

# 非綫性多端网络理論\*

虞厥邦

## 摘 要

作为对非綫性网络研究上的一个尝试,在文中引入了多端网络理論,研究限于具有恒定通量的非綫性网络.得到了关于非綫性 $N$ 端, $2n$ 端, $p+1$ 端, $2(p+1)$ 端网络的两个基本性質.

在綫性网络分析中,多端网络理論已有较充分的发展,并已成为网络研究的一个有力的工具<sup>[1,2]</sup>.完全有理由将多端网络理論用于非綫性网络的研究.一方面,从多端网络理論着眼,我們自然就可以找到求解网络分析問題的新方法,关于这一点,我們将在另文中加以論述<sup>[3]</sup>.另一方面,电工实用中許多重要的基本元件,實質上就是多端元件,例如多极电子管、多极晶体管、变压器……等.这些元件在微小訊号运用时的許多状态,許可我們將它們的特性直綫化,因而可以將它們抽象为多端綫性元件而进行分析研究.在需要将含有这类元件的电路的分析方法一般化时,基于上述观点而应用多端网络理論,已經获得一定的成果<sup>[2]</sup>.而当电路中这些元件在強烈訊号运用时,必須將它們考虑为多端非綫性元件,运用多端非綫性网络的观点去进行研究,估計会对非綫性网络分析方法的一般化工作有所裨益.自然,这篇論文中进行的工作只是一些很初步的,它的目的在于引起对这样一个研究方向的注意.

本文不討論具有交变通量的非綫性网络(如果这样的网络中含有非綫性电感及电容,則實質上要涉及非綫性微分方程組的研究),以下叙述中所提及的非綫性网络,如不特別申明,都是指其中通量不随时間变化的;除此之外,我們还假定网络中的非綫性元件的位差——通量特性都是單調的.

我們以 $N$ 端网络作为我們的研究对象(图1),因为設若它的属性弄清楚了,則其它的 $2n$ 端、 $p+1$ 端、 $2(p+1)$ 端网络的属性自然会得到解决<sup>[4]</sup>.

我們首先关心的問題是:用包含多少个独立函数的函数組,才能描述一个非綫性 $N$ 端网络外部的位差、通量关系?这函数組包含几个独立自变量?解决了上述的問題后,就能对表明位差、通量間关系的非綫性多端网络的参数的性質、非綫性多端网络的代換网络的性質等重大問題,作进一步的研究.

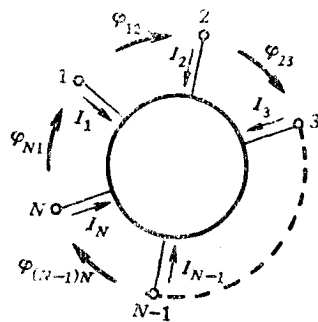


图 1

\* 1960年2月21日收到,

設采用下列符号:

$$I_1, I_2, I_3 \cdots I_{N-1}, I_N$$

表示流入网络外部端子的通量,而采用

$$\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34} \cdots \varphi_{(N-1)N}, \varphi_{N1}$$

表示网络外部相邻端子间的位差. 将电(磁)动势  $E_{21}, E_{32}, E_{43} \cdots E_{N(N-1)}, E_{1N}$  接到相应的端子间(图2), 假使:

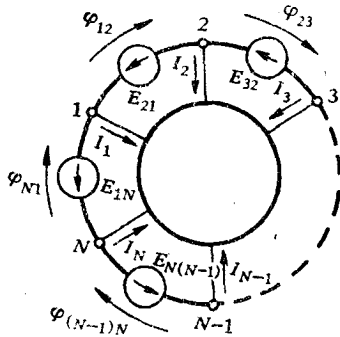


图 2

(1)

$$\begin{aligned} E_{21} &= \varphi_{22} \\ E_{32} &= \varphi_{23} \\ &\cdots \cdots \cdots \\ E_{N(N-1)} &= \varphi_{(N-1)N} \\ E_{1N} &= \varphi_{N1} \end{aligned}$$

则显然地, 由于网络的位分布没有改变, 通量分布也必然维持不变, 因此, 所得的图2的网络与图1中原网络等效. 所得的网络是一个闭合的网络, 设它具有  $q$  个节点, 则可根据克希荷夫第一定律, 列出  $q-1$  个独立方程; 根据克希荷夫第二定律,

又可以对  $p$  个独立回路列出  $p$  个独立方程. 由熟知的网络几何关系可知: 网络支路数  $w$ 、节点数  $q$  和独立回路数  $p$  之间有如下的关系  $w = p + q - 1$ , 因而求解网络中  $w$  个支路的通量(包括流入网络外部端子的通量在内)时就得到了足够数目的独立方程. 尽管所得的是一个非线性代数方程组, 在求解时可能会碰到数学上的困难, 但是, 无疑地, 问题是可解的; 此外, 由于我们曾设网络中非线性元件的位差-通量曲线是单调的, 因而获得了唯一的、稳定的、恒定的通量分布解. 由此, 总可以将我们关心的、流入网络外部端子的通量表为网络中各电(磁)动势的函数, 换言之, 得到一组函数

$$(2) \quad I_k = I_k(E_1, E_2 \cdots E_n, E_{21}, E_{32} \cdots E_{1N}) \quad (k = 1, 2, 3 \cdots N)$$

其中,  $E_1, E_2 \cdots E_n$  是包含在  $N$  端网络内部的电(磁)动势, 而  $E_{21}, E_{32}, \cdots E_{1N}$  就是在  $N$  端网络外部画出的电(磁)动势. 由于  $N$  端网络内部的结构是预给的, 其所包含的电(磁)动势  $E_1, E_2, \cdots E_n$  都是给定的, 是些常数; 实际上变动的只是外部的  $N$  个电(磁)动势  $E_{21}, E_{32} \cdots E_{1N}$  (或其相应的位差  $\varphi_{12}, \varphi_{23} \cdots \varphi_{N1}$ ), 考虑到以上所述, 将(1)代入(2), 就得到了由  $N$  个位差来表示的  $N$  个通量:

$$(3) \quad I_k = I_k(\varphi_{12}, \varphi_{23}, \cdots \varphi_{(N-1)N}, \varphi_{N1}) \quad (k = 1, 2, 3 \cdots N)$$

注意到, 此时作为变量的诸位差存在一个克希荷夫第二定律的约束:

$$(4) \quad \varphi_{12} + \varphi_{23} + \cdots + \varphi_{(N-1)N} + \varphi_{N1} = 0$$

又注意到此时被表为位差的函数的各通量存在一个克希荷夫第一定律的约束:

$$(5) \quad I_1 + I_2 + \cdots + I_{N-1} + I_N = 0$$

因此, 我们可以断言: 在得到的函数组(3)中, 独立自变量有  $N-1$  个, 而独立函数的数目也是  $N-1$  个. 当然, 由函数(3)可以将  $N-1$  个独立位差表为  $N-1$  个独立通量的函数, 也可以将任选的  $N-1$  个位差及通量 ( $m$  个位差、 $n$  个通量)表为另外  $N-1$  个独立位差及通量 ( $N-1-m$  个位差、 $N-1-n$  个通量)的独立函数.

總結我們得到的關於非綫性 $N$ 端網絡的第一個結果如下:

**性質 I** 非綫性 $N$ 端網絡由包含 $N-1$ 個獨立自變量(可以是位差,也可以是通量,也可以是通量及位差)的 $N-1$ 個獨立函數(可以是通量,也可以是位差,也可以是通量及位差)所組成的函數組來決定。

由熟知的 $N$ 端網絡與 $2n$ 端、 $p+1$ 端以及 $2(p+1)$ 端網絡之間的关系立刻可得<sup>[4]</sup>:

系 I 非綫性 $2n$ 端網絡由包含 $n$ 個獨立變量的 $n$ 個獨立函數組成的函數組來決定。

系 II 非綫性 $p+1$ 端網絡由包含 $p$ 個獨立變量的 $p$ 個獨立函數所組成的函數組來決定。

系 III 非綫性 $2(p+1)$ 端網絡由包含 $2p$ 個獨立變量的 $2p$ 個獨立函數所組成的函數組來決定。

明了了非綫性多端網絡的這樣一個性質以後,我們就很容易弄清楚,非綫性 $N[2n, p+1, 2(p+1)]$ 端網絡的外部靜態參數(任二端子通量之比,任二對端子間位差之比,或任一端子通量與任二端子間位差之比……),或是動態參數(上述各量增量之比的極限),一般地將是 $N-1(n, p, 2p)$ 個獨立變量(或是位差,或是通量,或是位差及通量)的函數。

現在,讓我們轉入對非綫性多端網絡的代換網絡的研究。利用通常的具有一個自變量的位差-通量特性的非綫性元件來組成一個結構簡單的代換網絡,代替內部結構較複雜的非綫性多端網絡,使網絡簡化(在綫性網絡中,迭次施行這樣的代換,總可以將網絡簡化,甚至於簡化到混聯網絡的地步),從而簡化計算,這無疑是一個非常吸引人的課題。可惜,由下面的關於非綫性 $N$ 端網絡的第二個基本性質,我們知道了上述課題不具有正面的解答。

**性質 II** 非綫性 $N$ 端網絡的代換網絡(當 $N > 2$ 時)不可能由具有一個自變量的位差——通量特性的非綫性元件來實現:代換網絡中非綫性元件的位差——通量特性是一個多自變量的函數。

我們從兩個方面來證明這個性質。

首先,設我們要以全 $N$ 角形網絡來置換一個任給的非綫性 $N$ 端網絡,且假定代換網絡中的非綫性元件具有一個自變量的位差-通量特性。

對網絡外部任一端子 $k$ 列出克希荷夫第一定律的方程,我們有

$$(6) \quad I_k = I_{k1}(\varphi_{k1}) + I_{k2}(\varphi_{k2}) + \cdots + I_{k(k-1)}(\varphi_{k(k-1)}) \\ + I_{k(k+1)}(\varphi_{k(k+1)}) + \cdots + I_{kN}(\varphi_{kN})$$

式左是由代換網絡外部流入 $k$ 端子的通量,式右是代換網絡內部連到 $k$ 端子的諸支路的通量。由於假定了各支路中的非綫性元件的位差-通量特性是一個自變量的函數,所以各支路的通量僅僅是相應支路端壓的(一個自變量的)函數。

對式(6)取二階偏導數,則有

$$(7) \quad \frac{\partial^2 I_k}{\partial \varphi_{ku} \partial \varphi_{ks}} = 0 \quad (u, s = 1, 2, 3, \cdots, N, u \neq s)$$

这就意味着: 动态参数  $\frac{\partial I_k}{\partial \varphi_{ks}}$  是不随另外二端子间的位差  $\varphi_{ku}$  的变动而变动的; 换言之,

任意的端子间的位差的改变不会影响到网络的工作点 (工作点不同, 对非线性网络说来, 应有动态参数也随之不同), 显然, 这是不符合非线性网络的实际工作情况的; 只是在线性网络里, 才会出现刚才提到的情况 [对线性网络说来, 式(7)不仅在  $u \neq s$  时成立, 而且在  $u = s$  时也成立]. 因此, 我们就用归谬法证明了, 利用其位差-通量特性为单一自变量的函数的非线性元件, 不能组成一个非线性  $N$  端网络的代换网络.

为得到真实地反映非线性  $N$  端网络的外部情况, 应该有以下式成立:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 I_k}{\partial \varphi_{ku} \partial \varphi_{ks}} \neq 0 \quad (k, u, s = 1, 2, 3 \cdots N)$$

即应该有网络外部任意的端子间位差的变动都会影响到  $N$  端网络的动态参数. 为了满足式(8), 容易看出来, 全  $N$  角形代换网络内部元件 (例如是连在节点  $k, j$  间支路中的元件) 的特性应该是:

$$(9) \quad I_{kj} = I_{kj}(\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \cdots, \varphi_{k(k-1)}, \varphi_{k(k+1)}, \cdots, \varphi_{kN}),$$

不难看出: 这是一个以网络外部各端子对某一基准端子  $k$  的位差作为独立自变量的多自变的函数. 网络外部各端子对基准端子  $k$  的位差共有  $N - 1$  个, 并且是彼此独立的. 因此, 这就导致了下列结论: 如果要想实现一个非线性  $N$  端网络的全  $N$  角形代换网络, 则此代换网络中各元件的位差-通量特性, 必须是一个  $N - 1$  个独立自变量的函数; 当然, 只是在  $N = 2$  时, 即在二端网络的情况下, 其代换网络中的非线性元件的位差-通量特性 (由于  $N - 1 = 2 - 1 = 1$ ), 才是一个自变量的函数. 在上面的论证中, 是以  $N - 1$  个网络外部端子对基准端子的位差作为独立变量的, 当然, 它们也可以换成相邻端子间的位差  $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \cdots, \varphi_{(N-1)N}$ , 或者是任意的  $N - 1$  个位差及通量 ( $m$  个位差,  $r$  个通量, 且  $m + r = N - 1$ )<sup>[5]</sup>.

其次, 设我们获得代换网络的方法是对原  $N$  端网络内部的结构施行逐步改变, 例如是采用 Ионкин 变换, 将网络内部的支路适当短接的方法<sup>[6,7]</sup>.

如果将网络中某支路短接, 则需要将由这支路的通量所决定的端压转化为所谓附加的电(磁)动势, 并将它转移到与被短接支路一端节点相连的其余支路上去. 容易看出来, 由于串入了附加电(磁)动势, 这些支路的端压-通量特性将不再是一个自变量的函数; 这时, 这些支路的端压不仅依赖于网络未经变换前各该支路中的通量, 而且也有关于被短接支路的通量, 因为现在串入支路中的附加电(磁)动势是决定于被短接支路的通量的. 另一方面, 被短接支路的通量又是和网络外部的  $N - 1$  个独立的端子间位差 (或通量、或通量及位差) 有关的, 因此, 上述串入了附加电(磁)动势的支路的位差-通量特性又将变得是  $N - 1$  个独立自变量 (即网络外部的端子间位差、通量等) 的多变量函数. 因此, 企图用 Ионкин 变换简化非线性  $N$  端网络内部, 以得到代换网络的作法也会引起这样的结果, 即代换网络中的非线性元件的位差-通量特性将会变得是一个多自变量函数.

这样, 我们就从两个角度上证明了性质 II.

很容易相信: 性质 II 对非线性  $2n$  端、 $p + 1$  端、 $2(p + 1)$  端网络说来也是正确的.

## 参 考 文 献

- [1] Зелях, Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем, часть II (1951).
- [2] Сягорский, В. П. Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами, гл XVI §71 (1958).
- [3] 虞厥邦: 非綫性多端网络理論的一个应用(見本期学报).
- [4] 同[1] §5.1, §5.2, §6.1, §7.7.
- [5] 同[1] §4.2.
- [6] Ионич, П. А. "Электричество" 12 1956, 21.
- [7] 虞厥邦: 物理学报 15 (1959) 588.

## THE NONLINEAR POLYTERMINAL NETWORK THEORY

YU CHUEI-PANG

## ABSTRACT

As an attempt in the research of nonlinear networks, the application of the polyterminal network theory is suggested in the present paper.

The fundamental character of the nonlinear polyterminal networks with constant flux is considered. Two theorems about  $N$ -terminal nonlinear network are established as follows:

*Theorem I:* The nonlinear  $N$ -terminal network is determined by a function system of  $N-1$  independent functions, each of which contains  $N-1$  independent variables.

*Theorem II:* The equivalent network of the nonlinear  $N$ -terminal ( $N \geq 2$ ) networks can not be realized by the nonlinear elements, whose potentialdifference-flux characteristic is a function of a single variable; the potentialdifference-flux characteristic of the nonlinear elements in the equivalent network of the nonlinear  $N$ -terminal network is a function of many variables.