

交换子的积分表示*

張宗燧

(中国科学院)

提 要

在中間态最低质量不为零的情形下, 求出了双交换子的积分表示的一个可能形式. 在最低质量取为零时, 它化为 Dyson 的結果.

又討論了如何简单地自积分表示求出色散关系.

一、引 言

在 1958 年, Dyson^[1]研究了

$$D(y, z) = \langle [C(x_3), [B(x_2), A(x_1)]] \rangle_0 \quad (1)$$
$$y = x_1 - x_2, \quad z = x_2 - x_3$$

的一般形式, 所用的条件为

$$D(y, z) = 0 \quad \text{当 } y^2 = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 < 0, \\ \text{或当 } z^2 < 0 \text{ 及 } (y+z)^2 < 0 \text{ 同时成立,} \quad (2)$$

及它的傅立叶变换

$$D(p, q) = \int D(y, z) e^{ipy+iqz} d^4y d^4z \quad (3)$$

满足

$$D(p, q) = 0 \quad \text{当 } q^2 < 0 \\ \text{或当 } p^2 < 0 \text{ 及 } (p-q)^2 < 0 \text{ 同时成立.} \quad (4)$$

为应用到具体問題起見, 最好将(4)换为

$$D(p, q) = 0 \quad \text{当 } q^2 < A^2 \\ \text{或当 } p^2 < B^2, \quad (p-q)^2 < C^2 \text{ 同时成立} \quad (5)$$

(式中 A, B, C 为某些常数). 在这样的条件下, Dyson 的原来方法的应用是較复杂的. 本文采用一个較简单的但不严格的方法提供一个可能的解答. 当 $A = B = C = 0$ 时, 它化为 Dyson 的結果.

此外, 我們还附帶地討論了如何自交换子的积分表示理論获得色散关系, 指出了作一个不比尋常証明中所包含的假定更強的假定后, 色散关系是可以自交换子的积分表示很容易导出的.

二、双重交换子的积分表示

令 $D(y, q)$ 为 $D(y, z)$ 对 z 的傅立叶变换. 将 $D(y, q)$ 写为

* 1961 年 2 月 21 日收到.

$$D(y, q) = \int e^{-iayq} F(y^2, q^2, \epsilon(y_0), \epsilon(q_0), \alpha) d\alpha,$$

$$F = F_1(y^2, q^2, \alpha) + F_2(y^2, q^2, \alpha) \epsilon(y_0) + F_3(y^2, q^2, \alpha) \epsilon(q_0) + F_4(y^2, q^2, \alpha) \epsilon(y_0) \epsilon(q_0). \quad (6)$$

将 F_1, F_3 写为

$$\int F'_1(y^2, q^2, \alpha') P \frac{1}{\alpha' - \alpha} d\alpha', \quad \int F'_3(y^2, q^2, \alpha') P \frac{1}{\alpha' - \alpha} d\alpha',$$

代入(6)式,利用 y, q 为时间性向量时的

$$\int e^{-iayq} P \frac{1}{\alpha' - \alpha} d\alpha = e^{-ia'yq} \frac{\pi i}{\epsilon(y_0) \epsilon(q_0)}, \quad (7)$$

我們得

$$D(y, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia'yq} \{ F_2(y^2, q^2, \alpha') \epsilon(y_0) + F_4(y^2, q^2, \alpha') \epsilon(y_0) \epsilon(q_0) + \pi i F'_1(y^2, q^2, \alpha') \epsilon(y_0) \epsilon(q_0) + \pi i F'_3(y^2, q^2, \alpha') \epsilon(y_0) \} d\alpha',$$

亦即

$$D(y, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iayq} \epsilon(y_0) F(y^2, q^2, \epsilon(q_0), \alpha) d\alpha \quad (8)$$

的形式. 对于 $\epsilon(y_0) F$, 引入下式

$$\epsilon(y_0) F(y^2, q^2, \epsilon(q_0), \alpha) = \iint e^{-ily+imq} \epsilon(l_0) \Phi(l^2, m^2, \epsilon(m_0), \alpha) d^4 m d^4 l, \quad (9)$$

于是除开一个 (2π) 的幂外,

$$D(y, z) = \int d\alpha \int d^4 l e^{-ily} \epsilon(l_0) \Phi[l^2, (z + \alpha y)^2, \epsilon(z_0 + \alpha y_0), \alpha], \quad (10)$$

$$D(p, q) = \int d\alpha \int d^4 m e^{imq} \epsilon(p_0 - \alpha q_0) \Phi[(p - \alpha q)^2, m^2, \epsilon(m_0), \alpha]. \quad (11)$$

现在通过(2), (5)来求 Φ .

当 Φ 对 l^2 的关系取得适当时(例如令 Φ 包含因子 $\theta(l^2)$), 可以使(10)式右方在 $y^2 < 0$ 时为零. 所以先讨论 $y^2 > 0$ 时的情形. 正如 Dyson 所指出的, 如果令 y 为 $(2a, 0, 0, 0)$, $a > 0$,

$$z^2 < 0 \quad \text{及} \quad (y + z)^2 < 0$$

的同时成立等价于

$$|\omega| > |\omega_0| + a, \quad (12)$$

式中 ω 定义为 $z + \frac{1}{2}y$. 以 ω, a 为变数, 得

$$D(y, z) = \int d\kappa \int d\alpha \int d^4 l e^{-ily} \epsilon(l_0) \Phi[l^2, \kappa, \epsilon(\omega_0 + \alpha a - \frac{1}{2}a), \alpha]$$

$$\delta[\kappa - (z + \alpha y)^2]$$

$$= \int d\kappa \int d\alpha \int d^4 l e^{-ily} \epsilon(l_0) \Phi[l^2, \kappa, \epsilon(\omega_0 + \alpha a - \frac{1}{2}a), \alpha]$$

$$\delta[\kappa - \omega^2 + 4a\omega_0(\frac{1}{2} - \alpha) - 4a^2(\frac{1}{2} - \alpha)^2].$$

当 ω 满足(12)式时, 在以 α 为横轴, κ 为纵轴的图上的曲线

$$\kappa - \omega^2 + 4a\omega_0 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - 4a^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^2 = 0 \quad (14)$$

上的点均在

$$\alpha < 0 \quad \text{或} \quad \alpha > 1 \quad (15)$$

处,或在

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{而} \quad \kappa < -\alpha(1-\alpha)4a^2 \quad (16)$$

处. 为证明此点,可以令

$$\begin{aligned} \kappa - 4a^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^2 &= \kappa', \\ 1 - 2\alpha &= \beta. \end{aligned} \quad (17)$$

于是曲线(14)成为 (β, κ') 图上的直线

$$\kappa' - \omega^2 + 2a\omega_0\beta = 0, \quad (18)$$

而在 ω 满足(12)式时,直线(18)满足 $\beta > 0$ 的线段均在通过 $(1, -a^2)$ 点而斜率为正的某直线之下(注意 β 为横轴, κ' 为纵轴),满足 $\beta < 0$ 的线段均在通过 $(-1, -a^2)$ 点而斜率为负的某直线之下,亦即在

$$|\beta| > 1 \quad \text{或} \quad \kappa' < -a^2, |\beta| < 1$$

处. 对于 α, κ 而言,相应的区域为(15), (16). 因此我们要求 Φ 在(15), (16)处为零. 这显然是足够条件. 至于它是必要的证明,可以用Deser^[2]文中的办法来求得.

由于 Φ 在(16)处为零而(16)式中的 a 为任意的,我们知 $\Phi(l^2, m^2, \dots)$ 含有因子 $\theta(m^2)$. 注意此处 $\theta(0)$ 定义不为零. 将 Φ 写为 $\Phi'\theta(m^2)$, 而同时看到(16)式中第一式,得

$$D(y, z) = \int_0^1 d\alpha \int d^4 l e^{-il y} \epsilon(l_0) \Phi'[l^2, (z + \alpha y)^2, \epsilon(z_0 + \alpha y_0), \alpha] \theta[(z + \alpha y)^2], \quad (19)$$

$$D(p, q) = \int_0^1 d\alpha \int d^4 m e^{im q} \epsilon(p_0 - \alpha q_0) \Phi'[(p - \alpha q)^2, m^2, \epsilon(m_0), \alpha] \theta(m^2).$$

可以将后一式写为

$$\begin{aligned} D(p, q) &= \int d\lambda \int_0^1 d\alpha \epsilon(p_0 - \alpha q_0) G(\lambda, q^2, \epsilon(q_0), \alpha) \delta[\lambda - (p - \alpha q)^2], \\ G &= \int d^4 m e^{im q} \Phi'[\lambda, m^2, \epsilon(m_0), \alpha] \theta(m^2). \end{aligned} \quad (20)$$

暂不讨论 Φ' 应如何选择,使 G 在 $q^2 < A^2$ 时为零,让我们先讨论 D 在

$$q^2 > 0, \quad p^2 < B^2, \quad (p - q)^2 < C^2 \quad (21)$$

同时成立时为零所带来的结果.

为简单起见,首先令 $B = C$. 取 $q = (2a, 0, 0, 0)$, $a > 0$. 如果 $a > B$, 那末(21)后二式相当于

$$\begin{aligned} p_0 &> a, & p^2 &> p_0^2 - B^2 \\ \text{或} & & p_0 &< a, & p^2 &> (p_0 - q_0)^2 - B^2. \end{aligned} \quad (22)$$

利用 $0 < \alpha < 1$ 的事实,不难证明,在(22)式情形下,

$$(p - \alpha q)^2 < B^2 - 4a^2 + 4a^2\alpha^2, \quad (23)$$

因此只消 G 在

$$\lambda < B^2 - \alpha q^2 + \alpha^2 q^2 \quad (24)$$

时为零,便能使 D 在(21), $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 > B^2, q_0 > 0$ 都被满足情形下为零. 如果 $a < B$, (21)后二式相当于

$$\begin{aligned} & p_0 > B, \quad p^2 > p_0^2 - B^2, \\ \text{或} \quad & p_0 < -B + 2a, \quad p^2 > (p_0 - q_0)^2 - B^2 \\ \text{或} \quad & -B + 2a < p_0 < B. \end{aligned} \quad (25)$$

在(25)情形下,

$$(p - \alpha q)^2 < \text{Max}\{(B - \alpha\sqrt{q^2})^2, (B - (1 - \alpha)\sqrt{q^2})^2\}. \quad (26)$$

所以只消 G 在

$$\lambda < \text{Max}\{(B - \alpha\sqrt{q^2})^2, [B - (1 - \alpha)\sqrt{q^2}]^2\} \quad (27)$$

处为零,即可使 D 在(21), $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 < B^2, q_0 > 0$ 均成立时为零. 以上讨论了 $q_0 > 0$ 的情形, $q_0 < 0$ 的情形带来同样的讨论. 当 $B \neq C$ 时,作相似的讨论,结论为:只消 G 在

$$\sqrt{q^2} < B + C, \quad \lambda < \text{Max}\{(B - \alpha\sqrt{q^2})^2, [C - (1 - \alpha)\sqrt{q^2}]^2\}$$

$$\text{及} \quad \sqrt{q^2} > B + C, \quad \lambda < \alpha^2 q^2 - \alpha(B^2 - C^2 + q^2) + B^2 \quad (28)$$

处为零, D 在(21)式成立时为零.

总结以上, Φ' 应如此选择,使(20)第二式右方成为

$$\theta(q^2 - A^2)\{H_1(\lambda, q^2) + H_2(\lambda, q^2)\epsilon(q_0)\}L(\lambda, q^2, \alpha), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} L = & \theta(B + C - \sqrt{q^2})\theta\{\lambda - \text{Max}[(B - \alpha\sqrt{q^2})^2, (C - (1 - \alpha)\sqrt{q^2})^2]\} + \\ & + \theta(\sqrt{q^2} - B - C)\theta\{\lambda - \alpha^2 q^2 + \alpha(B^2 - C^2 + q^2) - B^2\}. \end{aligned}$$

此外, Φ' 应如此地选择,使(19)式右方在 $y^2 < 0$ 时为零. 从第一个要求,得

$$\Phi'(\lambda, m^2, \epsilon(m_0), \alpha)\theta(m^2) = \int e^{-imq} d^4q \times (29). \quad (30)$$

H_1 对于上式右方的贡献不含有 $\theta(m^2)$ 因子,因此应取 $H_1 = 0$. 这样(30)右方便含有 $\epsilon(m_0)$ 因子,使 Φ' 与 $\epsilon(m_0)$ 成正比.

为满足第二个要求而决定 Φ' 对 l^2 的依赖,在此缺乏一般性的办法. 但显然地如果令 Φ' 含有 $\theta(l^2)$ 因子,则这个要求也被满足. 在此情形下

$$G(\lambda, q^2, \epsilon(q_0), \alpha) = \theta(q^2 - A^2)\epsilon(q_0)H_2(\lambda, q^2)\theta(\lambda)L(\lambda, q^2, \alpha). \quad (31)$$

以此代入(20)第一式,即求出所需的 $D(p, q)$.

当 $A = B = C = 0$ 时,

$$\begin{aligned} D(p, q) = & \int_0^1 d\alpha \epsilon(p_0 - \alpha q_0) H_2[(p - \alpha q)^2, q^2] \theta(q^2) \epsilon(q_0) \\ & \theta[(p - \alpha q)^2] \theta[(p - \alpha q)^2 - \alpha^2 q^2 + \alpha q^2]. \end{aligned} \quad (32)$$

因为最后一个 θ 可以取去而不影响积分值,这样便化为Dyson的结果.

三、交换子的积分表示与色散关系

現在讓我們附帶地討論如何可以簡單地自交换子的积分表示导出色散关系 (非向前散射), 例如 $N - \pi$ 散射 ($p_N + q_\pi \rightarrow p'_N + q'_\pi$) 的色散关系.

令 $F(x)$ 为

$$\begin{aligned} \langle p'_N | \left[i \left(\frac{x}{2} \right), i \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | p_N \rangle &= F_1 + F_2, \\ F_1 &= \epsilon(x_0) G_1(x^2, p_N x, p'_N x), \\ F_2 &= G_2(x^2, p_N x, p'_N x), \end{aligned} \quad (33)$$

式中 i 代表介子流. 引入 Breit 系, 使 $p_N = (\mathbf{p}, E_p)$, $p'_N = (-\mathbf{p}, E_p)$, $E_p = (M^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}$, 将 F_1 写为

$$\epsilon(x_0) \int d\alpha_1 \int d\alpha_2 G_1(x^2, \alpha_1, \alpha_2, p_N, p'_N) e^{-i\alpha_1 p_N x} e^{-i\alpha_2 p'_N x}, \quad (34)$$

再化为

$$\begin{aligned} 2\epsilon(x_0) \int d\beta_1 \int d\beta_2 G_1(x^2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) e^{-i\beta_1 p_1 x} e^{-i\beta_2 p_2 x}, \\ \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \\ p_1 = \frac{1}{2}(p_N + p'_N) = (0, E_p), \quad p_2 = \frac{1}{2}(p_N - p'_N) = (\mathbf{p}, 0), \end{aligned} \quad (35)$$

于是 F_1 的傅立叶变换成为

$$\begin{aligned} \int d\beta_1 \int d\beta_2 \epsilon(q_0 - \beta_1 p_{10}) \theta[(q - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2)^2] \times \\ \times \Phi_1[(q - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2)^2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2] \end{aligned} \quad (36)$$

的形式. 至于 F_2 , 可以写为取去 $\epsilon(x_0)$ 因子的 (34) 式, 化为

$$2 \int d\beta_1 \int d\beta_2 G_2(x^2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) e^{-i\beta_1 p_1 x} e^{-i\beta_2 p_2 x}. \quad (37)$$

引入变换 $G_2 \rightarrow G'_2$

$$G_2(x^2, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) = \int P \frac{G'_2(x^2, \beta'_1, \beta_2, p_1, p_2)}{\beta'_1 - \beta_1} d\beta'_1,$$

代入 (37), 成为

$$2 \int d\beta'_1 \int d\beta_2 G'_2(x^2, \beta'_1, \beta_2, p_1, p_2) \pi i \epsilon(x_0) \epsilon(p_{10}) e^{-i\beta'_1 p_1 x} e^{-i\beta_2 p_2 x}.$$

于是 F_2 的傅立叶变换也取 (36) 的形式. 此后我们以 (36) 式作为 F 的傅立叶变换 $\tilde{F}(q)$.

如果为单核子态的中間态可以不計 (例如在 (33) 上乘以某微分算符, 使此項为零), 那末 $\tilde{F}(q)$ 在

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}) \equiv p_{10} - (M_A^2 + \mathbf{q}^2)^{\frac{1}{2}} < q_0 < \\ < -p_{10} + (M_A^2 + \mathbf{q}^2)^{\frac{1}{2}} \equiv f_2(\mathbf{q}) \quad M_A = M + m \end{aligned} \quad (38)$$

处为零. 如果在 (38) 中 $\mathbf{q}$ 限于实向量, 那末此后的討論不能給我們非向前色散关系. 如果設 $M_A > p_{10}$, 而假定 (38) 可以推广至

$$-M_A^2 + p_{10}^2 < \mathbf{q}^2 < 0$$

(q^2 的下限取得使 $f_2(q) > f_1(q)$ 繼續有效), 便可获得非向前散射的色散关系. 因为在应用(36)至色散关系时, q 换为 $\frac{1}{2}(q_+ + q'_+)$, 因此 q 与 p 垂直, 因此 q 只通过 q^2 出现, 因此这样的做法并未在(36)式中明显地引入虚数.

这一点假定似乎是太強, 因此是不很好的. 但事实上在目前色散关系的某些証明中, 我們对于非物理区不能摆脱类似的討論. 例如在 Боголюбов^[3] 的对于色散关系的証明中, 需要証明在 $(p_1 + p_3)^2 > (M + m)^2$ 及 $(p_1^0 + p_3^0) > 0$ 时

$$[M^2 - (p_1 + p_3)^2] \tilde{D}^{(1)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \neq 0, \quad (39)$$

在其他时等于零(符号意义見文献[3]). 在証明此式时会用到 p_1, p_2, p_3, p_4 为实向量的事实, 但在应用时, 不难看出, 在 $(p_1 + p_3)^2$ 取某一段值时, p_3 为一复向量. 如果我們取 Breit 系, 这时

$$\begin{aligned} p_1 &= (-p, E_p), p_2 = (-p, E_p), \quad E_p = (M^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \\ p_3 &= (p + \sqrt{E^2 - p^2 - \tau} e, E), \\ p_4 &= (p - \sqrt{E^2 - p^2 - \tau} e, E), \end{aligned}$$

那末当 $\tau \rightarrow m^2$ 而

$$(M + m)^2 < (p_1 + p_3)^2 < (\sqrt{M^2 + p^2} + \sqrt{m^2 + p^2})^2 \quad (40)$$

时, 我們得

$$E < \sqrt{m^2 + p^2},$$

亦即 p_3 为一复向量. 因此文献[3]的証明在实质上已經假定在 p_3 取某些复数值时某些对实向量 p_1, p_2, p_3, p_4 取得証明的式子依然有效.

这一項将 q^2 推广至負值的假定也等于証(38)式中的 M_A^2 取負值, 那时 q^2 的变化为自 $-M_A^2 + p_{10}^2$ 至 ∞ . 在最后討論色散关系(43)时, 再令 M_A 变为 $M + m$.

只討論 $qp = 0$ 时的(36), 該时可以将(36)写为

$$\begin{aligned} &\int d\kappa \int d\beta_1 \int d\beta_2 \epsilon(q_0 - \beta_1 p_{10}) \theta(\kappa) \Phi(\kappa, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) \times \\ &\quad \times \delta(\kappa - q^2 - \beta_1^2 p_1^2 - \beta_2^2 p_2^2 - 2\beta_1 q p_1), \end{aligned}$$

再改写为

$$\begin{aligned} &\int d\mu \int d\beta_1 \int d\beta_2 \epsilon(q_0 - \beta_1 p_{10}) \theta(\mu + \beta_1^2 p_1^2 + \beta_2^2 p_2^2) \Phi(\mu, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) \times \\ &\quad \times \delta(\mu - q^2 - 2\beta_1 q p_1). \end{aligned} \quad (41)$$

利用文献[2]的办法, 但将(38)式中的 q^2 了解在 $(-M_A^2 + p_{10}^2, \infty)$ 中变化, 可証在

$$|\beta_1| > 1$$

或

$$|\beta_1| < 1 \quad \text{而} \quad \mu < M_A^2 - p_{10}^2 \quad (42)$$

时, $\Phi = 0$.

引入

$$\tilde{F}_K(q) = \int e^{iqx} \theta(x_0) \langle p'_N | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p_N \rangle,$$

得

$$\begin{aligned}\tilde{F}_K(q) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{F}(q'_0, \mathbf{q})}{q'_0 - q_0 - \epsilon i} dq'_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iiint d\mu d\beta_1 d\beta_2 \frac{\Phi(\mu, \beta_1, \beta_2, p_1, p_2) \theta(\mu + \beta_1 p_1^2 + \beta_2 p_2^2)}{-\mu + q^2 - 2\beta_1 q p_1 - 2\epsilon i(\beta_1 p_{10} - q_0)}. \quad (43)\end{aligned}$$

应用至色散关系时, 我们将分母中的 $\mathbf{q}^2$ 换为 $q_0^2 - m^2 - \mathbf{p}^2$. 不难看出在 $\mathbf{p}^2 < Mm$ 时, 当 Φ 不为零而分母中的 $-\mu + q^2 - 2\beta_1 q p_1$ 为零时

$$-q_0 \beta_1 = \frac{1}{p_{10}} (\mu - m^2 - \mathbf{p}^2) > \frac{1}{p_{10}} (M^2 - p_{10}^2 - m^2 - \mathbf{p}^2) > 0.$$

因此 q_0 与 $\beta_1 p_{10}$ 同一符号, 因此分母中的 $+2\epsilon i q_0$ 可以忽略. 因此 $\tilde{F}_K(q)$ 为 q_0 的一个在上半平面解析函数在 q_0 趋近于实轴时的值. 以上提供了一个简单的但不严格的非向前散射色散关系的证明.

参 考 文 献

- [1] Dyson, *Phys. Rev.* **111** (1958), 1717.
- [2] Deser, Gilbert, Sudarshan, *Phys. Rev.* **115** (1960), 731.
- [3] Боголюбов, Ширков, 色散关系理论问题, 118 页, (7.29) 式.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF COMMUTATORS

T. S. CHIANG
(Academia Sinica)

ABSTRACT

A possible integral representation of double commutators allowing non-vanishing mass of intermediate states is obtained. As expected, it reduces to Dyson's result on putting the masses to be zero. A discussion is also given showing how dispersive relations for non-forward scattering can be obtained on assuming the fourier transform $F(q_0, \mathbf{q})$ of the usual $\langle p'_N | [j(\frac{x}{2}), j(-\frac{x}{2})] | p_N \rangle$ to vanish not only for certain real $\mathbf{q}$ but also for a small interval of imaginary $\mathbf{q}$. It is pointed out that similar assumption is actually involved in customary proofs of dispersive relations.