys Rev* **112** (1958) 1900  
Горьков: *ЖЭТФ* **34** (1958) 735
- [4] 陈春先: *ДАН СССР* **125** (1958) 1238
- [5] Gell-Mann and Low: *Phys Rev* **84** (1951), 350
- [6] Боголюбов: 量子统计学(科学出版社)
- [7] Mayer and Mayer: 统计力学(高教出版社)
- [8] Hugenholtz: *Physica* **XXIII** (1957) 481
- [9] 陈春先, 陈式刚: 统计物理中的模拟方法(即将发表)

## ON THE CORRELATION EFFECT IN MANY-BODY SYSTEMS

CHEN CHUN-SHAN, CHEN SHIH-KANG, HUO YEI-PING

### ABSTRACT

Using the generalized method of self-consistent field developed by one of the authors<sup>[4]</sup>, we discuss various correlation phenomena of many-body systems with a unified viewpoint. The general method of treatment is proposed and compared with the method of perturbation. From the approximation with two-body correlation we obtain, as particular applications, the Brueckner theory of nuclear matter and the Bohm-Pines theory of the collective oscillation of electron gases. Finally the superconductivity and zero-point oscillations in non-ideal gases are discussed by solving the bound state problem with the present method and the Gell-mann Low procedure. It is concluded that the method is very effective in treating correlation phenomena.