第16卷 第2期 物理学报 Vol. 16, No. 2
1960年2月 ACTA PHYSICA SINICA Feb., 1960

μ^-介子在He^3原子核上的俘获*

朱家珍 周光召 彭宏安
(北京大学物理系)

提 要

本文計算了μ介子在He^3核上俘获的几率、末态H^3核的角分布和极化. 所采用的理論是带有重正化效应(包含弱磁矩及贋标項)的$V-A$普适弱作用理論. 在計算中考虑了μ和He^3核在始态有极化及处于不同超精細态上的情况. 在計算中假定了He^3核的基态是純S态，这时忽略了由張量力以及其他自旋軌道耦合力引起的其他态. 介子交換电流的效应也沒有考虑. 在以上这两个假定下,我們証明了俘获几率中只包含一个未知的原子核矩陣元,这个矩陣元恰好是原子核密度函数的富氏分量. 利用μ介子(或电子)与He^3(或H^3)原子核的散射可以确定这个未知矩陣元.

一、引 言

弱作用是否具有普适作用的形式，这是现代基本粒子物理中的一个重要的問題. 由Feynman–Gell–Mann及Sudarshan–Marshak等人提出的普适$V-A$弱作用理論，在解释原子核β衰变和μ衰变的实驗中获得了巨大的成功[1]. 虽然Λ及Σ超子的β和μ衰变的几率較普适理論計算的值小很多[2]，很可能奇异粒子的衰变不符合普适理論的要求,但在核子对pn, $\mu\nu$及$e\nu$对間仍然有极大可能存在普适的費米型弱相互作用. 直接由μ俘获的实驗中定出，pn与$\mu\nu$对間的耦合型式及耦合常数将有助于闡明这个問題. 研究μ俘获还能帮助了解由強作用产生的重正化效应[3,4].

通常,在做μ俘获的实驗及分析这些結果时,我們需要考虑到下面两个問題: i) 要能确定μ-介原子的初起状态,要能准确测量反应产物的各种分布; ii) 要避免采用复杂的原子核,以減少由于不清楚原子核結构而引起的誤差[5].

从第二个要求講,μ在质子上的俘获是最理想的，此时根本沒有原子核結构的影响. 但μ-介原子在始态可能組成μ-H_2分子,末态的中子又很难测定,反应几率也小，因此μ在质子上俘获的实驗是比較困难的,看来最多可以确定μ在超精細态$F=0$上的俘获几率.

最好的满足上述两个要求的是He^3核. 經过μ俘获后,它变成为自己的鏡核H^3. 此时原子核結构的影响不大，且实驗上测量H^3也比中子容易. 比較困难的是要建造一个He^3的靶子或者泡室.

μ在He^3原子核上俘获的实驗目前还沒有作，理論分析在[6]中由Fujii及Primakoff

* 1959年11月30日收到.

討論过.文献[6]的結果在我們看来是不能令人滿意的,其中保留了若干与核子速度v/c成正比的項,但忽略了一些其他同一数量級的項. 此外,在[6]中用了变分法确定的 He^3 的波函数来計算未知的矩陣元$\langle r^2\rangle$. 我們知道,由变分法确定的只含一个(或少数几个)参量的波函数在 r 大时是不可能准确的,由变分法确定的波函数最多只在 r 小时(即相互作用強时)与真正波函数接近. 我們选择[7]中由变分法定出的另一个 He^3 的波函数,同样計算了矩陣元 $\langle r^2\rangle$. 結果表明,虽然这个波函数也給出很好的 He^3 的結合能及庫伦能,但 $\langle r^2\rangle$ 与[6]中給出的相差几达一倍,由此产生的对总俘获几率的誤差也达到 15% 左右[1)].

在本文中,我們重新根据 $V-A$ 普适弱作用理論計算了 μ 在 He^3 原子核上的俘获. 在計算中忽略了 i)交换电流(即由介子云变形而引起的耦合常数的变化)的貢献; ii)核子在除 S 态以外的态上的貢献. 我們将在以后的工作中討論上述近似所引起的誤差. 粗略的估計表明,这种誤差只有5%左右. 値得提起的是,μ 俘获中的赝标項及反常磁矩項完全是由于介子云的存在才有的,介子云的变形即交换电流可能对它們产生較大的变化.

在采用了上述近似后,我們发現,μ 在 He^3 核上的俘获只包含一个公共的未知矩陣元因子. 在除去这个因子以后,μ 在 He^3 核上的俘获与 μ 在质子上的俘获有极相似的形式. 这个矩陣元还可以用电子或 μ 介子同 He^3 核的电磁散射来确定,因而可以避免理論計算所引起的誤差.

二、μ 介子为 He^3 核俘获的普遍公式

根据 $V-A$ 弱作用理論,μ 俘获的汉密頓量密度为

$$H(x) = J_\alpha(x)\bar{\psi}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\psi_\mu, \tag{1}$$

其中

$$J_\alpha(x) = \frac{g_0}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_n\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\psi_p \tag{2}$$

为核子弱作用电流,其他符号均与[4]同.

令原子核的始态为 $|i\rangle$, 末态为 $|f\rangle$, 并忽略 μ 介子在波尔軌道上的波函数 $\varphi(x)$ 在原子核上的变化,則 μ 介子在原子核上俘获的对弱作用为一級微扰的矩陣元可以表为

$$T_{fi} = \int\langle f|J_\alpha(x)|i\rangle\frac{1}{(2\pi)^3}\bar{u}_\nu(k)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu(p_\mu)\varphi(0)e^{-i(k+p_\mu)\cdot x}d^4x. \tag{3}$$

上式中 $J_\alpha(x)$ 对強作用来講是处于海森堡表象之中, $|i\rangle$ 及 $|f\rangle$ 为物理原子核的状态矢量. 強作用的影响全部包含在 $\langle f|J_\alpha(x)|i\rangle$ 之中.

鉴于 He^3 及 H^3 均为自旋 1/2 的粒子,它們的自由运动都滿足狄拉克方程,采用和[7]中同样的方法和步驟,可得

$$T_{fi} = -2\pi i\delta^4(p_f+k-p_i-p_\mu)\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle\bar{u}_\nu(k)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu(p_\mu)\varphi(0), \tag{4}$$

其中
$$\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle = \frac{g_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^3}\bar{u}(p_f)\Big\{\gamma_\alpha+\lambda_1\gamma_\alpha\gamma_5+ i\frac{\mu_1}{4M_1}[\gamma_\alpha(\hat{p}_f-\hat{p}_i)-(\hat{p}_f-\hat{p}_i)\gamma_\alpha]+\frac{f_1}{im_\mu}(p_f-p_i)_\alpha\gamma_5\Big\}u(p_i); \tag{5}$$

1) 計算情况見附录.

g_1, λ_1, μ_1 及 f_1 均为标量 $(p_f - p_i)^2$ 的函数; M_1 为 He^3 核的質量; $u(p_i)$ 及 $u(p_f)$ 分别为 He^3 及 H^3 的狄拉克波函数.

可以看到, (5)式的形式和[4]中 μ 在質子上俘获的矩陣元(5)的形式是相象的. (5)式是 μ 介子在自旋为 1/2 的粒子上俘获的最普遍的形式, 粒子内部构造的不同只是反映在参数 g_1, λ_1, μ_1 及 f_1 等的大小不同上面. 我們将在下一节中討論, μ^-介子为 He^3 核俘获时矩陣元中的参数 g_1, λ_1, μ_1 及 f_1 与 μ^-介子为質子俘获时的参量 (耦合常数) g, λ, μ 及 f 之間的关系.

如将俘获截面及角分布等用参量 g_1, λ_1, μ_1 及 f_1 等表示出来, 則它們和相应的 μ^-介子在質子上俘获的公式具有相同的形式. 这些公式在[4]的附录 2 中都已給出. 由于[4]中的公式有印錯及遺漏之处, 我們在这里将这些公式重新再写一遍.

設始态的密度矩陣具有下列形式:

$$\rho = \frac{1}{4}(1 + \boldsymbol{\sigma}_\mu\cdot\mathbf{P}_\mu + \boldsymbol{\sigma}_{He}\cdot\mathbf{P}_{He} + \zeta\boldsymbol{\sigma}_{He}\cdot\boldsymbol{\sigma}_\mu) \tag{6}$$

其中 $\mathbf{P}_\mu$ 及 $\mathbf{P}_{He}$ 分别代表始态上 μ 介子和 He^3 核的极化矢量, ζ 的大小則与 $(\mu$-$He^3)$ 系統处于不同超精細結构态上的比重有关. $\mathbf{P}_{He}$, $\mathbf{P}_\mu$ 及 μ 的大小应根据具体的实驗条件确定, 本文中将不討論这一問題. 計算出的截面、角分布及中子极化具有下列形式.

1. 俘获几率及角关联

$$d\omega = (2\pi)^{-2}(\pi a_0^3)^{-1}2^{-1}g_1^2 I(1 - \alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\boldsymbol{v} - \gamma\mathbf{P}_{He}\cdot\boldsymbol{v})k^2 d\Omega, \tag{6'}$$

其中

$$\begin{aligned} I = {} & 1 + 3\lambda_1^2 + \beta_1 + \beta_1\lambda_1(2\mu_1' - f_1') + \frac{\beta_1^2}{4}(2\mu_1'^2 + f_1'^2 + 1) - \\ & - 6\zeta\left[\lambda_1^2 + \left(1 + \frac{\beta_1}{2}\right)\lambda_1 + \frac{\beta_1}{2}(\mu_1'\lambda_1 - f_1'\lambda_1 + \mu_1') + \frac{\beta_1^2}{4}(\mu_1' - \mu_1'f_1')\right] - \\ & - \beta_1\zeta(\mu_1' + f_1')\left(\lambda_1 - 1 + \frac{\beta_1}{2}\mu_1'\right) + \frac{\beta_1^2}{2}\zeta(\mu_1' + f_1'), \end{aligned} \tag{7}$$

$$I\alpha = 1 - \lambda_1^2 + \beta_1 - \beta_1\lambda_1(2\mu_1' + f_1') + \frac{\beta_1^2}{4}(f_1'^2 - 2\mu_1'^2), \tag{8}$$

$$I\gamma = 2\left[\lambda_1^2 + \left(1 + \frac{\beta_1}{2}\right)\left(\frac{\beta_1}{2}f_1' - \lambda_1\right) + \beta_1\mu_1'\lambda_1 + \frac{\beta_1^2}{4}\mu_1'^2\right], \tag{9}$$

$$\beta_1 = \frac{k}{M_1} = \frac{k}{3M}; \quad \mu_1' = \mu_1 + 1; \quad f_1' = f_1 - \lambda_1,$$

$\boldsymbol{v}$ 为沿中微子运动方向的单位矢量.

2. 反冲核 H^3 的极化

$$I(1 - \alpha\mathbf{P}_\mu\cdot\boldsymbol{v} - \gamma\mathbf{P}_{He}\cdot\boldsymbol{v})\langle\boldsymbol{\sigma}_{H^3}\rangle = [a + b\mathbf{P}_\mu\cdot\boldsymbol{v} + c\mathbf{P}_{He}\cdot\boldsymbol{v}]\boldsymbol{v} + d\mathbf{P}_\mu + e\mathbf{P}_{He}, \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} a = {} & 2\left[\lambda_1(\lambda_1 + 1) + \frac{\beta_1}{2}\lambda_1 + \beta_1\mu_1'(\lambda_1 + \beta_1\mu_1'/4) - \frac{\beta_1}{2}f_1' - \frac{\beta_1^2}{4}f_1'\right] - \\ & - \zeta\left[\left(1 + \frac{\beta_1}{2}\right)^2 + 7\lambda_1^2 + 4\beta_1\mu_1'\lambda_1 - 3f_1'\beta_1\lambda_1 - \beta_1^2 f_1'\mu_1' + \frac{\beta_1^2}{4}f_1'^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_1^2}{2}\mu_1'^2 - 4\left(1 + \frac{\beta_1}{2}\right)\left(\lambda_1 + \frac{\beta_1}{2}\mu_1'\right)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

$$b = \beta_1(f_1' + \mu_1')\left(\lambda_1 + 1 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_1}{2}\mu_1'\right), \tag{12}$$

$$c = -2\beta_1(\mu_1' + f_1')\left(\lambda_1 + \frac{\beta_1}{4}\mu_1' - \frac{\beta_1}{4}f_1'\right), \tag{13}$$

$$d = 2\left(\lambda_1 + \frac{\beta_1}{2}\mu_1'\right)\left[\lambda_1 - 1 - \frac{\beta_1}{2}(1 + f_1')\right], \tag{14}$$

$$e = \left(1 + \frac{\beta_1}{2}\right)^2 + \left(\beta_1\lambda_1 f_1' - \frac{\beta_1^2}{4}f_1'^2 - \lambda_1^2\right), \tag{15}$$

当 μ-介原子处于超精細态 $F = 1$ 时，可以求得俘获几率 λ_+:

$$\lambda_+ = (1 - \lambda_1)\left[1 - \lambda_1 + \beta_1 - \mu_1' + \frac{1}{3}(\mu_1' + f_1')\right]. \tag{16}$$

μ-介原子在超精細态 $F = 0$ 上的俘获几率 λ_- 則为

$$\lambda_- = (1 + 3\lambda_1)^2 + \beta_1[1 + 3\lambda_1 + 3\mu_1' + 5\lambda_1\mu_1' - 4\lambda_1 f' + (\mu_1' + f_1')(\lambda_1 - 1)]. \tag{17}$$

如将所有的脚标 1 都取消，則(6)—(17)代表 μ 在質子上俘获的几率、角分布及反冲中子的极化.

从 μ 介子为 He^3 核俘获的实驗中可以測出 g_1, λ_1, μ_1 及 f_1 来. 一个很重要的問題是找到这些参数和 μ 俘获的耦合常数之間的关系，这将在下一节闡述.

三、原子核矩陣元

μ 介子在質子上俘获的矩陣元，在核子自旋空間中表示出来，当保留到核子速度 v/c 的一級近似时，得到

$$T_{fi} = \frac{-i}{\sqrt{2}(2\pi)^2} g\delta^4(p_n - p_p + k - p_\mu)\tau^{(-)}[A_1 + \mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_N + \\ + (\mathbf{P}_n + \mathbf{P}_p)\cdot(\mathbf{A}_2 + B_2\boldsymbol{\sigma}_N)]\varphi(0), \tag{18}$$

其中

$$A_1 = \bar{u}_\nu\gamma_4(1 + \gamma_5)u_\mu, \tag{19}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2M}\bar{u}_\nu\left[\mu'\mathbf{q}_A\boldsymbol{\gamma} + 2iM\lambda\boldsymbol{\gamma} - \frac{i}{m}f\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\gamma})\right]\cdot(1 + \gamma_5)u_\mu, \tag{20}$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{-i}{2M}\bar{u}_\nu\boldsymbol{\gamma}(1 + \gamma_5)u_\mu, \tag{21}$$

$$B_2 = \frac{1}{2M}\lambda\bar{u}_\nu\gamma_4(1 + \gamma_5)u_\mu. \tag{22}$$

如果把原子核看作由物理核子构成的体系，并忽略介子云的变形，可得

$$T_{fi} = \frac{-i}{\sqrt{2}(2\pi)^2} g\delta^4(p_f - p_i + k - p_\mu)\left[A_1 a_1 + \mathbf{B}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \\ + \frac{1}{3}(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_i)\cdot(\mathbf{A}_2 a_1 + B_2\mathbf{b}_1) + (\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{a}_2 + B_2 b_2)\right], \tag{23}$$ [1)]

1) 詳細計算見附录.

其中

$$a_1 = \sum_{j=1}^{3} \int \Phi_f^* \tau_j^{(-)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi_j} \Phi_i dV,$$
$$\mathbf{b}_1 = \sum_{j=1}^{3} \int \Phi_f^* \tau_j^{(-)} \boldsymbol{\sigma}_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi_j} \Phi_i dV; \tag{24}$$

$$\mathbf{a}_2 = -i \sum_{j=1}^{3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi_j} [\Phi_f^* \nabla_{\xi_j} \Phi_i - (\nabla_{\xi_j}\Phi_f^*)\Phi_i] dV,$$
$$b_2 = -i \sum_{j=1}^{3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi_j} \boldsymbol{\sigma}_j \cdot [\Phi_f^* \nabla_{\xi_j} \Phi_i - (\nabla_{\xi_j}\Phi_f^*)\Phi_i] dV. \tag{25}$$

其中 Φ 代表去掉了质心运动的波函数，ξ_j 为相对于质心的核子坐标.

当忽略张量力及其他自旋軌道耦合力的作用时，可以将 He^3 及 H^3 基态波函数中的自旋同位旋部分分离开来，例如

$$\phi_{i,f} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{P}_{i,f}\cdot\mathbf{R}} \Phi(r_{12}, r_{23}, r_{31}) \chi_{i,f} \tag{26}$$

其中，$\mathbf{R}$ 为质心坐标，Φ 为相对坐标的对称函数，χ 为自旋及同位旋組成的全反对称波函数. 利用(26)可得

$$\mathbf{b}_1 = -a_1 \boldsymbol{\sigma}_A, \tag{27}$$
$$a_1 = \int \Phi^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi_1} \Phi dV, \tag{28}$$
$$\mathbf{a}_2 = b_2 = 0. \tag{29}$$

将(27)—(29)代回(23)中，即得

$$T_{fi} = \frac{-i}{\sqrt{2}(2\pi)^2} g\delta^4(p_f - p_i + k - p_\mu)\tau_A^{(-)} a_1 \Big[A_1 - \mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_A + $$
$$+ \frac{1}{3}(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_i)\cdot(\mathbf{A}_2 - B_2\boldsymbol{\sigma}_A) \Big]. \tag{30}$$

将(5)式表成(18)式的形式并与(30)比較，我們得到

$$g_1 = a_1 g,$$
$$\lambda_1 = -\lambda, \qquad \frac{1}{3}\mu_1' = -\mu'^{1)}, \tag{31}$$
$$\frac{1}{3}f_1' = -f'.$$

这表明 μ 在 He^3 核上俘获的矩陣元参量和 μ 俘获的耦合常数有非常簡单的关系；除了有些項要改变符号以外，它們之間只差一个公共因子 a_1.

如 V 型弱作用电流守恆，則有

$$\mu = \mu_p - \mu_n,$$
$$\mu_1 = \mu_{He^3} - \mu_{H^3}. \tag{32}$$

1) 此处 He^3 的磁矩是以 $\frac{e\hbar}{2M_1C}$ 即 $\frac{e\hbar}{6MC}$ 为单位的.

由反常磁矩的实験,我們知道:

$$\frac{1}{3}\mu_{\mathrm{He}^3} \simeq \mu_n,$$
$$\frac{1}{3}\mu_{\mathrm{H}^3} \simeq \mu_p. \tag{33}$$

很容易由此了解为什么(31)式中 $\frac{1}{3}\mu_1 = -\mu$, 符号的改变完全是由原子核内部的自旋同位旋結构决定的(He^3 中質子的自旋及反常磁矩抵消,它的自旋及反常磁矩是近似的由中子决定的). 严格講来, $\frac{1}{3}\mu_1$ 与 $-\mu$ 并不相等,它們之間的差别由介子云的变形及张量力等引起的. 实験观察到的反常磁矩很好地滿足(31)式, 这表明我們采用的近似是合理的.値得提起的是在(30)式的第三項及第四項前有 $\frac{1}{3}(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_i) = \frac{\mathbf{k}}{3}$ 的因子, 在工作[6]中,这一因子为 k. 这是由于[6]中采用的近似引起的,单只这一近似即可有 3% 左右的修正.

在下一节中,我們将看到, 未知的矩陣元 a_1 可由 μ 或电子与 He^3 核(或 H^3 核)的电磁散射确定.

四、μ 介子与 He^3 核的散射

μ 介子核子系統的电磁作用汉密頓密度为

$$H(x) = \sum_{\alpha=1}^{4} [J_\alpha^N(x) + J_\alpha^\mu(x)] A_\alpha(x), \tag{34}$$

$$J_\alpha^N(x) = -ie\bar{\psi}_N\gamma_\alpha \frac{1+\tau_3}{2}\psi_N,$$
$$J_\alpha^\mu(x) = -ie\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\mu. \tag{35}$$

对电磁作用取第二級微扰,得到 μ 介子与原子核散射的矩陣元:

$$T_{fi} = -2\pi e\delta^4(p_f - p_i + p_\mu' - p_\mu)\langle f|J_\alpha^N(0)|i\rangle \bar{u}(p_\mu')\gamma_\alpha u(p_\mu)\frac{1}{q^2}, \tag{36}$$

其中
$$q = p_f - p_i.$$

同俘获的情况一样, 对 He^3 核矩陣元 $\langle f|J_\alpha^N(0)|i\rangle$ 的形式和質子的矩陣元 $\langle p'|J_\alpha^N(0)|p\rangle$ 形式上完全一样,只是具体的电荷及磁矩形式因子是不同的函数:

$$\langle f|J_\alpha^N(0)|i\rangle = \frac{-ie}{(2\pi)^3}\bar{u}(p_f)\left[F_{\mathrm{He}}\gamma_\alpha + \frac{i}{4M_1}G_{\mathrm{He}}(\gamma_\alpha\hat{q} - \hat{q}\gamma_\alpha)\right]u(p_i), \tag{37}$$

其中 F_{He} 及 G_{He} 为 He^3 核的电荷及磁矩形式因子. 它們是标量 q^2 的函数:

$$F_{\mathrm{He}}(0) = 2; \quad G_{\mathrm{He}}(0) = \mu_{\mathrm{He}}. \tag{38}$$

如不考虑交換电流及张量力等,利用第三节的方法,可以求得 He^3 核的电磁形式因子与核子的电磁形式因子間的确定关系,即

$$F_{\mathrm{He}}(q^2) = (2F_{1p}(q^2) + F_{1n}(q^2))a_1(q^2). \tag{39}$$

$$G_{\mathrm{He}}(q^2) = F_{2n}(q^2)a_1(q^2), \tag{40}$$

其中 F_{1p} 及 F_{1n} 为质子及中子的电荷分布形式因子，而 $F_{2n}(q^2)$ 为中子的磁矩分布因子.

从(37)式即知，μ 介子对 He^3 核散射的截面具有和 Rosen bluth 公式完全相同的形式[8]. 由散射的实驗中可以定出 $F_{He}(q^2)$ 及 $G_{He}(q^2)$，再由 (39) 或 (40) 中即可定出核結构的形式因子 a_1.

如果討論的是 μ 介子对 H^3 核的散射，則其电磁分布形式因子 F_{H^3} 及 G_{H^3} 在上述近似下可表为

$$F_{H^3}(q^2) = [F_{1p}(q^2) + 2F_{1n}(q^2)]\, a_1(q^2),$$
$$G_{H^3}(q^2) = F_{2p}(q^2) a_1(q^2).$$

从 μ 或电子对 H^3 核的散射中同样可以求得核結构形式因子 a_1.

附　录　一

Fujii 及 Primakoff[6] 在計算 $\langle r^2\rangle$ 及俘获几率 $\omega^{(\mu)}$ 时，采用了下面的 He^3 基态变分波函数来計算原子核矩陣元：

$$u(r_{21}, r_{31}) = (\beta^5/96\pi^3)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp\left[-\left(\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right]}{\sqrt[4]{\rho^2+\rho'^2}}, \tag{A-1}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{31}|, \qquad \rho' = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{31}|, \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

其中 β 是用上式計算得的 He^3 的庫伦能和实驗值比較而定出的. 由 (A-1) 算出：

$$\langle r^2\rangle^{\frac{1}{2}} \cong 1.78 \times 10^{-13}\ 厘米,$$

俘获几率
$$\omega^{(\mu)} \cong 1.46 \times 10^3\ 秒^{-1}. \tag{A-2}$$

为了說明这种作法可能导致較大的不准确，我們选择[7]

$$u(r_{12}, r_{23}) = \left(\frac{\alpha}{60\pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\rho''\right), \tag{A-3}$$

$$\rho'' = \frac{1}{6}\sum_{j+k=1}^{3} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^2,$$

$$\alpha = 2.28 \times 10^{13}\ 厘米^{-1}.$$

由(A—3)計算出：

$$\langle r^2\rangle^{\frac{1}{2}} \cong 2.52 \times 10^{-13}\ 厘米,$$

俘获几率
$$\omega^{(\mu)} \cong 1.29 \times 10^3\ 秒^{-1}. \tag{A-4}$$

比較(A-2) 及 (A-4) 看到，符合 He^3 結合能都很好的不同变分波函数导致 $\omega^{(\mu)}$ 相差 15% 左右.

附录二　μ 俘获中原子核矩陣元

由于原子核中核子平均距离較大，使得每一核子还不曾丧失其物理核子的性質，因而在忽略核子周围介子云变形时可以将物理原子核波函数写为：

$$|\Psi\rangle = \int |\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A\rangle\langle\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A|\Psi\rangle d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_A, \tag{B-1}$$

式中 $\langle\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A|\Psi\rangle$ 即通常的原子核波函数，由各物理核子間相互作用产生的，而

$|\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_A\rangle$ 为自由的物理核子經反对称化后組成的波函数.

核子电流作用到原子核上的矩陣元是:

$$\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle=\sum_{j=1}^{A}\int\langle f|\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}'_j\cdots\mathbf{r}_A\rangle\langle\mathbf{r}'_j|\mathbf{P}'_j\rangle\langle\mathbf{P}'_j|J_\alpha(0)|\mathbf{P}_j\rangle\times$$
$$\times\langle\mathbf{P}_j|\mathbf{r}_j\rangle\langle\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_j\cdots\mathbf{r}_A\rangle\langle\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_A|i\rangle\prod_{l=1}^{A-1}{}'\,d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{P}_j d\mathbf{P}'_j,\qquad(B\text{-}2)$$

其中 $\prod\limits_{l=1}^{A-1}{}'$ 表示連乘符号，而将其中 $l=j$ 的項去掉. 以下用 Ψ_f^*, Ψ_i 来代表 $\langle f|\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}'_j\cdots\mathbf{r}_A\rangle$ 和 $\langle\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_j\cdots\mathbf{r}_A|i\rangle$. 因

$$\bar{u}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu\langle\mathbf{P}'_j|J^i_\alpha(0)|\mathbf{P}_j\rangle=\tau_j^{(-)}[A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j+(\mathbf{P}'_j+\mathbf{P}_j)\cdot(\mathbf{A}_2+B_2\boldsymbol{\sigma}_j)],$$

故

$$\bar{u}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle=\sum_{j=1}^{A}\int\Psi_f^*\frac{e^{i\mathbf{P}'_j\cdot\mathbf{r}'_j}}{(2\pi)^{3/2}}\tau_j^{(-)}[A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j+(\mathbf{P}'_j+\mathbf{P}_j)\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{A}_2+B_2\boldsymbol{\sigma}_j)]\frac{e^{-i(\mathbf{P}_j\cdot\mathbf{r}_j)}}{(2\pi)^{3/2}}\Psi_i\prod_{l=1}^{A-1}{}'\,d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{P}_j d\mathbf{P}'_j.\qquad(B\text{-}3)$$

作 $\mathbf{q}_j=\mathbf{P}'_j-\mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_j=\frac{1}{2}(\mathbf{P}_j+\mathbf{P}'_j)$ 的变换后, $(B-3)$ 为

$$\bar{u}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)u_\mu\langle f|J_\alpha(0)|i\rangle=\sum_j\int\Psi_f^*e^{\frac{1}{2}\mathbf{q}'_j\cdot(\mathbf{r}_j+\mathbf{r}'_j)}\tau_j^{(-)}\{[A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j-$$
$$-i(\mathbf{A}_2+B_2\boldsymbol{\sigma}_j)(\nabla'_j-\nabla_j)]\delta(\mathbf{r}'_j-\mathbf{r}_j)\}\Psi_i\prod_{l=1}^{A-1}{}'\,d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{q}_j.\qquad(B\text{-}4)$$

对于 He^3 和 H^3 的波函数，在 (26) 中給出. 代入 $(B\text{-}4)$，将含微分的項和不含微分的項分开計算:

i) 不含微分的項:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{3}\int\Phi^2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)(e^{-i(\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i-\mathbf{q}_j)\cdot\mathbf{R}}e^{i\mathbf{q}_j\cdot\boldsymbol{\xi}_j})\langle\chi_f,\tau_j^{(-)}(A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)\chi_i\rangle\prod_{l=1}^{A}d\mathbf{r}_l d\mathbf{q}_j=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{3}\int\Phi^2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)e^{-i(\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i-\mathbf{q}_j)\cdot\mathbf{R}+i\mathbf{q}_j\cdot\boldsymbol{\xi}_j}\langle\chi_f,\tau_j^{(-)}(A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)\chi_i\rangle d\mathbf{R}dV_\xi d\mathbf{q}_j=$$
$$=\langle\chi_f,\sum_{j=1}^{3}\int\Phi^2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)e^{+i\mathbf{q}_j\cdot\boldsymbol{\xi}_j}dV_\xi\tau_j^{(-)}(A_1+\mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)\chi_i\rangle=$$
$$=\langle\chi_f,(A_1a_1+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{b}_1)\chi_i\rangle,\qquad(B\text{-}5)$$

其中 a_1, $\mathbf{b}_1$ 即由(24)所表示的.

ii) 含微分的項:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_j\int\Phi^2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)e^{-i(\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i)\cdot\mathbf{R}}e^{\frac{1}{2}\mathbf{q}_j\cdot(\mathbf{r}'_j+\mathbf{r}_j)}(-i)[(\nabla'_j-\nabla_j)\delta(\mathbf{r}'_j-\mathbf{r}_j)]\times$$
$$\times\langle\chi_f,\tau_j^{(-)}(\mathbf{A}_2+B_2\boldsymbol{\sigma}_j)\chi_i\rangle\prod_{l=1}^{A-1}{}'\,d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{q}_j.\qquad(B\text{-}6)$$

作部分积分，并注意到 $\nabla_{r_j} = \frac{1}{3}\nabla^{\mathbf{R}} + \frac{2}{3}\nabla_{\xi_j}$，上式容易得到：

$$\langle \chi_f, \frac{1}{3}(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_i)\cdot(\mathbf{A}_2 a_1 + B_2 \mathbf{b}_1)\chi_i \rangle.$$

而(24)中后二式在 He^3 的 μ 俘获中等于零，因此时 $\Phi_f^* = \Phi_i = \Phi$.

参　考　文　献

[1] Feynman, R. P., Gell-Mann, M., *Phys. Rev.* **109** (1958), 193. Sudarshan, E. C. G. and Uarshak, R. E., *Phys. Rev.* **109** (1958), 1860.

[2] Crawford et al., *Phys. Rev. letters* **1** (1958), 377; Nordin et al., *Phys. Rev. letters* **1** (1958), 380.

[3] Goldberger, H. L. and Treiman, S. B., *Phys. Rev.* **111** (1958), 354; Wolfenstein, L., *Nuovo Cimento* **8** (1958), 882; Иоффе, Б. Л., *ЖЭТФ* **37** (1959), 159.

[4] 周光召, B. 馬耶夫斯基, 物理学报, **15** (1959), 377.

[5] 关于 μ 介子在复杂核上俘获的工作可参考 Долинский, Э. И. и Блохинцев, Л. Д., *ЖЭТФ* **34** (1958), 759; **35** (1958), 1488; Überall, H. and Wolfenstein, L., *Nuovo Cimento* **10** (1958), 136; Tolhoek, H. A. and Luyten, L. R., *Nuclear Phys.* **3** (1957), 679; Primakoff, H., *Rev. Mod. Phys.* **31** (1959), 802.

[6] Fujii, A. and Primakoff, H., *Nuovo Cimento* **10** (1958), 327.

[7] 周光召, 物理学报, **11** (1955), 299.

[8] Rosenbluth, M. N., *Phys. Rev.* **79** (1950), 615.

MUON CAPTURE IN He^3 NUCLEUS

Chu Chia-chen　Chou Kuang-chao　Peng Hong-an

(University of Peking)

Abstract

The rate of the muon capture reaction $\mu^- + He^3 \longrightarrow H^3 + \nu$, the angular distribution and the polarization of the final nucleus H^3 are calculated basing on the universal $V-A$ coupling with induced pseudoscular term and the weak magnetic current included. A general initial condition with polarized muon and polarized He^3 nucleus in different hyperfine states is assumed.

The ground state wave function is assumed to be a pure S-state. Thus we neglected the contribution of other states, which may be caused by the presence of tensor force or other velocity dependent forces. Meson exchange current is also neglected. Under these assumptions we have proved that the capture amplitude contains only one unknown nuclear matrix element, which is the Fourier transform of the nuclear density function. To determine this nuclear matrix element by the scattering of electron (or muon) with He^3 (H^3) nucleus is finally proposed.